Curvaturas de Métricas Semi-Riemannianas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie

Rui Pedro ALBUQUERQUE

Dissertação de Mestrado

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
1996

Curvaturas de Métricas Semi-Riemannianas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie

Rui Pedro ALBUQUERQUE

Dissertação de Mestrado

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
1996

Dissertação de Curso de Mestrado em Matemática
— Geometria e Topologia —

Curvaturas de Métricas Semi-Riemannianas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie

Rui Pedro Albuquerque

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
1996

[0]Trabalho realizado no âmbito do programa PRAXIS XXI

Índice

O presente trabalho resulta do estudo iniciado em 5 de Março de 1996, com vista a apresentação de uma tese de Mestrado.

J.Milnor apresentou em [M] diversos resultados relativos à curvatura de Gauss de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda sobre um grupo de Lie. Em especial, ele deduziu muitas particularidades do caso em que o grupo de Lie tem dimensão 3. Este trabalho tem vindo a inspirar, desde há vinte anos, novos estudos sobre matérias com ele relacionadas. Ainda muito recentemente, em [CorPar], encontramos um estudo da curvatura Lorentziana em dimensão 3 que utiliza os mesmos métodos de [M].

Fomos orientados no início da feitura deste trabalho, e foi o que sempre nos animou, para crescer em duas direcções relativamente a [M]. Uma, a passagem ao estudo das métricas invariantes à esquerda não apenas Riemannianas ou Lorentzianas. É o assunto ao qual é devotado o Capítulo 1. Outra, a investigação da curvatura das métricas de assinatura $(-,-,+,+)$ em grupos de Lie de dimensão 4. O que se conseguiu está no Capítulo 2.

Essencialmente, em [Nom] generalizou-se um dos resultados de [M] às estruturas Lorentzianas. É o chamado "exemplo especial". No nosso Capítulo 3 extendemos aqueles trabalhos a qualquer métrica invariante à esquerda e o Teorema principal a que se chegou, após sucessivas melhorias, acabou por ficar com uma demonstração muito mais simples do que a inicial, que apenas dizia respeito ao caso da métrica de Lorentz (cf.[Nom]).

A dimensão 4 e o "exemplo especial" trouxeram-nos numerosos resultados directa ou indirectamente. Não é sem orgulho e ao mesmo tempo sem nos lamentarmos, que afirmamos que resistimos à tentação de 'passar para o papel' as demonstrações dos resultados verdadeiramente bonitos da Teoria já conhecida, a fim de que o leitor nos reservasse toda a atenção.

Suposemos o absurdo de o leitor, por um lado, ser um perito em Grupos de Lie e Geometria Diferencial, e por outro, desconhecer completamente a Geometria semi-Riemanniana. Foi a forma de nos obrigarmos, a nós próprios, a aprofundar o estudo da Geometria semi-Riemanniana.

Por último, queremos deixar aqui um forte agradecimento à Professora Isabel Salavessa, que nos orientou e muito tem ajudado.

A sua sabedoria, o seu empenho, motivação e confiança são para nós um exemplo a seguir.

Lisboa, 31 de Dezembro de 1996.

Notação

Os espaços vectoriais deste trabalho são todos reais ou complexos de dimensão finita. Na falta de indicação explícita, são reais, o mesmo se passando com variedades, grupos ou álgebras de Lie, aplicações lineares, etc. O expoente ^{c} junto de espaços vectoriais, de aplicações multilineares ou álgebras significa o respectivo complexificado. Por uma base de um espaço vectorial entendemos um sistema ordenado de vectores que forme uma base. ^{T} e tr denotam, respectivamente, a transposta e o traço de uma matriz. det $= |\cdot|$ denota o determinante de uma matriz ou aplicação (fixada uma base). $\times$ representa o produto cartesiano e $\oplus$ tanto a soma como o produto directos (de grupos ou espaços vectoriais).

No contexto das álgebras de Lie, $\mathbb{R}^n$ denota uma álgebra de Lie abeliana de dimensão n.

Os grupos de Lie deste trabalho têm, como em [V], estrutura de variedade analítica. Já se sabe que de uma estrutura real de classe C^0 se pode ter outra até ao grau de analítica, compatível com a primeira.

Adoptamos as seguintes notações usuais:

$f_* = df$ - derivada da função f;

e - elemento identidade de um grupo;

L_g, R_g - translacções, respectivamente, esquerda e direita de um grupo por multiplicação de um elemento g;

G^0 - componente conexa de e num grupo de Lie G;

$\widetilde{G}$ - espaço de cobertura universal de um grupo de Lie G;

Ad - representação adjunta de um grupo de Lie;

$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ - centro de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$;

$\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ - subálgebra de Lie derivada de $\mathfrak{g}$;

Aut $(\cdot)$ - grupo de Lie (!) dos automorfismos de um grupo de Lie ou de uma álgebra de Lie;

ad - representação adjunta de uma álgebra de Lie;

B - forma de Killing de uma álgebra de Lie;

$\partial\mathfrak{g}$ =Der $\mathfrak{g}$ - álgebra de Lie das derivações de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$;

exp - aplicação exponencial de um grupo de Lie ou de uma variedade com conexão;

$\mathbb{T}$ - números complexos de módulo 1 (toro);

$GL(V)$ - grupo dos isomorfismos lineares de um espaço vectorial V;

$\mathfrak{gl}(V)$ - álgebra de Lie dos endomorfismos de um espaço vectorial V.

Seja K o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$I_n = I$ - matriz identidade;

$GL(n, K)$ - grupo das matrizes invertíveis de ordem n sobre K;

$GL_n^+ = GL(n, \mathbb{R})^0$;

$SL(n,K)$ - subgrupo de $GL(n,K)$ das matrizes de determinante 1;

Sejam $I_{pq} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.

$O(p,q,\mathbb{R}) = \{A \in GL(p+q,\mathbb{R}) : A^T I_{pq} A = I_{pq}\}$ - grupo (pseudo)ortogonal;
$U(p,q,\mathbb{C}) = \{A \in GL(p+q,\mathbb{C}) : A^T I_{pq} \overline{A} = I_{pq}\}$ - grupo (pseudo)unitário;
$Sp(m,K) = \{A \in GL(2m,K) : A^T F A = F\}$ - grupo simpléctico;
$SO(p,q,\mathbb{R}) = O(p,q,\mathbb{R}) \cap SL(p+q,\mathbb{R})$;
$SU(p,q,\mathbb{C}) = U(p,q,\mathbb{C}) \cap SL(p+q,\mathbb{C})$;
$Sp(m) = Sp(m,\mathbb{C}) \cap U(2m,\mathbb{C})$;
$O(0,n,\mathbb{R}) = O_n$ - grupo ortogonal;
$U_n = U(0,n,\mathbb{C})$ - grupo unitário;

Quando estiver subentendido qual o corpo K falaremos simplesmente de GL_n, SL_n, O_{pq}, ...

Como é sabido, estes grupos possuem uma estrutura de grupo de Lie real e é essa que se considera se não se disser nada em contrário. Notamos as suas álgebras de Lie, respectivamente, por $\mathfrak{gl}(n,K)$, $\mathfrak{sl}(n,K)$, $\mathfrak{o}(p,q,\mathbb{R})$, ..., com as correspondentes abreviaturas no caso em que já se sabe qual o corpo K.

1 Resultados Gerais

1.1 Produtos Escalares

Dado um espaço vectorial real V de dimensão finita n chamamos *produto escalar* a uma forma bilinear $< \, , \, >$ simétrica não degenerada nele definida. Notaremos indiferentemente estas aplicações de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ por $< \, , \, >$ ou g. A condição de simetria é suficiente para que uma forma bilinear se possa escrever, para certa base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V, como a matriz

$$(<v_i, v_j>) = \begin{pmatrix} -I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t, r \in \mathbb{N}).$$

A demonstração, por indução em n, é quase imediata. Supondo logo g uma aplicação bilinear real simétrica não nula, se a dimensão n de V é 1, tomando $v \in V$ tal que $g(v,v) \neq 0$, $v_1 = v/\sqrt{|<v,v>|}$ é a base pretendida. Se $n > 1$, supondo válida aquela afirmação para $n-1$, sejam v, v' dois vectores de V não nulos tais que $<v, v'> \neq 0$. É trivial verificar que v ou v' ou $v + v'$ verificam a equação $<x, x> \neq 0$. Podemos então supôr que $<v, v> \neq 0$ e mesmo que $<v, v> = \pm 1$. $N = \ker <v, \cdot>$ é um subespaço de V de dimensão $n-1$ e agora, usando a hipótese de indução sobre N, já se está a ver como termina a demonstração.

Um vector não nulo $v \in V$ diz-se *positivo*, *negativo* ou *nulo* se verificar, respectivamente, $g(v,v) > 0$, < 0 ou $= 0$. Tambem se usam os termos, respectivamente, *tipo espaço*, *tipo tempo* e *tipo luz*. Dizemos que um vector v é *unitário* se $g(v,v) = \pm 1$. Dois vectores $u, v \in V$ dizem-se *ortogonais* se verificarem $<u, v> = 0$. Mais geralmente, dois subconjuntos A e B de V dizem-se *ortogonais*, e denota-se $A \perp B$, se todo o vector de A é ortogonal a todo o vector de B. Uma base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V diz-se *ortogonal* se, para todo o $i \neq j$, $g(e_i, e_j) = 0$.

Os números naturais t e r da matriz acima são invariantes da forma bilinear g, isto é, dada outra base ortogonal $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V, é igual a t o número de vectores e_i negativos, igual a r o de positivos e igual a $n - t - r$ o de nulos.

Chama-se a este facto *"Lei da Inércia de Sylvester"*. Vejamos. Reordenando e 'normalizando' a base (e_i) podemos já supôr que a matriz $\mathcal{G}' = (<e_i, e_j>)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} -I_{t'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t', r' \in \mathbb{N}).$$

Notando P a matriz de mudança de base e $\mathcal{G}$ a primeira matriz, tem-se, por bilinearidade, $P^T\mathcal{G}'P = \mathcal{G}$, donde $\mathrm{rk}(\mathcal{G}') = \mathrm{rk}(\mathcal{G})$, ou seja, $t + r = t' + r'$. Em seguida supomos $r' > r$. Tomando

$$F = < v_1, \dots, v_t, v_{t+r+1}, \dots, v_n > \quad \text{e} \quad F' = < e_{t'+1}, \dots, e_{t'+r'} >,$$

temos $\dim F = n - r$ e $\dim F' = r'$. De $\dim(F + F') + \dim(F \cap F') = \dim F + \dim F' = n + r' - r > n$, vem $F \cap F' \neq 0$. Mas se um vector não nulo está em F, ele é não negativo, enquanto se está em F', ele é negativo. Logo $F \cap F' = 0$. Supondo $r > r'$ chegamos a um absurdo parecido, donde $r = r'$ e $t = t'$ c.q.d. Ao número t chamamos *índice* de g.

Quando g é um produto escalar, o que consideraremos sempre daqui em diante, a condição de ser não degenerado, isto é, para todo o vector $v \neq 0$ existe um vector u tal que $<u, v> \neq 0$, pode-se traduzir como $v \perp V \Leftrightarrow v = 0$. É tambem equivalente a $t + r = n$, ou ainda, à matriz de g em qualquer base (igual a $P^T\mathcal{G}P$ para alguma P invertível) ser não singular. Uma base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V diz-se *ortonormada* se $<e_i, e_j> = \pm\delta_{ij}$.

Falamos agora na *assinatura* de g como sendo o seu índice, que tambem se costuma notar $(t, n - t)$ ou $(-, \dots, -, +, \dots, +)$, onde t é o número de $-$, ou melhor, o número de vectores negativos numa base ortonormada. A um produto escalar de assinatura $(n, 0)$ ou $(0, n)$ chamamos *produto interno* e dizemos que g é *definida negativa* no primeiro caso, *definida positiva* no segundo. Se nenhum destes casos se dá, o produto escalar diz-se *indefinido* . Como exemplo daquilo que temos vindo a dizer, temos $\mathbb{R}^n$ com produto escalar b dado nas coordenadas canónicas por

$$b(x, y) = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i,$$

e que se costuma notar $\mathbb{R}^n_p$. A $\mathbb{R}^n_0$, $\mathbb{R}^n_1$ e $\mathbb{R}^n_p$ $(p \geq 2)$ chamamos, respectivamente, *espaço Euclideano*, *espaço de Minkowski* e *espaço semi-Euclideano*.

Se F é um subespaço de V, notamos $F^\perp$ o subespaço (!) dos vectores que lhe são ortogonais. Temos que $F^\perp \perp F$ e $\dim F^\perp + \dim F = n$, mas não por regra, $F^\perp + F = V$. Pode-se dar o caso de $g_{|F \times F}$, que denotamos por g_F, ser não degenerada e, aí, já se tem aquela soma directa, $g_{F^\perp}$ não degenerada e g de assinatura igual à soma (em $\mathbb{Z}^2$) das assinaturas de g_F e $g_{F^\perp}$. Reciprocamente, cada uma destas três condições implica g_F ser não degenerada. Tambem se diz que F é um *subespaço não degenerado*. Tudo isto é fácil de demonstrar e mais resultados, particulares do Espaço de Minkowski, podem ser consultados em [BO].

Seja W outro espaço vectorial real com produto escalar e $T{:}V \to W$ um operador linear não nulo que verifique $<T\,x, T\,y>=<x,y>$ para todos os vectores $x, y \in V$. T é injectivo. Se T é sobrejectivo, isto é, se $\dim V = \dim W$, T chama-se uma *isometria*. Uma isometria transforma bases ortonormadas em bases ortonormadas. Entre V e W existe uma isometria sse V e W têm a mesma dimensão e os seus produtos escalares têm o mesmo índice.

Continuando a notar W outro espaço vectorial munido de um produto escalar h, podemos associar a $V \times W$ um produto escalar, que se denota $g \times h$, e que no par $((v_1, w_1), (v_2, w_2))$ vale $g(v_1, v_2) + h(w_1, w_2)$. Voltando ao caso em que F é um subespaço de V e g_F é não degenerada, mostra-se a existência de uma isometria entre os 'pares' (V, g) e $(F \times F^{\perp}, g_F \times g_{F^{\perp}})$.

Em [BEE] encontramos o seguinte resultado com uma demonstração complicadíssima. Foi nos comunicada outra mais simples.

Lema 1 *Seja V um espaço vectorial real com dois produtos escalares indefinidos g e h. Se estes têm os mesmos vectores nulos, isto é $g(v,v) = 0$ sse $h(v,v) = 0, \forall v \in V$, então existe λ real não nulo tal que $g = \lambda h$. Em particular, g e h ou g e $-h$ têm a mesma assinatura.*

Demonstração. Seja $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ uma base g-ortonormada ($r \geq 1$) com $e_1, \ldots, e_r$ g-negativos e os restantes vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$ g-positivos. Verificando que, para $i \leq r < k$,

$$g(e_i \pm e_k, e_i \pm e_k) = g(e_i, e_i) \pm 2g(e_i, e_k) + g(e_k, e_k) = 1 - 1 = 0,$$

deduz-se, pelas mesmas contas para h, que $h(e_i, e_k) = 0$, $h(e_i, e_i) = -h(e_k, e_k)$. Seja $\lambda = h(e_{r+1}, e_{r+1})$. Tem-se

$$h(e_i, e_i) = -\lambda \ \text{ para } i \leq r, \qquad h(e_k, e_k) = \lambda \ \text{ para } k > r.$$

Agora, para $i, j \leq r < k, l$,

$$g(e_i + e_j + \sqrt{2}e_k, e_i + e_j + \sqrt{2}e_k) = -1 - 1 + 2 = 0$$

e daqui vem

$$0 = h(e_i + e_j + \sqrt{2}e_k, e_i + e_j + \sqrt{2}e_k) = -\lambda + 2\lambda - \lambda + 2h(e_i, e_j).$$

De modo análogo se prova que $h(e_k, e_l) = 0$ e isto é suficiente para afirmar que $g = \lambda h$.

Suponhamos que V tem assinatura (p, q). O subgrupo de $GL(V)$ dos automorfismos que são isometrias tem uma estrutura natural de subgrupo de Lie de $GL(V)$. É a que vem da estrutura de grupo de Lie de O_{pq} pelo isomorfismo de grupos que, fixada uma base, a cada aplicação associa a sua matriz – ortogonal. A subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ associada é o conjunto dos endomorfismos *anti-autoadjuntos*, isto é, $L: V \longrightarrow V$ tal que

$$<Lx, y> = - <x, Ly>$$

para todos os vectores $x, y \in V$. Tambem este grupo toma a denominação de *ortogonal* e nota-se $O(V)$. A sua álgebra, $\mathfrak{o}(V)$.

Ao plano Euclideano e ao plano de Minkowski estão associados dois grupos de Lie. $E(2)$ e $E(1,1)$, de dimensão 3, que se chamam os grupos dos *movimentos rígidos* desses planos, consistem na união do grupo ortogonal de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^2_1$, as rotações, com as translacções de $\mathbb{R}^2$. A operação do grupo é a composição. Veremos no §1.6 que tais uniões são isomorfas ao produto semi-directo de $\mathbb{R}^2$ com O_2 ou $O_{1,1}$, donde lhes vem a estrutura de Lie. As suas álgebras de Lie denotam-se, respectivamente, por $\mathfrak{e}_2$ e $\mathfrak{e}_{1,1}$.

Idênticas construções se fazem para $\mathbb{R}^n_s$.

1.2 Conexão de Levi-Civita e Curvaturas semi-Riemannianas

Vamos fazer uma abordagem rápida à teoria das variedades semi-Riemannianas, tocando apenas nos assuntos que pretendemos aplicar aos grupos de Lie. Uma variedade diferenciável[1] M de dimensão n diz-se *semi-Riemanniana* ou *Pseudo-Riemanniana* se possuir um campo tensorial real simétrico global e diferenciável g tal que, em cada ponto $m \in M$, g_m é não degenerada e tem sempre o mesmo índice. Ao par (M, g) ou a g chamamos *Estrutura semi-Riemanniana.*

Podemos falar no *índice* ou na *assinatura* de M ou g como sendo o índice ou a assinatura de qualquer g_m. A g dá-se o nome de *tensor da métrica* ou simplesmente *métrica.* Se o índice for 0 a variedade diz-se *Riemanniana* ou *de Riemann* e a métrica *definida positiva* ou *Riemanniana.* Se o índice for n, $(M, -g)$ é uma variedade Riemanniana e g diz-se *definida negativa.* Se o índice não for algum destes dois, então a métrica diz-se *indefinida* ou *semi-Riemanniana.* No caso em que o índice é 1, (M, g) diz-se *Lorentziana* ou uma *variedade de Lorentz.*

Um difeomorfismo $f: M \longrightarrow N$ entre duas variedades semi-Riemannianas diz-se uma *isometria* se a sua derivada, em cada ponto $m \in M$, for uma isometria de T_mM sobre $T_{f(m)}N$. A existir tal aplicação, M e N dizem-se *isométricas.*

Teorema 1 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 3$ munida de duas estruturas semi-Riemannianas g e h. Suponhamos que para quais-*

[1]com 'diferenciável' queremos dizer 'de classe C^∞'. Podíamos, quando a variedade em causa fosse um grupo de Lie, restringir-mo-nos ao caso 'analítico', que tudo funcionaria bem.

quer $m \in M$, $v \in T_mM$ *se tem* $g_m(v,v) = 0$ *sse* $h_m(v,v) = 0$. *Então existe* $\Lambda : M \to \mathbb{R}^+$ *diferenciável tal que* $h = \Lambda\, g$.

Isto é consequência imediata do lema 1 do §1.1 e de se poder tomar, numa vizinhança de cada ponto de M, um campo vectorial diferenciável X em TM tal que $h(X,X) = \Lambda\, g(X,X)$ nunca se anule, permitindo mostrar a diferenciabilidade de Λ.

Ao contrário do caso Riemanniano (cf.[KN,I]), uma variedade diferenciável não possui, de forma geral, qualquer maquinaria que a torne numa variedade semi-Riemanniana com métrica indefinida. No caso dos grupos de Lie essa maquinaria existe. Seja G um grupo de Lie e denotemos $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie dos campos vectoriais invariantes à esquerda. As translacções esquerdas

$$L_g : G \to G, \qquad L_g\, g' = gg' \qquad (g, g' \in G)$$

e um dado produto escalar $< \, , \, >_{g_0}$ num espaço tangente $T_{g_0}G$ permitem-nos definir uma métrica sobre G, a saber, a que faz todos os difeomorfismos L_g serem isometrias. Temos então, para todo o $g \in G$, $u, v \in T_{g_0}G$,

$$< L_{g_*\,g_0}(u), L_{g_*\,g_0}(v) >_{gg_0} = < u, v >_{g_0}$$

e esta mesma igualdade no ponto g_o^{-1} permite supôr, s.p.g., que o produto escalar havia sido dado em T_eG ou em $\mathfrak{g}$, em virtude do isomorfismo canónico que existe entre estes dois espaços. Vejamos que $< \, , \, >$ é de facto uma estrutura semi-Riemanniana. Pelo que se sabe de uma isometria, é verdade que $< \, , \, >_g$ é não degenerada e o índice é o mesmo qualquer que seja o $g \in G$. Seja $X_1, \ldots, X_n$ um campo de referenciais invariante à esquerda, logo, global e analítico. Dados campos vectoriais $U, V \in C^\infty_\Omega(TG)$, onde Ω é um aberto de G, existem funções $f_1, \ldots, f_n, h_1, \ldots, h_n \in C^\infty_\Omega(\mathbb{R})$ tais que $U = \sum_{i=1}^n f_i X_i$, $V = \sum_{i=1}^n h_i X_i$. Então

$$< U, V > = \sum_{i,j} f_i h_j < X_i, X_j > = \sum_{i,j} f_i h_j < X_{i_e}, X_{j_e} >_e$$

é claramente C^∞. Isto basta, como é sabido, para mostrar que $< \, , \, >$ é um tensor simétrico diferenciável global.

À estrutura semi-Riemanniana num grupo de Lie construída aqui acima damos o nome de *estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda induzida pelo produto escalar de* T_eG ou mais simplesmente *estrutura semi-Riemanniana induzida invariante à esquerda.* Chamamos tambem *induzida* à métrica desta estrutura. Análogamente, com as translacções direitas, pode-se definir uma estrutura semi-Riemanniana induzida invariante à direita. Como exemplo temos os espaços $\mathbb{R}^n_p$, que significam o grupo de Lie $\mathbb{R}^n$ com fibrado tangente $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_p$.

Na linguagem dos campos tensoriais, uma métrica induzida satisfaz

$$L_g^* < \, , \, > = < \, , \, > \quad , \quad \forall g \in G. \tag{1.1}$$

Geralmente, dada uma estrutura semi-Riemanniana num grupo de Lie, a métrica diz-se *invariante à esquerda* se satisfaz (1.1). Diz-se *invariante à direita* se satisfaz (1.1) com R no lugar de L. Uma métrica diz-se *bi-invariante* se for invariante à esquerda e invariante à direita. Claro que uma métrica induzida invariante à esquerda (resp. direita) é, no sentido desta última definição, invariante à esquerda (resp. direita). Por sua vez, toda a métrica invariante à esquerda (resp. direita) $< \, , \, >$ é induzida pelo produto escalar $< \, , \, >_e$, restrição de $< \, , \, >$ a T_eG.

Até ao fim deste trabalho ocupamo-nos das métricas invariantes à esquerda, quando não das bi-invariantes. Como vimos, basta pensar em produtos escalares definidos em $\mathfrak{g}$. Fique entretanto claro que todo o resultado respeitante àquelas métricas tem um análogo para as invariantes à direita.

Voltando à teoria das variedades semi-Riemannianas encontramos aí o seguinte "Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana": Sobre uma variedade M com estrutura semi-Riemanniana $< \, , \, >$ existe uma e uma só conexão em TM de torsão nula e métrica paralela.

Estas duas últimas condições relativas à conexão ∇ traduzem-se, como se sabe, para todos os campos vectoriais[2] diferenciáveis x, y, z sobre M, por

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y],$$

e por a métrica ser um campo tensorial paralelo do fibrado $\odot^2 TM$,

$$x <y, z> = <\nabla_x y, z> + <y, \nabla_x y> .$$

Chama-se *conexão de Levi-Civita* a ∇. Esta é dada pela *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2 < \nabla_x y, z> &= x <y, z> + y <z, x> - z <x, y> \\ &\quad + <[x, y], z> - <[y, z], x> + <[z, x], y> . \end{aligned}$$

Lembremos que o campo tensorial curvatura de uma conexão é dado por

$$R(x, y)z = -\nabla_x \nabla_y z + \nabla_y \nabla_x z + \nabla_{[x,y]} z. \tag{1.2}$$

Devido às igualdades

$$R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$$

[2] a partir de aqui, denotamo-los por letras minúsculas.

$$<R(x,y)z,w> = -<R(x,y)w,z> = -<R(y,x)z,w>$$
$$<R(x,y)z,w> = <R(z,w)x,y>$$

(só a última depende das anteriores) que este tensor satisfaz (cf.[BO]), tem-se que $<R(x,y)x,y> = <R(y,x)y,x>$. À função real $\kappa(x,y) = <R(x,y)x,y>$ damos o nome de *função curvatura* (κ é um tensor homogéneo de grau 4). κ é simétrica pelas igualdades acima.

Quando P é um plano não degenerado de T_mM, $m \in M$, isto é, quando a restrição da métrica a um plano P gerado por vectores u, v é não degenerada, então $<u,u><v,v> - <u,v>^2 \neq 0$. Podemos falar em planos *tipo espaço* ou *tipo tempo* se aquele valor é, respectivamente, >0 ou <0 (cf.[BEE]). Define-se então a função *curvatura seccional*, em cada ponto de $m \in M$ e sobre os planos não degenerados de T_mM dada por

$$K(P) = K(u,v) = \frac{<R(u,v)u,v>}{<u,u><v,v> - <u,v>^2} \tag{1.3}$$

e de domínio o conjunto de todos estes planos. Facilmente se vê que K é independente dos geradores u e v de M e diferenciável se aplicada a dois campos vectoriais diferenciáveis 'não degenerados'. Dizemos que M tem *curvatura seccional constante* ou *curvatura constante* quando K é constante.

Tenha-se em conta o seguinte facto que nos ajudará a andar mais depressa. Existem referenciais locais ortonormados em M. Dado $m \in M$ e uma base ortonormada de T_mM, a translacção paralela, sendo uma isometria numa vizinhança de m por $\nabla < \, , \, > = 0$, permite-nos construir o referencial desejado.

Temos agora, o *tensor curvatura de Ricci* de M que é a contracção de $<R(x,z)y,w>$ em z e w. Explícitamente, dados quaisquer campos vectoriais x, y e um referencial $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ num aberto de M, tem-se

$$Ric(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} <R(x,u_i)y,u_j>$$

onde g^{ij} é tal que $\sum_j g^{ij} <u_j,u_k> = \delta_{ik}$. *Ric* é simétrico já que $g^{ij} = g^{ji}$ e $<R(x,y)z,w> = <R(z,w)x,y>$. Relativamente a um referencial ortonormado $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, pondo $\epsilon_i = <e_i,e_i>$, vem

$$Ric(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i <R(x,e_i)y,e_i>, \tag{1.4}$$

o que nos mostra a fórmula $Ric(x,y) = \mathrm{tr}\,(\cdot \mapsto R(x,\cdot)y)$. Uma variedade semi-Riemanniana (M,g) diz-se de *Einstein* se existe uma constante λ tal que $Ric = \lambda g$. Ao tensor homogéneo de grau 2 $r(x) = Ric(x,x)$ damos o nome de *curvatura* *de Ricci.* Se x for não nulo, prolongando-o um referencial $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ tal que $x = u_1$ e $(u_i)_{2\leq i\leq n}$ é ortonormado e ortogonal a x, vê-se que

$$r(x) = <x, x> \sum_{i=2}^{n} K(x, u_i). \tag{1.5}$$

Para finalizar, à contracção do tensor curvatura de Ricci, dada já num referencial ortonormado $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ por

$$S = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i r(e_i) = \sum_{i\neq j} K(e_i, e_j) = 2\sum_{i<j} K(e_i, e_j), \tag{1.6}$$

onde $<e_i, e_i> = \epsilon_i$, chamamos *curvatura escalar.* Note-se desde já que K constante implica S constante, mas não r constante sobre os vectores unitários, a menos que $K = 0$ ou a métrica seja Riemanniana.

Observe-se tambem que uma variedade de dimensão 1 tem curvatura nula e que, numa variedade de dimensão 2, $Ric(x, y) = \frac{1}{2} S\, g(x, y)$ como é fácil provar pelas contas. Assim, uma superfície é de Einstein sse tem curvatura seccional ou escalar constante. Prova-se generalizando fácilmente [KN,I,proposição 2,p.293], que uma variedade de dimensão 3 é de Einstein sse tem curvatura seccional constante.

Observação. Alguns manuais, como [KN] ou [BEE], definem curvatura como sendo $-R$ e, depois, curvatura seccional como a nossa expressão $-K$, curvatura de Ricci como a nossa expressão $-Ric$ e assim por diante. Ora, como $--$ dá $+$, as definições de K, Ric, r e S coincidem com as nossas, já que todas envolvem R uma vez só.

Apresentadas as matérias sobre as quais nos vamos debruçar quando as aplicarmos aos grupos de Lie, não nos esqueçamos que estão ainda associadas à conexão de Levi-Civita, como a qualquer conexão, as curvas geodésicas, a aplicação exponencial, as noções de variedade completa, conexão induzida numa subvariedade e subvariedade totalmente geodésica. As nossas referências são [BO], [KN] ou [W]. De futuro, teremos ainda necessidade da noção de *subvariedade semi-Riemanniana.*

Por subvariedade N de uma variedade M entendemos um subespaço topológico N de M, variedade e com inclusão ι de N em M (diferenciável) tal que $d\iota$ é injectiva. Dizemos então que N é uma *subvariedade semi-Riemanniana* de (M, g) se a restrição de g a T_mN é não degenerada qualquer que seja $m \in N$. Por unicidade, a conexão de Levi-Civita de N coincide com a induzida da de M.

Relembremos tambem que uma *transformação afim* é uma aplicação diferenciável f entre variedades diferenciáveis munidas de conexões lineares, tal que df aplica campos vectoriais paralelos ao longo de uma curva σ em campos vectoriais paralelos ao longo da curva $f \circ \sigma$. As transformações afins aplicam geodésicas em geodésicas logo verificam $f \circ \exp = \exp \circ df$. Como exemplo, temos as isometrias entre variedades semi-Riemannianas (cf.[BO] ou generalize-se este resultado de [KN,I,p.161] no caso Riemanniano ao caso semi-Riemanniano).

Apresentamos agora uma lista dos resultados gerais que conhecemos sobre curvatura seccional no quadro geral das variedades semi-Riemannianas. Muitos destes resultados não chegarão a ser aplicados aos grupos de Lie semi-Riemannianos. Fica aqui, no entanto, uma enumeração que pode apoiar novos estudos. A seguir a cada resultado vem uma referência bibliográfica da demostração.

- Se $K = 0$ em $m \in M$ então $R = 0$ em m ([BO]).
- Se $F : T_mM^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica $F(x,y,u,v) = -F(y,x,u,v) = F(u,v,x,y)$; $F(x,y,z,u) + F(y,z,x,u) + F(z,x,y,u) = 0$; $K(u,v) = F(u,v,u,v)/(< u,u >< v,v > - < u,v >^2)$, então $< R(x,y)u, v >= F(x,y,u,v)$, $\forall x,y,u,v \in T_mM$ ([BO]).
- Se a curvatura seccional K é constante num ponto m de M, $K_m = k$, então $R(x,y)z = k(<z,x> y - <z,y> x)$ em m. Em particular, $K = 0$ implica $R = 0$ ([BO]).
- Seja (M,g) uma variedade conexa de dimensão $n \geq 3$. Se $\forall m \in M, \exists \lambda_m$ real tal que $Ric = \lambda g$ sobre M, então λ é constante e, por isso, M é uma variedade de Einstein ([Besse], ex.cio de [BO]).
- (F.Schur) Se M é conexa, tem dimensão $n \geq 3$ e K_m é constante, $\forall m \in M$, então M tem curvatura seccional constante ([W], mais fácil por ex.cio de [BO]).
- (Hadamard) Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional $K \leq 0$. Então, para cada $m \in M$, a aplicação exponencial $\exp_m : T_mM \longrightarrow M$ é um difeomorfismo ([BO]).
- (Myers) Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n, completa e conexa tal que, para uma certa constante $c > o$, a curvatura de Ricci $r \geq c(n-1) > 0$. Então M é compacta, $\pi_1(M)$ é finito e o supremo das distâncias Riemannianas[3], o *diâmetro* de M, é $\leq \pi/\sqrt{c}$ ([BO]).
- (R.S.Kulkarni,1979) Seja M conexa, de dimensão $n \geq 3$ e métrica indefinida. Se a curvatura seccional é limitada superiormente ou limitada inferiormente, então M tem curvatura constante ([Kul]).

[3] A *distância Riemanniana* é uma distância (!) que a cada dois pontos de uma variedade Riemanniana associa o ínfimo dos comprimentos das curvas (seccionalmente C^∞) que ligam esses dois pontos. O comprimento de uma dessas curvas σ é o somatório dos comprimentos das suas partes C^∞ σ_i. Estes são, por sua vez, $\int \sqrt{<\sigma_i', \sigma_i'>}$. M é então um espaço metrisável com esta distância.

- (L.Graves,K.Nomizu,1978) Seja M de dimensão $n \geq 3$ e métrica indefinida. 1. Se $< R(x,y)z, x >= 0$ para x, y, z ortonormados em T_mM, $m \in M$, então a curvatura seccional é constante em m. 2. Se M satisfaz o axioma dos r-planos ou o axioma das r-esferas (cf.[GraNom]) para algum r, $2 \leq r \leq n-1$, então M tem curvatura constante ([GraNom]).

- (M.Dajczer,K.Nomizu,1980) Seja M de dimensão ≥ 3 e métrica indefinida. 1. Se $<R(x,y)z, x>= 0$ sempre que $\{x, y\}$ é um sistema ortonormado de assinatura $(-,+)$ e ortogonal a z, $x, y, z \in T_mM$, então K é constante em m. 2. Se todos os planos de assinatura $(-,+)$ em T_mM têm a mesma curvatura seccional, então K é constante em m. 3. Se $<R(x,y)y, x>= 0$ sobre todos os planos *degenerados* $\{x, y\}$, então a curvatura seccional é constante em T_mM ([DajNom]).

- (K.Nomizu,1983) Supondo que M de dimensão ≥ 3 e de assinatura $(-,\ldots,+,+,\ldots)$ satisfaz uma das seguintes condições: (i) para cada x positivo em T_mM existe $d \in \mathbb{R}$: $K(P) \geq d$ para todos os planos P não degenerados que contêm x; (ii) para cada x positivo em T_mM, existe $d > 0 : |K(P)| \leq d$ para todos os planos P tipo espaço contendo x. Então M tem curvatura seccional constante em m. Em (i) pode-se substituir $K(P) \geq d$ por $K(P) \leq d$. Em (ii) pode-se substituir todos os planos tipo espaço por todos os planos tipo tempo (contendo x tipo tempo). Há ainda as variantes naturais para a estrutura semi-Riemanniana $(M, -g)$ ([Nom2]).

- (J.Beem,P.Parker,1984) Seja M de dimensão ≥ 4 e métrica indefinida de assinatura $(-,-,\ldots,+,+,\ldots)$. Então a sua curvatura seccional é constante em $m \in M$ sse verifica uma das três condições seguintes: (i) K é limitada em planos de assinatura $(-,+)$; (ii) K é limitada em planos de assinatura $(+,+)$; (iii) K é limitada em planos de assinatura $(-,-)$ ([BeemPar]).

- (W.Killing,H.Hopf,J.Wolf) Classificação das *formas espaciais*, isto é, das variedades semi-Riemannianas conexas completas e de curvatura seccional constante. Apresentamos este resultado no §1.5.2 ([BO] ou [W]).

Aponte-se, como fez R.S.Kulkarni, que quando a métrica é indefinida e $\dim M \geq 3$, considerar que K tem um sinal fixo é o mesmo que considerar K constante. Chamamos ainda a atenção para os estudos sobre as várias curvaturas das subvariedades semi-Riemannianas, em particular as superfícies e as hipersuperfícies (cf.[BO;KN]), das variedades de Einstein (cf.[Besse;BEE]), das variedades de Lorentz e de Riemann, das variedades simétricas e das mais gerais, as homogéneas. Vejamos quem são estas duas últimas.

NOTA SOBRE VARIEDADES HOMOGÉNEAS E VARIEDADES SIMÉTRICAS

1. Uma variedade M diz-se *homogénea* quando possui uma acção diferenciável e transitiva de algum grupo de Lie G. Ser *transitiva* é ter uma só órbita, isto é, $\forall m \in M$, $G(m) = \{g\cdot m : g \in G\} = M$, ou seja, $\forall m_1, m_2 \in M$, $\exists g \in G$: $g\cdot m_1 = m_2$.

Como exemplo, temos a variedade *espaço quociente* S/K onde K é um subgrupo de Lie fechado do grupo de Lie S. S/K tem a estrutura de variedade que faz as projecções $p : S \to S/K$ serem diferenciáveis. Isto é, S/K tem a topologia que faz p ser contínua e, notando $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ as álgebras de Lie de K e S e $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ um sistema de coordenadas de $\mathfrak{s}/\mathfrak{k}$, tem cartas $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ numa vizinhança $\exp(\mathcal{U})gK$ de gK, onde exp é a exponencial de $\mathfrak{s}$ e $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{s}$ tal que $\exp_{|\mathcal{U}}$ é um difeomorfismo, dadas por

$$\varphi_i(\exp(X)gK) = u_i(X + \mathfrak{k}) \qquad (X \in \mathcal{U}).$$

S actua diferenciável e transitivamente sobre S/K $(g\cdot g'K = p(gg')$ e quaisquer dois pontos g_1K e g_2K são 'ligados' pela acção de $g_2g_1^{-1})$ por isso tambem se chama a S/K um *espaço homogéneo.* Note-se que S/K é um espaço quociente no sentido das já por nós conhecidas variedades quociente. De facto, as cartas são construídas da mesma forma e a acção de S é propriamente descontínua.

Seja agora M uma variedade homogénea e G o grupo que sobre ela actua. Dado $m \in M$ define-se $G_m = \{g \in G : g\cdot m = m\}$. Um teorema fundamental das variedades homogéneas garante que elas são todas difeomorfas ao espaço homogéneo G/G_m $(g\cdot m \leftarrow gG_m$, a inversa é dada pelo Teorema da Função Inversa).

Falando só de uma variedade M semi-Riemanniana homogénea referimonos, se não há outra indicação, à acção canónica sobre M do grupo $\mathcal{I}(M)$ das isometrias de M. Deixamos para outra altura a verificação de que $\mathcal{I}(M)$ é um grupo de Lie de dimensão finita e que a sua acção é diferenciável (em [KN,I] encontra-se uma demonstração de que o grupo (!) das transformações afins de uma variedade nela própria tem estrutura de grupo de Lie).

2. Tomemos uma variedade M com uma conexão em TM e, para cada vizinhança normal U de $m \in M$, isto é, U domínio de uma carta normal de M, notemos $\xi : \exp_m(x) \mapsto \exp_m(-x)$ um difeomorfismo de U em U.

M diz-se *localmente simétrica* se para cada $m \in M$ existe um aberto U, vizinhança normal de m, tal que ξ é uma transformação afim (cp.[BO]). Um teorema fundamental de Cartan permite mostrar que M é localmente simétrica sse $T = 0$ e R é paralelo. Ou ainda,[4] sse $\forall\ F : T_mM \to T_{m'}M$ isomorfismo linear $(m, m' \in M)$, tal que

$$F(R_m(x, y)z) = R_{m'}(Fx, Fy)Fz, \qquad (x, y, z \in T_mM),$$

[4] é este resultado que está na base da classificação de todas as formas espaciais.

existe uma transformação afim f de vizinhanças normais tal que $F = df$. M diz-se *simétrica* se todas as funções ξ podem ser prolongadas a transformações afins globais, isto é, definidas em M.

Quando falamos em variedades semi-Riemannianas (localmente) simétricas queremos dizer que elas são (localmente) simétricas para a conexão de Levi-Civita. Neste caso, as transformações afins ξ são (localmente) isometrias, já que $d\xi_m = -\mathrm{Id}_{T_mM}$, como é fácil perceber tomando a carta normal $(U, \exp_m^{-1})$, e que então $d\xi_{m'}$ é uma isometria para todo o ponto m' (cf.[W,corolário 2.3.14]). Repare-se tambem que, aqui, M é localmente simétrica sse $\nabla R = 0$. Assim, usando a fórmula $R(x,y)z = k(<z,x> y - <z,y> x)$, é fácil mostrar que K constante implica M localmente simétrica.

Uma variedade conexa e simétrica é homogénea (fácil demonstrar - ver [KN,II,p.223]).

Retomamos finalmente o estudo dos grupos de Lie munidos de métricas invariantes à esquerda. Podemos considerar a conexão de Levi-Civita visto que eles são variedades semi-Riemannianas. Salvo menção em contrário, esta é então a conexão de que falaremos sempre.

Para campos vectoriais invariantes à esquerda, isto é, elementos de $\mathfrak{g}$, a condição de a métrica ser paralela e a fórmula de Koszul simplificam-se nas fórmulas

$$<\nabla_x y, z> + <y, \nabla_x z> = 0 \tag{1.7}$$

$$<\nabla_x y, z> = \frac{1}{2}(<[x,y],z> - <[y,z],x> + <[z,x],y>), \tag{1.8}$$

donde se conclui que $\nabla_x y \in \mathfrak{g}$, o que apenas está de acordo, por [KN,I,proposição 1.4,p.228], com o facto atrás referido de todas as isometrias serem transformações afins. Mais geralmente, uma conexão sobre um grupo de Lie que verifique

$$L_{g_*}\nabla_x y = \nabla_{L_{g_*}x} L_{g_*}y$$

para todo o $g \in G$ e para todos os campos vectoriais diferenciáveis x, y, ou seja, que faça todos os L_{g_*} serem transformações afins, diz-se *invariante à esquerda*. As conexões invariantes à esquerda induzem aplicações bilineares de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$.

Para finalizar, cabe referir que a curvatura é um tensor invariante à esquerda[5], isto é, $L_g^* R = R$ para todo $g \in G$. De modo equivalente, R aplica $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Conclui-se que $K(x,y)$, $Ric(x,y)$, $r(x)$ e S $(x, y \in \mathfrak{g})$ são funções constantes sobre o grupo de Lie.

---

[5] na teoria das variedades semi-Riemannianas, se $f : M_1 \to M_2$ é uma isometria, então $f^* R_2 = R_1$ e $K^1_m(P) = K^2_{f(m)}(f_* P)$, $\forall P \subset T_m M$ (cf.[W]).

1.3 Generalizações de alguns resultados de [M]

Neste parágrafo mostramos o que (nos) foi possível até agora generalizar dos resultados do artigo de J.Milnor "Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups" (1976, [M]) ao caso dos grupos de Lie munidos de métricas invariantes à esquerda de assinatura qualquer. Mostramos tambem tudo o que conhecemos de carácter geral feito nesta área, de modo que, para não fatigar o leitor, apresentamos apenas as demonstrações de que não nos podemos abster, isto é, aquelas de que não conhecemos referência. Um primeiro 'verdadeiro' lema é o seguinte. Tudo ou quase tudo o que se sabe sobre o caso Riemanniano está em [M]. Convidamos o leitor a 'demonstrá-lo' lendo o belíssimo artigo de J.Milnor.

Seja G um grupo de Lie de dimensão n, com álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$ e fixemos um natural $0 \leq p \leq n$. A cada base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathfrak{g}$ podemos associar $\binom{n}{p}$ métricas invariantes à esquerda de assinatura $(p, n-p)$ sobre G, pois, fixando o subconjunto de (e_i) dos p vectores negativos, há um e um só produto escalar em $\mathfrak{g}$ que faz essa base ser ortonormada. De certeza que as $\binom{n}{p}$ métricas induzidas por estes produtos escalares não são isométricas uma vez que a *causalidade* de um vector v, isto é, o sinal de $<v, v>$ é invariante por isometria.

Duas bases de $\mathfrak{g}$ e duas escolhas de p vectores em cada uma delas definem o mesmo produto escalar sse a matriz de transformação de uma na outra pertence a $O_{p,n-p}$. Esta relação é de equivalência. No caso $p = 0$, o conjunto das bases de $\mathfrak{g}$ identifica-se com GL_n, estando a 'família $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensional de (todas as) métricas invariantes à esquerda distintas' de que J.Milnor fala, em correspondência biunívoca com o espaço quociente GL_n/O_n (cf.[J]). No caso semi-Riemanniano aquela família identifica-se com $\mathcal{X}/O_{p,n-p}$ onde $\mathcal{X}$ é a união disjunta de $\binom{n}{p}$ cópias de GL_n.

Fica ainda por resolver a questão, levantada por G.Jensen em [J], de saber quando é que duas estruturas semi-Riemannianas invariantes à esquerda são isométricas.

1.3.1 Curvatura Seccional

Suponhamos $<\ ,\ >$ um produto escalar em $\mathfrak{g}$. Seja $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ uma base ortonormada. Sejam $(\alpha_{ijk})_{1\leq i,j,k\leq n}$ as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ na base (e_i) , isto é,

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k.$$

Pondo $\epsilon_i = <e_i, e_i>$ $(1 \leq i \leq n)$ temos que $\alpha_{ijk} = \epsilon_k <[e_i, e_j], e_k>$.

Lema 1 (generalização do lema 1.1 de [M]) *Com as constantes de estrutura α_{ijk} a curvatura seccional satisfaz a fórmula, para $i \neq j$,*

$$K(e_i, e_j) = \epsilon_i \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\alpha_{jik}(\alpha_{ikj} - \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{jik} + \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{kji}) - \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kii}\alpha_{kjj} \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}(\alpha_{jik} - \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{ikj} + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kji})(\alpha_{ikj} - \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{kji} + \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{jik}) \right)$$

Demonstração. A conexão de Levi-Civita dada pela fórmula de Koszul (1.8) verifica $\nabla_{e_i} e_j =$

$$= \sum_k \frac{1}{2}(\epsilon_k\, \alpha_{ijk} - \epsilon_i\, \alpha_{jki} + \epsilon_j\, \alpha_{kij})\epsilon_k\, e_k = \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{jki} + \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{kij})e_k,$$

então, lembrando que $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$, vem

$$R(e_i, e_j)e_i = -\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i + \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_i + \nabla_{[e_i,e_j]}\, e_i =$$

$$= \sum_k \left(-\frac{1}{2}(\alpha_{jik} - \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{ikj} + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kji})\, \nabla_{e_i} e_k + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kii}\, \nabla_{e_j} e_k + \alpha_{ijk}\, \nabla_{e_k} e_i \right) =$$

$$= \sum_{k,m} \left(-\frac{1}{4}(\alpha_{jik} - \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{ikj} + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kji})(\alpha_{ikm} - \epsilon_m\epsilon_i\, \alpha_{kmi} + \epsilon_m\epsilon_k\, \alpha_{mik})e_m + \right.$$

$$\epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kii}\frac{1}{2}(\alpha_{jkm} - \epsilon_m\epsilon_j\, \alpha_{kmj} + \epsilon_m\epsilon_k\, \alpha_{mjk})e_m +$$

$$\left. \alpha_{ijk}\frac{1}{2}(\alpha_{kim} - \epsilon_m\epsilon_k\, \alpha_{imk} + \epsilon_m\epsilon_i\, \alpha_{mki})e_m \right).$$

Agora a função curvatura $\kappa(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle =$

$$= \sum_k \left(-\frac{\epsilon_j}{4}(\alpha_{jik} - \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{ikj} + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kji})(\alpha_{ikj} - \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{kji} + \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{jik}) + \right.$$

$$\left. \frac{\epsilon_k\epsilon_i\epsilon_j}{2}\alpha_{kii}(\alpha_{jkj} - \alpha_{kjj}) + \frac{\epsilon_j}{2}\alpha_{ijk}(\alpha_{kij} - \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{ijk} + \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{jki}) \right) =$$

$$= \epsilon_j \sum_k \left(-\frac{1}{4}(\alpha_{jik} - \epsilon_k\epsilon_j\, \alpha_{ikj} + \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kji})(\alpha_{ikj} - \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{kji} + \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{jik}) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\alpha_{jik}(\alpha_{ikj} - \epsilon_j\epsilon_k\, \alpha_{jik} + \epsilon_j\epsilon_i\, \alpha_{kji}) - \epsilon_k\epsilon_i\, \alpha_{kii}\alpha_{kjj} \right),$$

donde se conclui o resultado.

Lema 2 (generalização do lema 1.2 de [M]) *Se a transformação* ad(e_i) *é anti-autoadjunta então*

$$K(e_i, e_j) = \frac{\epsilon_i \epsilon_j}{4} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \, \alpha_{kji}^2.$$

Se e_i *é ortogonal a* $[e_j, \mathfrak{g}]$ *então* $K(e_i, e_j) = 0$. *No caso de a métrica ser Riemanniana,* $K(e_i, e_j) = 0$ *sse* $e_i \perp [e_j, \mathfrak{g}]$.

Demonstração. Se ad(e_i) é anti-autoadjunta, então (só para o i) $<[e_i, e_j], e_k> = - <[e_i, e_k], e_j>$, ou seja, $\alpha_{ijk} = -\epsilon_j \epsilon_k \, \alpha_{ikj}$ donde $\alpha_{kii} = -\alpha_{iki} = \epsilon_i \epsilon_k \, \alpha_{iik} = 0$. Agora

$$K(e_i, e_j) = \epsilon_i \sum_k \left(\frac{1}{2} \alpha_{jik} (\alpha_{ikj} - \alpha_{ikj} + \epsilon_j \epsilon_i \, \alpha_{kji}) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} (\alpha_{jik} + \alpha_{ijk} + \epsilon_k \epsilon_i \, \alpha_{kji})(\alpha_{ikj} - \epsilon_j \epsilon_i \, \alpha_{kji} + \alpha_{ikj}) \right) =$$
$$= \epsilon_i \sum_k \left(\frac{1}{2} \alpha_{jik} \, \epsilon_j \epsilon_i \, \alpha_{kji} - \frac{1}{4} \epsilon_k \epsilon_i \, \alpha_{kji} (2\alpha_{ikj} - \epsilon_j \epsilon_i \, \alpha_{kji}) \right) =$$
$$= \epsilon_i \sum_k \left(\frac{1}{4} \epsilon_k \epsilon_j \, \alpha_{kji}^2 - \frac{1}{2} \epsilon_k \epsilon_i \, \alpha_{kji} \alpha_{ikj} + \frac{1}{2} \epsilon_j \epsilon_i \, \alpha_{kji} \alpha_{jik} \right)$$

donde se deduz a fórmula do lema.

Se $e_i \perp [e_j, \mathfrak{g}]$, então $\alpha_{kji} = \epsilon_i <[e_k, e_j], e_i> = 0$.

Corolário 3 (corolário 1.3 de [M]) *Se a métrica é Riemanniana e se* $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, *então*

$$K(u, v) \geq 0$$

para todo o $v \in \mathfrak{g}$.

Dentro do contexto da procura de planos em $\mathfrak{g}$ com curvatura seccional positiva temos que referir o seguinte.

Proposição 4 (corolário 1.4 de [M]) *Todo o grupo de Lie compacto admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda tal que* $K \geq 0$.

Pelo que veremos no Capítulo 3 com grupos de Lie de um "exemplo especial", assim chamado por J.Milnor, podemos já afirmar que não é válido, no caso da métrica indefinida, o Teorema de Wallach.

Teorema 5 (N.Wallach,1972) *O único grupo de Lie simplesmente conexo que admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda de curvatura seccional estrictamente positiva é* SU_2.

Para a demonstração ver [Wal].

Se um grupo de Lie é comutativo, todas as constantes de estrutura α_{ijk} são nulas já que $\mathfrak{g}$ é abeliana. Então $K = 0$ pois $\nabla = 0$ sobre os campos vectoriais invariantes à esquerda.

Sempre que $K = 0$, dizemos que G tem *estrutura semi-Riemanniana plana* ou, mais simplesmente, que G ou a sua métrica são *planos.*

Teorema 6 (generalização do Teorema 1.5 de [M]) *Se num grupo de Lie G munido de uma métrica invariante à esquerda a álgebra de Lie associada é soma directa ortogonal*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$$

de um ideal comutativo $\mathfrak{u}$ e de uma subálgebra comutativa $\mathfrak{b}$ tais que $\mathrm{ad}\,(b)$ *é anti-autoadjunta, para todo o $b \in \mathfrak{b}$, então G é plano.*

Se a métrica for Riemanniana e G for plano, necessáriamente $\mathfrak{g}$ satisfaz aquela condição.

Demonstração. Sejam $b, b', b'' \in \mathfrak{b}$, $u, v, w \in \mathfrak{u}$ quaisquer. Pela fórmula de Koszul (1.8),

$$<\nabla_b b', b''>= 0, \qquad <\nabla_u v, w>= 0,$$

$$<\nabla_b u, b'>= \frac{1}{2}\,(<[b,u], b'> - <[u,b'], b> + <[b',b], u>) = 0,$$

$$<\nabla_b u, v>= \frac{1}{2}\,(<[b,u], v> + <[v,b], u>) =<[b,u], v>,$$

$$\nabla_u b = \nabla_b u + [u,b] = [b,u] + [u,b] = 0,$$

$$<\nabla_u v, b>= \frac{1}{2}\,(- <[v,b], u> + <[b,u], v>) = 0.$$

Daqui se tira

$$\nabla_u = 0 \qquad \nabla_b = \mathrm{ad}\,(b).$$

Então, fazendo contas separadas para os diversos casos, conclui-se que $R = 0$ e, logo, $K = 0$. Para o recíproco, com métrica Riemanniana, veja-se [M] (há uma demonstração de J.Hano do caso em que o grupo de Lie é resolúvel[6] que é puramente algébrica — pelo que se viu, $\mathfrak{g}$ é 'mais que' resolúvel e mesmo 'mais que' meta-abeliana).

Observação. Se G admite uma métrica Riemanniana plana, então admite métricas semi-Riemannianas lisas de índice qualquer entre 0 e a dimensão da subálgebra $\mathfrak{b}$ que o Teorema fornece. Basta trocar vectores positivos de uma

[6] chamamos *resolúveis* àquelas álgebras de Lie para as quais a sucessão $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{g}'' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \supseteq \mathfrak{g}''' = [\mathfrak{g}'', \mathfrak{g}''] \supseteq \ldots$ tem um fim e este é o ideal 0. Uma álgebra de Lie diz-se *meta-abeliana* se $\mathfrak{g}'' = 0$, ou seja, se $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ é abeliana.

base ortonormada de $\mathfrak{b}$ para negativos pois, como é fácil perceber, todos os operadores $\mathrm{ad}\,(b)$ $(b \in \mathfrak{b})$ continuam a ser anti-autoadjuntos.

Novamente, o "exemplo Especial" do Capítulo 3 dar-nos-á uma prova de que o recíproco deste Teorema 6 não é válido no caso da métrica indefinida.

Em [M] afirma-se que o grupo de Lie $E(2)$ fica nas condições do Teorema 6 com uma métrica Riemanniana, plana, portanto. K.Nomizu, em [Nom], construiu métricas Lorentzianas planas nos grupos de Lie $E(2)$, $E(1,1)$ e no *grupo de Heisenberg* H_1. É fácil ver que $E(2)$ e $E(1,1)$, com essas e só essas métricas, e $\mathbb{R}^3$, com qualquer, ficam nas condições do Teorema 6 e que nenhum outro grupo de Lie de dimensão 3, com álgebra de Lie não isomorfa às de estes três, aceita uma métrica que o deixe nas condições do mesmo Teorema. Ainda assim, a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg decompõe-se numa soma directa de uma subálgebra e de um ideal abelianos. Com a métrica Lorentziana plana de K.Nomizu este grupo de Lie é mais um contra-exemplo para o recíproco do Teorema 6. (Questão: Que outros H_p $(p > 1)$ admitem métricas planas ? H_p é o grupo das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_p & c \\ & 1 & & & & b_p \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & 1 & b_1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$a_i,\ b_i,\ c \in \mathbb{R}$. A álgebra de Lie de H_p é $\mathfrak{h}_p = H_p - I$).

Vejamos outro resultado que fornece métricas Lorentzianas planas em grupos de Lie e que talvez se possa generalizar a grupos com uma estrutura parecida e a métricas de outros índices.

Proposição 7 (Graciela S.Birman,1993) *Seja G um grupo de Lie não comutativo e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Suponhamos que existem um ideal $\mathfrak{u}$ e uma subálgebra $\mathfrak{b}$ comutativos tais que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}.$$

Suponhamos ainda que $\mathfrak{b}$ tem dimensão 1 ou 2 e que existem bases (y_1) ou (y_1, y_2) de $\mathfrak{b}$ e $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ de $\mathfrak{u}$ tais que $[y_l, x_i] \in \{x_{\sigma(i)}, 0\}$ onde σ é uma permutação involutiva de $\{1, \ldots, n-2\}$ $(l = 1, 2)$. Então G admite uma métrica Lorentziana invariante à esquerda e plana.

O grupo de Lie da proposição 7, com a métrica indicada na demonstração, não fica nas condições do Teorema 6 nem fazendo outra decomposição $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ (cf.[Bir]). O próximo resultado é consequência desse Teorema.

Proposição 8 *Supondo G um grupo de Lie tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$, com $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{u}$, respectivamente, subálgebra e ideal comutativos, e supondo que existem bases $(y_1, \ldots, y_l)$ de $\mathfrak{b}$, $(x_1, \ldots, x_{n-l})$ de $\mathfrak{u}$ e uma involução σ de $\{1, \ldots, n-l\}$ tal que $\sigma(i) \neq i$ e $[y_j, x_i] = x_{\sigma(i)}$, para todo o j. Então G admite métricas invariantes à esquerda planas de índices q tais que $\frac{n-l}{2} \leq q \leq \frac{n+l}{2}$.*

Demonstração. $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ e $\sigma(i) \neq i$ implicam que $\mathfrak{u}$ tem dimensão par. Para todo o $j = 1, \ldots, l$, $\mathrm{ad}\, y_j$ aplica metade dos $(x_1, \ldots, x_{n-l})$ na outra metade e inversamente. Podemos então supôr que os $\frac{n-l}{2}$ primeiros x_i são aplicados nos $\frac{n-l}{2}$ últimos. Considere-se sobre G a métrica induzida pelo seguinte produto escalar em $\mathfrak{g}$.

$$<\mathfrak{b}, \mathfrak{u}>= 0, \qquad < , > \text{ definida positiva sobre } \mathfrak{b},$$

$$<x_i, x_j>= \delta_{ij} \ \text{ se } i \leq \frac{n-l}{2}, \qquad <x_i, x_j>= -\delta_{ij} \ \text{ se } i > \frac{n-l}{2}.$$

Temos então que $<x_i, x_j>= - <x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}>$ e

$$<[y_k, x_i], x_j>=<x_{\sigma(i)}, x_j>= - <x_i, x_{\sigma(j)}>= - <x_i, [y_k, x_j]>$$

para todo o $k = 1, \ldots, l$, $i, j > l$. G está nas condições do Teorema 6. As métricas planas de assinatura maior constroiem-se com ajuda da observação que sucede ao Teorema 6.

Quando a métrica é plana ($K = 0$) tem-se que a curvatura é tambem nula (cf.§1.2). A fórmula (1.2) desta mostra-nos então que ∇ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ ($x \mapsto \nabla_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). O núcleo desta representação é um ideal, abeliano por a conexão ter torsão nula. Tudo o que temos vindo a dizer sobre métricas planas invariantes à esquerda desde antes do Teorema 6 até este último facto, bem como o importante Teorema 9 já a seguir, obrigam-nos a fazer a Conjectura: *Se um grupo de Lie admite uma métrica invariante à esquerda plana, então a sua álgebra de Lie decompõe-se como soma directa*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$$

de uma subálgebra de Lie e de um ideal comutativos.

Põe-se entretanto a seguinte questão. A que condições devem as aplicações $\mathrm{ad}\, b$ ($b \in \mathfrak{b}$) obedecer e qual a posição de ortogonalidade entre $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{u}$ para que uma métrica sobre um grupo de Lie de álgebra de Lie associada $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ seja plana ?

Teorema 9 (H.Matsushima e K.Okamoto,1978) *Seja G um grupo de Lie semisimples. Então G não admite conexões invariantes à esquerda, de torsão nula e planas ($R = 0$).*

Para a demonstração, meia página de revista que se aconselha vivamente, veja-se [MatsOka]. Só para o caso em que a dimensão de G é 3 veja-se [Nom,nota 1,p.149]. Por curiosidade anotamos tambem que Y.Matsushima já conhecia este Teorema por volta de 1968.

Devemos ainda dizer o seguinte. Num grupo de Lie com conexão invariante à esquerda de torsão nula e plana não existem subgrupos semisimples totalmente geodésicos. Vamos demonstrá-lo supondo que existiam e chegando a um absurdo. Seja G o grupo de Lie e S um seu subgrupo semisimples totalmente geodésico. Sejam ∇ a conexão de G e $\overline{\nabla}$ a conexão induzida por ∇ sobre S. Por [KN,II,p.58] ficamos a saber que $\overline{\nabla}_x\, y = \nabla_x\, y$, em todo o ponto de S e para todos os campos vectoriais diferenciáveis x, y sobre S. Pela mesma igualdade imediatamente se vê que $\overline{\nabla}$ tambem é invariante à esquerda. Se a torsão e curvatura de ∇ são nulas, então tambem as de $\overline{\nabla}$ o são, o que deixa S nas condições do Teorema anterior, criando um absurdo.

Particularmente, no caso da conexão de Levi-Civita ou conexão semi-Riemanniana sobre um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda plana, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo não pode ter subálgebras de Levi $\mathfrak{s}$ não nulas e ortogonais ao radical $\mathfrak{q}$. Para $x, y \in \mathfrak{s}$ e $z \in \mathfrak{q}$ a fórmula de Koszul (1.8) daria

$$<\nabla_x\, y, z>= \frac{1}{2}(<[x,y],z> - <[y,z],x> + <[z,x],y>) = 0,$$

já que $[y,z], [z,x] \in \mathfrak{q}$ (cf.[V,p.224] ou §1.6), e de $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{s}$ viria $\nabla_x\, y \in \mathfrak{s}$ fazendo do subgrupo de Lie semisimples associado a $\mathfrak{s}$ uma subvariedade totalmente geodésica (cf.[KN,II,p.55 e 57] ou [BO]).

Atente-se nomeadamente ao caso mais simples destes, o dos grupos de Lie com álgebra de Lie reductiva tal que $\mathcal{D}\mathfrak{g} \perp \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Analisemos finalmente o caso em que a curvatura seccional é negativa. Novamente, a desproporção de resultados entre a métrica definida e o da indefinida é assustadora.

Estudemos primeiro o caso da métrica definida (positiva). Kobayashi mostrou (1962,cf.[Hei]) que uma variedade Riemanniana, homogénea e conexa de curvatura seccional negativa é simplesmente conexa. Logo, pelo Teorema de Hadamard (cf.§1.2, 1.5.2 para ver que é completa) ela é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. E.Heintze mostrou posteriormente que tais variedades podem ser representadas por grupos de Lie resolúveis e conexos com métrica Riemanniana invariante à esquerda. A seguir, estudou estes grupos de Lie e obteve o nosso próximo Teorema.

Teorema 10 (E.Heintze,1974) *Seja G um grupo de Lie conexo com métrica Riemanniana invariante à esquerda de curvatura seccional K.*

(i) Tem-se $K < 0$ sse $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g} + \mathbb{R}x_0$, para $x_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathcal{D}\mathfrak{g}$ tal que todos os valores próprios de $\mathrm{ad}\,(x_0)_{|\mathcal{D}\mathfrak{g}}$ têm parte real positiva.

(ii) K é constante negativa sse $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ é abeliana e $\mathrm{ad}\,(x_0)_{|\mathcal{D}\mathfrak{g}} = \lambda\,\mathrm{Id} + A$, com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e A anti-autoadjunto relativamente ao produto interno de $\mathfrak{g}$.

Para a demonstração da parte (i) veja-se [H]. A parte (ii) do Teorema foi nos comunicada em privado. E.Heintze caracterizou ainda e quase completamente os grupos de Lie localmente simétricos com métrica Riemanniana invariante à esquerda e de curvatura seccional negativa. Os grupos de Lie que admitem métricas Riemannianas com $K \leq 0$ foram classificados por R.Azencott e E.Wilson (cf.[M]). São todos resolúveis.

Dizemos que um grupo de Lie conexo é *unimodular* se a sua álgebra de Lie for *unimodular*, isto é, se $\operatorname{tr} \operatorname{ad} x = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ (cf.§1.5.1). J.Milnor mostrou que se $K \leq 0$ e G é conexo e unimodular, então $K = 0$. Vejamos agora um caso de métrica indefinida que havemos, noutro trabalho, de generalizar a outras assinaturas.

Teorema 11 (F.Barnet,1989) *Seja G um grupo de Lie que admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda de curvatura seccional constante negativa. Então*

(i) G admite uma métrica Lorentziana invariante à esquerda de curvatura seccional constante positiva.

(ii) G admite uma métrica Lorentziana invariante à esquerda de curvatura seccional constante negativa, ou nula, sse $\mathfrak{g}$ contem um ideal unidimensional.

Para a demonstração ver [Bar]. Note-se que, pelo Teorema 10, a parte (ii) deste último Teorema só vem corroborar a nossa Conjectura sobre métricas planas (ver página 20).

1.3.2 Curvatura de Ricci

Podemos dizer, adaptando uma frase de J.Milnor, que a curvatura de Ricci de uma direcção u num espaço tangente a uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n num ponto qualquer, é $(n-1) <u,u>$ vezes a média das curvaturas seccionais de todos os planos tangentes que contêm u.

Seja $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma base ortonormada de um desses planos tangentes. Chamamos *Transformação de Ricci* $\hat{r}$ à aplicação definida, em cada espaço tangente, por

$$\hat{r}(x) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \, R(e_i, x)e_i.$$

onde $\epsilon_i = < e_i, e_i >$. A igualdade $< R(x,y)v, w > = < R(v,w)x, y >$ implica $<\hat{r}(x), y> = <x, \hat{r}(y)>$, isto é, $\hat{r}$ é autoadjunta. Estando $\hat{r}$ relacionada com r por $r(x) = <\hat{r}(x), x>$, torna-se importante o estudo das *curvaturas de Ricci principais* que são os valores próprios de $\hat{r}$.

Deixamos esta matéria para outra altura e concentramo-nos apenas na curvatura de Ricci r de um grupo de Lie. O caso Riemanniano é sempre o mais profícuo e é por ele que começamos. Em [M] encontramos um resultado que sai directamente do lema 2. Se a métrica é Riemanniana e se $\mathrm{ad}\, u$ é anti-autoadjunta, então $r(u) \geq 0$, dando-se a igualdade sse $u \perp \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Este resultado num sentido e o Teorema de Myers no outro (cf.§1.2, p.11, e lembrar que $L_g^* Ric = Ric$ para todo o $g \in G$) permitem provar a seguinte equivalência.

Teorema 12 (Teorema 2.2 de [M]) *Um grupo de Lie conexo G admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda com curvatura de Ricci $r > 0$ sse G é compacto e tem grupo fundamental finito. Neste caso, G admite uma métrica bi-invariante com $r > 0$ constante.*

Compare-se este resultado com o que se diz a seguir à proposição 5 do §1.4. O próximo Teorema veio responder à questão de saber quais os grupos de Lie com $r \geq 0$. J.Milnor viu que grupos conexos com $r \geq 0$ têm de ser unimodulares e que são resolúveis sse $K = 0$.

Teorema 13 (B.Bergery,1978) *Seja G um grupo de Lie conexo. As três proposições seguintes são equivalentes.*
(i) G admite métrica Riemanniana invariante à esquerda com $K \geq 0$;
(ii) G admite métrica Riemanniana invariante à esquerda com $r \geq 0$;
(iii) G é produto semi-directo de um subgrupo normal admitindo uma métrica Riemanniana invariante à esquerda com curvatura seccional nula e de um subgrupo semisimples que actua sobre o precedente por isometrias para a métrica plana.

(cf.§1.6 sobre produtos semi-directos de grupos de Lie). Para a demonstração veja-se [Ber]. Compare-se com o Teorema de J.Cheeger e D.Gromoll, do qual este é quase uma aplicação, e que diz assim. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa e completa com $r \geq 0$. Então (M, g) é um produto 'Riemanniano' $(\overline{M} \times \mathbb{R}^q, \overline{g} \times b)$ onde b é a métrica canónica (plana) de $\mathbb{R}^q$ e $(\overline{M}, \overline{g})$ é uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci $r \geq 0$ e sem qualquer *linha* – uma linha é uma geodésica definida em $\mathbb{R}$ que torna mínima a distância Riemanniana entre quaisquer dois dos seus pontos ([Besse]-demonstração difícil).

D.V.Alekseevskii e B.N.Kimelfeld demonstraram em 1975 que numa variedade Riemanniana homogénea $K = 0$ sse $r = 0$. Este resultado, no caso em que a variedade é um grupo de Lie conexo e resolúvel, foi publicado em 1957 por J.Hano (cf.[J], em [Besse] este facto parece ser desconhecido, cp.Teorema 22). Este resultado, por sua vez, permite mostrar a próxima proposição (cf.[Besse]), que o contem como caso particular.

Proposição 14 (Doti-Miatello,1982) *Um grupo de Lie conexo, unimodular e resolúvel com uma métrica Riemanniana invariante à esquerda de Einstein é plano.*

Note-se mais uma vez que esta proposição só é original na demonstração e no caso em que $r < 0$.

Damos agora uns passinhos nos grupos de Lie com métrica indefinida. A demonstração do próximo lema virá no §1.6.

Lema 15 (generalização do lema 2.3 de [M]) *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e* $\mathfrak{g}$ *a sua álgebra de Lie. Seja* $b \in \mathfrak{g}$ *um vector unitário ortogonal a* $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ *e suponha-se que* $\mathfrak{g}$ *satisfaz a condição seguinte.*

$$(\clubsuit) \qquad \textit{Se } <x,x>= 0 \ (x \neq 0), \ \textit{então } <[b,x],x>\neq 0.$$

Então $r(b) \leq 0$*, com igualdade sse* $\mathrm{ad}(b)$ *é anti-autoadjunto.*

Claro que a condição ♣ é automática quando a métrica é Riemanniana, o que permite provar o que se segue.

Teorema 16 (Teorema 2.4 de [M]) *Suponhamos G nilpotente e não abeliano. Para qualquer métrica Riemanniana invariante à esquerda, existem* $x, y \in \mathfrak{g}$ *tais que* $r(x) > 0$ *e* $r(y) < 0$.

De natureza diferente e tambem válido para as álgebras de Lie nilpotentes não comutativas (cf. Capítulo 3) temos o seguinte Teorema.

Teorema 17 (generalização do Teorema 2.5 de [M]) *Se a álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de um grupo de Lie G contem vectores* x, y, z *linearmente independentes tais que*

$$[x, y] = z,$$

então, para qualquer $0 \leq p \leq n$*, existe uma métrica invariante à esquerda sobre G de assinatura* $(p, n-p)$ *tal que* $r(x) < 0$ *e* $r(z) > 0$.

Demonstração. Basta definir um produto escalar em $\mathfrak{g}$. Fixemos uma base $(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathfrak{g}$ tal que $b_1 = x,\ b_2 = y,\ b_3 = z$. Sejam α_{ijk} as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ nesta base. Vamos 'deformar de modo contínuo' a estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para obter outra mais simples. Chamemos $(e_1, \ldots, e_n)$ à base $(b_1, \ldots, b_n)$, mas enquanto geradora de umas novas álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\delta$ a definir. Consideremos um produto escalar de índice $0 \leq p \leq n$ qualquer que faz a base $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormada e, na notação usual, $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_3 = 1$ (esta condição não é restritiva dos valores de p). Sejam agora $\mathfrak{g}_\delta$, $\delta > 0$, as álgebras de Lie com suporte o espaço vectorial $\mathfrak{g}$ e tais que as constantes de estrutura, na base $(e_1, \ldots, e_n)$, são as mesmas que as constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ na base $(\delta b_1, \delta b_2, \delta^2 b_3, \ldots, \delta^2 b_n)$. Queremos dizer que, notando $g(e_1) = \delta b_1$, $g(e_2) = \delta b_2$, $g(e_i) = \delta^2 b_i$, para $i \geq 3$, e $[\ ,\ ]_\delta$ a estrutura de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}_\delta$, se tem $g[e_i, e_j]_\delta = [g(e_i), g(e_j)]$, onde entendemos já g como o isomorfismo $\mathbb{R}$-linear de $\mathfrak{g}$ definido pelas igualdades acima. Explícitamente temos

$$[e_1, e_2]_\delta = g^{-1}[\delta b_1, \delta b_2] = g^{-1}\delta^2 b_3 = e_3.$$

Se $i = 1, 2$ e $j \geq 3$,

$$[e_i, e_j]_\delta = g^{-1}[\delta b_i, \delta^2 b_j] = g^{-1}\left(\sum_k \delta^3 \alpha_{ijk} b_k\right) =$$

$$= g^{-1}\left(\delta^2 \alpha_{ij1} \delta b_1 + \delta^2 \alpha_{ij2} \delta b_2 + \delta \sum_{k\geq 3} \alpha_{ijk} \delta^2 b_k\right) = \delta^2 \alpha_{ij1} e_1 + \delta^2 \alpha_{ij2} e_2 + \delta \sum_{k\geq 3} \alpha_{ijk} e_k.$$

Se $i, j \geq 3$,

$$[e_i, e_j]_\delta = \delta^4 g^{-1}\left(\sum_k \alpha_{ijk} b_k\right) = \delta^3 \alpha_{ij1} e_1 + \delta^3 \alpha_{ij2} e_2 + \delta^2 \sum_{k\geq 3} \alpha_{ijk} e_k.$$

g é um isomorfismo de álgebras de Lie e por estas últimas igualdades se vê que as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}_\delta$ variam continuamente com δ. Pelo lema 1 se compreende logo que a curvatura de Ricci é contínua (repare-se que o produto escalar está fixo). A álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$, a única não necessáriamente isomorfa às outras todas, é muito simples.

$$[e_1, e_2]_0 = e_3, \qquad \mathrm{ad}_0\,(e_i) = 0, \ \forall i \geq 3.$$

As constantes de estrutura são $\beta_{123} = -\beta_{213} = 1$ e $\beta_{ijk} = 0$ nos restantes casos. Usando os lemas 1 e 2, os cálculos mostram

$$K_0(e_3, e_1) = K_0(e_3, e_2) = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\frac{1}{4},$$

$$K_0(e_1, e_2) = -\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\frac{3}{4}, \qquad K_0(e_i, e_j) = 0, \ \text{ para } \{i, j\} \not\subset \{1, 2, 3\}.$$

Agora

$$r_0(e_1) = \epsilon_1\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -\epsilon_2\epsilon_3\frac{1}{2},$$

$$r_0(e_3) = \epsilon_3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = \epsilon_1\epsilon_2\frac{1}{2}.$$

Como $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_3 = 1$, $r_0(e_1) < 0 < r_0(e_3)$ e por continuidade tem-se que existe $\delta > 0$ tal que $r_\delta(e_1) < 0 < r_\delta(e_3)$. Como $\mathfrak{g}_\delta$ é isomorfa a $\mathfrak{g}$, ou melhor, como $\mathfrak{g}_\delta = \mathfrak{g}$, já que toda a construção acima é apenas uma mudança de base, tambem $r(e_1) < 0 < r(e_3)$.

1.3.3 Curvatura Escalar

Recordemos que a curvatura escalar de um grupo de Lie G é dada, numa base ortonormada da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, por

$$S = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i r(e_i) = 2 \sum_{i<j} K(e_i, e_j).$$

Como J.Milnor, podemos dizer que S é $n(n-1)$ vezes a média das curvaturas seccionais.

Teorema 18 (Teorema 3.1 de [M]) *Se G é resolúvel, então toda a métrica Riemanniana invariante à esquerda é plana ($K = 0$) ou tem curvatura escalar estrictamente negativa.*

Como corolário tem-se que, se G é resolúvel e $\mathfrak{g}$ é unimodular, toda a métrica Riemanniana não plana tem direcções de curvatura seccional positiva e negativa ([M,3.2]). Curiosamente, um tal grupo de Lie, não tem forçosamente alguma direcção de curvatura de Ricci positiva.

Teorema 19 (generalização do Teorema 3.3 de [M]) *Um grupo de Lie não comutativo possui métricas invariantes à esquerda de curvatura escalar estrictamente:*
(i) Negativa e índice $0 \leq p < n$;
(ii) Positiva e índice $0 < p \leq n$;

Demonstração. Se existem $x, y, z \in \mathfrak{g}$ linearmente independentes e tais que $[x, y] = z$ fazemos uma construção como na demonstração do Teorema 17. Aproveitando os cálculos que aí se fazem para a álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$ obtemos

$$S_0 = 2 \sum_{i<j} K(e_i, e_j) = 2\left(K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3) + K(e_2, e_3)\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -\frac{1}{2}\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3.$$

Por continuidade, veja-se a demonstração referida, vem $S > 0$ ou $S < 0$ conforme, respectivamente, $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ ou $+1$. Se queremos uma métrica de índice n, resulta $S > 0$. Se queremos índice 0, vem $S < 0$. Para outros índices só temos de escolher apropriadamente os valores de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. O caso em que não existem vectores linearmente independentes x, y, z tais que $[x, y] = z$, ou seja, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $[x, y]$ é combinação linear de x e y, é o caso do "exemplo especial" que será demonstrado no Capítulo 3.

Para o caso Riemanniano tem-se ainda o seguinte (demonstração em [M]).

Teorema 20 (N.Wallach,1974) *Se $\widetilde{G}$ não é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, então G admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda de curvatura escalar estrictamente positiva.*

Não sabemos se a Conjectura de J.Milnor sobre se estes grupos de Lie são os únicos com $S > 0$ para alguma métrica já terá sido resolvida. Os grupos de Lie resolúveis têm sempre curvatura escalar estrictamente negativa como vimos no Teorema 18. É tambem sabido que os seus espaços de cobertura universal são difeomorfos a $\mathbb{R}^n$ ([V,Teorema 3.18.11]).

Vamos agora ver o que [J] nos ensina. Primeiro umas notas que talvez estejam um pouco deslocadas dos assuntos desta secção, mas são importantes para o que lhes segue.

Observação. Se multiplicarmos a métrica de uma variedade semi-Riemanniana por um número real positivo ξ não é difícil perceber que o Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana (§1.2, cf. fórmula de Koszul, p.8) nos dá a mesma conexão. Consequentemente, teremos o mesmo tensor de curvatura. A curvatura seccional é que já não vem a ser a mesma função. Quanto maior for ξ menor é K e inversamente, o que se poderia traduzir como 'quanto maiores as coisas estão mais planas nos parecem'. Este procedimento chama-se *mudança de escala.*

Agora consideremos apenas grupos de Lie.

Dizemos que duas métricas têm o mesmo *elemento de volume* se a matriz de transformação entre duas bases de $\mathfrak{g}$, cada uma delas ortonormada para uma das métricas, tiver determinante ± 1. Esta definição faz sentido porque se duas bases β_1 e β_2 são ortonormadas para um produto escalar g e duas bases β_3 e β_4 são ortonormadas para um produto escalar h e se $\det M_{23} = \pm 1$, onde denotamos por M_{ij} a matriz de mudança da base β_i para a base β_j, então $M_{14} = M_{12}M_{23}M_{34}$ tambem tem determinante ± 1.

Como dissemos no início deste parágrafo 1.3, o espaço das métricas semi-Riemannianas invariantes à esquerda está em correspondência biunívoca com $\mathcal{X}/O_{p,n-p}$, onde $\mathcal{X}$ são $\binom{n}{p}$ cópias de GL_n. Fixando uma base β, qualquer produto escalar em $\mathfrak{g}$ é dado por $g \in GL_n$ e pela condição de fazer ortonormada a base '$g\beta$' com p vectores negativos arbitrariamente escolhidos. Como é sabido, fixando uma matriz g_0 tal que $\det g_0 = -1$,

$$GL_n = (SL_n \cup g_0 SL_n) \cdot \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Então pode-se concluir que, restringir-mo-nos às métricas com o mesmo elemento de volume, as que vêm do subgrupo $SL_n \cup g_0 SL_n$, não trará grande perda para o estudo das estruturas semi-Riemannianas dos grupos de Lie. Apenas perdemos as mudanças de escala.

Vamos então aos trabalhos de [J]. Até ao fim desta secção o termo métrica refere-se exclusivamente a métricas Riemannianas invariantes à esquerda.

Fixada uma base de $\mathfrak{g}$, para determinar as métricas todas basta considerar GL_n^+ já que as outras se obtêm a partir destas começando por inverter a ordem de dois vectores da base. Com o mesmo elemento de volume, o espaço das métricas simplifica-se então no espaço quociente

$$M = SL_n/SO_n.$$

Define-se agora a *função curvatura escalar*

$$S : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

que em cada ponto tem como valor a curvatura escalar da métrica correspondente a esse ponto. Prova-se que S é diferenciável (em [J] encontra-se uma fórmula para S).

Conhecendo nós as álgebras de Lie de SL_n e de SO_n e a forma como se constroem as cartas dum espaço quociente (ver nota sobre espaços homogéneos, §1.2, pag.13), podemos identificar T_mM em qualquer um dos pontos de M com o espaço vectorial das matrizes simétricas e de traço nulo.

Designemos tambem por S a função

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & S([\mathrm{e}^{tA}]) \end{array}$$

onde e denota a exponencial de $\mathfrak{gl}_n$ em GL_n e $A \in T_{[1]}M$ verifica $A = A^T$ e $\operatorname{tr} A = 0$ (claro que $[1] = SO_n$).

Proposição 21 (G.Jensen,1971) *Se $\mathfrak{g}$ é unimodular, os pontos críticos de $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ correspondem precisamente às métricas Riemannianas invariantes à esquerda de Einstein, isto é, de curvatura de Ricci constante.*

Relembrando a proposição 14, p.23, se o grupo de Lie for unimodular e resolúvel, então as métricas da proposição anterior são planas.

G.Jensen provou tambem em [J] que, excepto os grupos de Lie localmente isomorfos (isto é, com álgebra de Lie isomorfa) a SO_3 e, possivelmente, a G e $Sp(2n+1)$ $(n \geq 1)$, todo o grupo de Lie simples e compacto tem pelo menos duas estruturas de Einstein não isométricas (ver na p.36 quem é G).

Teorema 22 (G.Jensen,1971) *Dado um grupo de Lie resolúvel com métrica Riemanniana invariante à esquerda, tem-se que $S = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow K = 0$.*

Note-se que a segunda implicação é o resultado de J.Hano de que falámos no §1.3.2. (mesmo antes da proposição 14).

Tendo em conta o que dissemos no fim da demonstração do Teorema 6, p.18, e o resultado válido em variedades homogéneas $r = 0$ sse $K = 0$ (mesmo antes da proposição 14), talvez se possa largar a hipótese 'resolúvel' no Teorema 22.

Estamos a conjecturar que, num grupo de Lie qualquer, $S = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow K = 0$.

1.4 Métricas bi-invariantes

Como aprendemos no §1.2, uma métrica sobre um grupo de Lie G diz-se bi-invariante quando é invariante à esquerda e invariante à direita, isto é, quando é constante nos campos vectoriais invariantes à esquerda sobre G e nos invariantes à direita. Nesse caso, por ser verdadeira para $g = e$, dá-se a igualdade

$$< L_{g_*e}(u), L_{g_*e}(v) >_g = < R_{g_*e}(u), R_{g_*e}(v) >_g$$

para todo o $g \in G$, e todos os $u, v \in T_eG$ (cp.(1.1)).

Dado um subgrupo H de $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G vamos dizer que uma aplicação f definida em $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$ é *H-invariante* se

$$f(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo o $x_i \in \mathfrak{g}$, $h \in H$.

Relembremos que a todo o grupo de Lie está associada a representação diferenciável de G em $\mathfrak{g}$, $\operatorname{Ad}: G \to GL(\mathfrak{g})$, que se chama adjunta de G. Lembremos tambem que $\operatorname{Ad}(G) \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

O seguinte Teorema fundamental, bem como o seu corolário, estão demonstrados em [BO,p.304,305] e são fundamentais neste capítulo da teoria. Muitas partes destes resultados foram por nós deduzidas quando generalizámos a secção de [M] relativa a métricas Riemannianas bi-invariantes, às métricas semi-Riemannianas.

Teorema 1 *Seja G um grupo de Lie conexo com uma métrica $<\ ,\ >$ de assinatura qualquer e invariante à esquerda. São equivalentes:*

(i) $<\ ,\ >$ é invariante à direita, logo bi-invariante;

(ii) $<\ ,\ >$ é $\operatorname{Ad}(G)$-invariante;

(iii) $\operatorname{inv}: G \to G$ $(g \mapsto g^{-1})$ é uma isometria de G;

(iv) $< x, [y, z] > = - < [x, y], z >$, para todo o $x, y, z \in \mathfrak{g}$, isto é, $\operatorname{ad} x$ é anti-autoadjunto, $\forall x \in \mathfrak{g}$;

(v) $\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$, para todo o $x, y \in \mathfrak{g}$;

(vi) As geodésicas de G começando em e são os subgrupos a um parâmetro de G.

Parafraseando J.Milnor, (ii) equivale a $\operatorname{Ad}(G) \subset O_{p,n-p}(\mathfrak{g})$ onde p é o índice da métrica.

No Teorema 1, as condições (i), (ii) e (iii) são sempre equivalentes e implicam as condições tambem sempre equivalentes (iv), (v) e (vi). A hipótese de G ser conexo só é necessária para mostrar as restantes implicações.

Corolário 2 *Seja G um grupo de Lie com métrica semi-Riemanniana bi-invariante. Tem-se que*

(i) Se $\mathfrak{u}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{u}^\perp$ é um ideal de $\mathfrak{g}$;

(ii) $R(x,y)z = \frac{1}{4}[[x,y],z]$, *para todo o* $x,y,z \in \mathfrak{g}$*;*
(iii) Se o plano $\{x,y\}$ *é não degenerado, então*

$$K(x,y) = \frac{1}{4}\frac{<[x,y],[x,y]>}{<x,x><y,y> - <x,y>^2};$$

(iv) Se os vectores de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ *são nulos, então* $K = 0$*;*
(v) $Ric = -\frac{1}{4}B$, *onde* B *é a forma de Killing.*

Constata-se que todas as demonstrações do Teorema acima e seu corolário são invariantes da assinatura da métrica em causa.

Reparemos que a conexão de Levi-Civita é sempre a mesma para todas as métricas bi-invariantes. Logo, as geodésicas de G são sempre as mesmas, o que aliás ficou dito na parte (*vi*) do Teorema 1. Isto é verdade porque se α é uma geodésica de G começando em g, então $L_{g^{-1}} \circ \alpha$ é uma geodésica de G começando em e (lembrar que as translacções esquerdas são transformações afins), donde $\alpha = L_g \circ \gamma$ onde γ é um subgrupo a um parâmetro de G. Em particular todas as geodésicas estão definidas em $\mathbb{R}$, isto é, a conexão de Levi-Civita de uma métrica bi-invariante é completa.

Como uma conexão invariante à esquerda fica determinada pelos valores que toma numa vizinhança de e em G (já que assim acontece com a estrutura analítica deste) e unicamente determinada (porque $\mathfrak{g}$ fica unicamente determinada), podemos concluir, identificando T_eG com $\mathfrak{g}$, que uma métrica invariante à esquerda é bi-invariante sse a exponencial geodésica em e (da conexão de Levi-Civita) e a exponencial de Lie coincidem numa vizinhança de $0 \in T_eG$.

Corolário 3 *Um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante é uma variedade semi-Riemanniana simétrica.*

Demonstração. Geralmente, só o facto das aplicações L_g serem isometrias implica

$$L_g \circ \exp_e(x_e) = \exp_g(dL_{g_e}(x_e)) = \exp_g(x_g),$$

onde exp denota a exponencial geodésica. Então, para quaisquer $g \in G$ e $x \in T_gG$, notando tambem x o campo vectorial invariante à esquerda que x gera,

$$\exp_g(-x) = L_g \exp_e(-x) = L_g \operatorname{inv} \exp_e(x).$$

Logo $\exp_g(x) \mapsto \exp_g(-x)$ prolonga-se à isometria $L_g \circ \operatorname{inv} \circ L_g^{-1}$.

É sabido que a forma de Killing B de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dada por $B(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)$, é $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$-invariante e que, por isso,

$$B(\operatorname{ad}(x)(y),z) = -B(\operatorname{ad}(x)(z),y).$$

Quando $\mathfrak{g}$ é semisimples, B é não degenerada. Logo define um produto escalar em $\mathfrak{g}$ e induz uma métrica bi-invariante sobre qualquer grupo de Lie G conexo e semisimples associado a $\mathfrak{g}$. Por (v) do corolário 2, G é então uma variedade de Einstein.

Atente-se ao seguinte pequeno facto que nos será útil mais tarde (demonstra-se pelo mesmo método que demonstra que B é Aut$(\mathfrak{g})$-invariante).

Lema 4 *Seja $g\colon \mathfrak{i} \to \mathfrak{j}$ um isomorfismo entre duas álgebras de Lie semisimples e sejam $B_{\mathfrak{i}}, B_{\mathfrak{j}}$ as respectivas formas de Killing de $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{j}$. Então g é uma isometria de $(\mathfrak{i}, B_{\mathfrak{i}})$ para $(\mathfrak{j}, B_{\mathfrak{j}})$.*

Demonstração. Para todo o $x \in \mathfrak{i}$, $g \circ \mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\,(g\,x) \circ g$, logo

$$B_{\mathfrak{j}}(g\,x, g\,y) = \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}\,(g\,x) \circ \mathrm{ad}\,(g\,y) = \mathrm{tr}\, g\, \mathrm{ad}\,(x)\, g^{-1} g\, \mathrm{ad}\,(y)\, g^{-1} = B_{\mathfrak{i}}(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathfrak{i}$.

O próximo resultado tem demonstrações diferentes em [BO] e em [V].

Proposição 5 *Seja G um grupo de Lie conexo e B a sua forma de Killing. Então:*

(i) Se G é compacto, B é semi-definida negativa, i.e., $B(x,x) \leq 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.
(ii) Se B é definida negativa, G é compacto e $\pi_1(G)$ é finito.
(iii) G é compacto e semisimples sse B é definida negativa.[7]

Se G é compacto, Ad(G) tambem é. Pelo que se verá no Teorema 7 podemos deduzir que G tem uma métrica Riemanniana bi-invariante. Então, $\forall x \in \mathfrak{g}$, a matriz da aplicação anti-autoadjunta ad(x) é anti-simétrica, pelo que se deduz (i) da proposição 5. A demonstração de [BO] da parte (ii) envolve o Teorema de Myers (cf.§1.2, p.11). Por (i) e (ii) e pelo Critério de semisimplicidade de Cartan, se deduz (iii).

Temos pelo visto, combinando (ii) e (iii) da proposição acima, uma 'nova' demonstração do Teorema de Weyl (cf.[V,Teorema 4.11.6,p.345]).

Proposição 6 (H.Weyl) *Se G é um grupo de Lie conexo, compacto e semisimples, o seu grupo de cobertura universal $\widetilde{G}$ é tambem compacto.*

A proposição 5 e o corolário 2 mostram que $-B$ define uma métrica Riemanniana bi-invariante num grupo de Lie semisimples e compacto, com $K \geq 0$ e curvatura de Ricci $\frac{1}{4}$ sobre os vectores unitários.

Geralmente tem-se o seguinte, sem a hipótese G conexo.

Teorema 7 *Um grupo de Lie G admite uma métrica Riemanniana bi-invariante sse* Ad(G) *tem aderência compacta em $GL(\mathfrak{g})$.*

[7] num nosso outro trabalho, sobre números de Betti, mostra-se que um grupo de Lie conexo e compacto é semisimples sse $b_1 = H_1(G, \mathbb{R}) = 0$ e que, nesse caso, tambem $H_2(G, \mathbb{R}) = 0$. Tendo em conta os lemas cohomológicos de Whitehead ([V,Teorema 3.12.1]) não se poderá largar a hipótese 'compacto' na implicação 'semisimples $\Rightarrow$ $b_1 = 0$' ?

Ver a demonstração em [Poor].

A primeira implicação deste último resultado vem de $\mathrm{Ad}\,(G) \subset O(\mathfrak{g})$ e de $O(\mathfrak{g})$ ser compacto. No outro sentido, prova-se exclusivamente com as matérias constantes no nosso §1.5.1 e com $(i) \Leftrightarrow (ii)$ do Teorema 1.

Proposição 8 (lema 7.5 de [M]) *Um grupo de Lie conexo admite uma métrica Riemanniana bi-invariante sse é isomorfo ao produto cartesiano de um grupo de Lie compacto e algum* $\mathbb{R}^s$.

Para a demonstração ver [M]. É este resultado que permite mostrar a proposição 4, p.17, §1.3.1. (Questão: em que condições é que aquele produto é Riemanniano, ou seja, em que condições é que o subgrupo compacto é ortogonal ao grupo vectorial $\mathbb{R}^s$?)

O próximo teorema requer uma longa apresentação porque na hipótese é exigida uma condição que parece bastante artificial, mas que afinal é satisfeita em numerosos casos. Lembremos alguns resultados da Teoria das álgebras de Lie, que podem ser vistos em [V,Cap.4].

Uma *subálgebra de Cartan* duma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ nilpotente que coincide com o seu normalizador em $\mathfrak{g}$. Prova-se que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan sse for do tipo

$$\mathfrak{h} = \{y \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}\,(x)^s(y) = 0, \text{ para algum } s \geq 1\},$$

onde x é um *elemento regular* de $\mathfrak{g}$, isto é, um elemento x de $\mathfrak{g}$ para o qual a multiplicidade da raíz 0 de $\det(\mathrm{ad}\,x - \lambda\mathrm{Id}) = 0$ é mínima. Como $\det \mathrm{ad}\,(x) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, aquela multiplicidade é sempre ≥ 1.

Prova-se que, quando $\mathfrak{g}$ é semisimples, $\mathfrak{h}$ é maximal abeliana e coincide mesmo com o subespaço próprio de $\mathrm{ad}\,(x)$ associado a 0. No caso em que $\mathfrak{g}$ é semisimples complexa, $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição por raízes

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{y \in \mathfrak{g} : [x, y] = \alpha(x)y, \ \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

onde Δ é um subconjunto de $\mathfrak{h}^*$, dual complexo de $\mathfrak{h}$, para o qual

$$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \ \text{ sse } \ \alpha \in \Delta.$$

Claro que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$. A teoria diz então (cf.[V,lema 4.3.7]) que todos os subespaços próprios $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ têm dimensão 1. $\Delta_{\mathfrak{h}} = \Delta \setminus \{0\}$ diz-se um *sistema de raízes* do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e cada elemento de $\Delta_{\mathfrak{h}}$ chama-se *raíz*.

Lema 9 *Seja* $\mathfrak{g}$ *semisimples real e* $\mathfrak{h}$ *uma subálgebra de Cartan. Existir uma forma linear real não nula* ξ *sobre* $\mathfrak{h}$ *tal que* $\mathfrak{g}_\xi \neq 0$ *(*$\mathfrak{g}_\xi$ *definida como acima) é* *o mesmo que existir um elemento $y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ e uma raíz $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{h}^c}$ de $\mathfrak{g}^c$ tal que $\mathfrak{g}^c_\alpha = \mathbb{C}y$.*

Neste caso $\mathfrak{g}_\xi = \mathbb{R}y$.

Demonstração. A existir tal y e tal raíz α, é claro que $\mathfrak{g}^c_\alpha$ tem dimensão 1 já que $\mathfrak{g}^c$ tambem é semisimples. Se $\exists \xi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$, não nula, e

$$\exists y \in \mathfrak{g}_\xi \setminus \{0\} : [x, y] = \xi(x)y, \ \forall x \in \mathfrak{h},$$

então $\alpha = \xi^c : \mathfrak{h}^c \to \mathbb{C}$ verifica, $\forall x, x' \in \mathfrak{h}$, $a + ib \in \mathbb{C}$

$$[x + ix', (a + ib)y]^c = a[x, y] - b[x', y] + i(a[x', y] + b[x, y]) =$$

$$= a\xi(x)y - b\xi(x')y + ia\xi(x')y + ib\xi(x)y = \xi^c(x + ix')(a + ib)y.$$

Isto quer dizer que $\mathfrak{g}^c_\alpha = \mathbb{C}y$. Claro que assim $\mathfrak{g}_\xi = \mathbb{R}y$, porque se houvesse $y' \in \mathfrak{g}_\xi$ $\mathbb{R}$-linearmente independente de y, então y' estaria em $\mathfrak{g}^c_\alpha$ e y, y' tambem seriam $\mathbb{C}$-linearmente independentes, criando um absurdo.

O recíproco é evidente tomando $\xi = \mathrm{Re}\,\alpha$.

Como se prova em [V], a seguinte definição é equivalente à usual (cf.[V,p.260 a 263]). A *característica* de uma álgebra de Lie é a dimensão de uma sua qualquer subálgebra de Cartan. Denota-se por $\mathrm{rk}(\mathfrak{g})$. Quando $\mathfrak{g}$ é semisimples, tem-se então $\mathrm{rk}(\mathfrak{g}) = \dim\ker \mathrm{ad}\,(x)$, onde x é um elemento regular de $\mathfrak{g}$.

Para que não haja confusão, uma álgebra de Lie *simples* real ou complexa é aquela que só tem como ideais ela própria e 0 e é não comutativa. Assim, de acordo com [V] e em desacordo com [M], por exemplo, $\mathbb{R}$ não é simples.

Lembremos tambem que uma álgebra de Lie se diz *compacta* se for a álgebra de Lie de algum grupo de Lie compacto, e que nesse caso ela é reductiva.

Teorema 10 (generalização do lema 7.6 de [M]) *Seja G um grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ simples. Se $\mathfrak{g}$ satisfaz uma das seguintes condições:*

(i) Tem dimensão ímpar;

(ii) $\mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ é ímpar;

(iii) Para alguma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, na decomposição por raízes de $(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{h}^c)$ há um subespaço próprio do tipo $\mathbb{C}a$, $a \in \mathfrak{g}$;

(iv) É compacta;

então toda a métrica bi-invariante é induzida de um múltiplo da forma de Killing.

Observações. 1. As tabelas de álgebras de Lie semisimples mostram que as condições (*i*) e (*ii*) do Teorema 10 se dão quase sempre em simultâneo. 2. A demonstração é decalcada da do lema 7.6 de [M] excepto num ponto: a existência de um valor próprio de um certo operador.

Demonstração. Fixemos uma base $(e_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathfrak{g}$ e, para cada $x \in \mathfrak{g}$, notemos

X a matriz coluna $[x_i]$, onde os x_i são as componentes de x na base (e_i). Denotemos tambem por B a matriz do produto escalar B, isto é, $(B(e_i, e_j))$. É sabido que, a menos de uns parênteses,

$$B(x, y) = X^T BY.$$

Se $< \, , \, >$ é outra métrica bi-invariante e M é a sua matriz na base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, então, pondo $S^T = MB^{-1}$,

$$<x, y>= X^T MY = X^T S^T BY = (SX)^T BY = B(Sx, y)$$

onde $S\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é o isomorfismo (!) linear definido pela matriz S. Como $\mathrm{ad}\,(x)$ é anti-autoadjunto relativamente às duas métricas, temos, $\forall y, z \in \mathfrak{g}$,

$$B(S\mathrm{ad}\,(x)(y), z) = <\mathrm{ad}\,(x)(y), z>= - <y, \mathrm{ad}\,(x)(z)>=$$

$$= -B(Sy, \mathrm{ad}\,(x)(z)) = B(\mathrm{ad}\,(x)Sy, z)$$

e, logo, a igualdade $\mathrm{ad}\,(x)S = S\mathrm{ad}\,(x)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Agora, se y é um vector próprio de S associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $S[x, y] = [x, Sy] = \lambda[x, y]$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, isto é, $[x, y]$ está no subespaço próprio de S associado a λ, que é por isto um ideal de $\mathfrak{g}$.

Como $\mathfrak{g}$ é simples, se este ideal for não vazio, ele é todo o $\mathfrak{g}$ e

$$< \, , \, >= \lambda B$$

como queríamos. Vejamos então que ele é não vazio.

Se $\mathfrak{g}$ tem dimensão ímpar, já se sabe que S tem um valor próprio real e não nulo.

Agora, sendo $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, temos $[x, Sx'] = S[x, x'] = 0$, $\forall x, x' \in \mathfrak{h}$. Então $[S(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ e como $\mathfrak{h}$ coincide com o seu normalizador, $S(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Se $\mathfrak{g}$ tem característica ímpar, pela mesma razão que antes, S tem um valor próprio.

Se $\mathfrak{g}$ satifaz a hipótese (*iii*), então pelo lema anterior, existe $\xi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathfrak{g}$ tal que $[x, a] = \xi(x)a$, $\forall x \in \mathfrak{h}$. Logo $[x, Sa] = \xi(x)Sa$, $\forall x \in \mathfrak{h}$. Então $Sa = \lambda a$ para algum $\lambda \neq 0$ já que $a \neq 0$ e o subespaço próprio $\mathfrak{g}_\xi = \mathbb{R}a$.

Finalmente se $\mathfrak{g}$ for compacta, pela proposição 5, $-B$ define um produto interno (definida positiva). Neste caso a matriz de S é simétrica já que

$$B(Sx, y) = <x, y>=<y, x>= B(Sy, x)$$

para todo o $x, y \in \mathfrak{g}$. Por argumentos de álgebra elementar S tem então um valor próprio. (É sabido[8] que podemos associar a $-B$ uma forma sesquilinear definida positiva, isto é,

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathfrak{g}^c \times \mathfrak{g}^c & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (u, v) & \longmapsto & -B^c(u, \overline{v}) \end{array}$$

[8] ver livro da Prof. Isabel Salavessa de Geometria Complexa e Kähleriana, Capítulo 8.

tal que H é $\mathbb{C}$-linear na primeira variável, $\mathbb{R}$-linear na segunda, verifica $H(u,\zeta v) = \overline{\zeta}H(u,v)$, $\overline{H(u,v)} = H(v,u)$, $H(u,u) \geq 0$ com igualdade sse $u = 0$. É fácil ver que $B^c(S^c u, v) = B^c(S^c y, x)$ e que $S^c(\overline{u}) = \overline{S^c u}$. Vem então

$$H(S^c u, v) = -B^c(S^c u, \overline{v}) = -B^c(u, S^c\overline{v}) = -B^c(u, \overline{S^c v}) = H(u, S^c v)$$

(S^c diz-se hemi-simétrico). Finalmente, se $u \neq 0$ é um vector próprio de S^c associado a $\lambda = a + ib \neq 0$, então $\lambda H(u,u) = \overline{\lambda}H(u,u)$, donde $b = 0$. Sendo $u = x+iy$, $x, y \in \mathfrak{g}$, $S^c(x+iy) = a(x+iy)$ mostra que S tem um vector próprio associado a a.)

K.Nomizu, em [Nom], mostrou que os grupos de Lie conexos com álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ têm uma métrica Lorentziana dada por

$$<X,Y>= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(XY), \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{sl}_2$$

e de curvatura seccional constante -1. Como ele diz, esta métrica é "essencialmente a forma de Killing".

Corolário 11 *Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante $<\ ,\ >$. Suponhamos que a sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é reductiva, decompondo-se na soma directa*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k,$$

onde os $\mathfrak{g}_i$ são ideais simples, cada um satisfazendo uma das condições do Teorema 10. Notemos a forma de Killing de $\mathfrak{g}_i$ por B_i ($i = 1, \ldots, k$). Então existem um produto escalar sobre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ $<\ ,\ >_{\mathfrak{z}}$ e reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $<\ ,\ >$ se decompõe como[9]

$$<\ ,\ >_{\mathfrak{z}} \oplus \lambda_1 B_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_k B_k.$$

Demonstração. Vejamos que todos os ideais da decomposição acima são ortogonais uns aos outros. Chamando $\mathfrak{g}_0$ a $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, temos, como se sabe, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$ e $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ ($0 \leq i, j \leq k$). Agora, para quaisquer $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_j \in \mathfrak{g}_j$, $i \neq j$, supondo logo $i > 0$ e tomando $u_k, v_k \in \mathfrak{g}_i$ tais que $\sum_k [u_k, v_k] = x_i$, vem

$$<x_i, x_j>= -\sum_k <v_k, [u_k, x_j]>= 0$$

como se queria. Então a métrica é não degenerada em cada ideal, deixando estes nas condições do Teorema anterior se forem simples. Tomando $<\ ,\ >_{\mathfrak{z}} = <\ ,\ >_{|\mathcal{Z}(\mathfrak{g})}$ podemos concluir.

[9] soma directa de aplicações bilineares relativa à decomposição de $\mathfrak{g}$ acima – cp. 'produto directo' de dois produtos escalares no final do §1.1.

Vamos agora apresentar outras matérias importantes no estudo da estrutura das álgebras de Lie semisimples e que parecem ser menos conhecidas, pois não as encontrámos em [V] mas no mais recente [OV,III].

Uma subálgebra $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ diz-se $\mathbb{R}$-*diagonalizável* se existe uma base de $\mathfrak{g}$ em relação à qual todos os operadores $\mathrm{ad}\,(x)$ $(x \in \mathfrak{a})$ são descritos por matrizes diagonais.

Suponhamos que $\mathfrak{g}$ é semisimples e $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra $\mathbb{R}$-diagonalizável. Como ad é fiel, $\mathfrak{a}$ é abeliana. Prova-se que todas as subálgebras $\mathbb{R}$-diagonalizáveis com a mesma dimensão são conjugadas, isto é, dadas duas dessas subálgebras, existe um automorfismo de $\mathfrak{g}$ que transforma uma na outra. Chama-se *característica real* de $\mathfrak{g}$ à dimensão de uma qualquer subálgebra $\mathbb{R}$-diagonalizável maximal. Notamo-la por $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

É fácil perceber que $\mathfrak{a}$ coincide com uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ sse é maximal de entre as $\mathbb{R}$-diagonalizáveis e $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})=\mathrm{rk}(\mathfrak{g})$. Neste caso, todas as subálgebras $\mathbb{R}$-diagonalizáveis maximais são subálgebras de Cartan, já que os automorfismos de $\mathfrak{g}$ aplicam subágebras de Cartan em subálgebras de Cartan.

Segundo [OV,III,p.158], são exemplos desta situação — $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ — as álgebras de Lie simples $\mathfrak{sl}_n$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{so}_{k,k+1}$ $(k \geq 1)$, $\mathfrak{so}_{k,k}$ $(k \geq 3)$, $\mathfrak{sp}_n$ $(n \geq 2)$, *E*I, *E*V, *E*VIII, *F*I, *G* onde as últimas cinco são formas reais de umas certas álgebras de Lie complexas, que se chamam excepcionais e que se encontram quando se pretende classificar todas as álgebras de Lie (cf.[OV,III] ou [V]). Lembremos tambem que uma *forma real* de uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{p}$ é uma álgebra de Lie real $\mathfrak{f}$ tal que $\mathfrak{f}^c$ é isomorfa a $\mathfrak{p}$.

Um argumento análogo a um que se encontra na demonstração do Teorema 10 mostra que se $\mathfrak{g}$ é compacta todos os valores próprios de $\mathrm{ad}\,(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, são imaginários puros (as matrizes dos $\mathrm{ad}\,(x)$ são anti-simétricas). A característica real é então 0.

Prova-se, inversamente, que $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = 0$ implica $\mathfrak{g}$ ser compacta.

Não será de suspeitar que as condições (*iii*) e (*iv*) do Teorema 10 são complementares, isto é, tem-se (*iii*) sse não se tem (*iv*) ?

1.4.1 A forma de Killing das álgebras de Lie complexas simples

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa. Seja ρ uma representação fiel de $\mathfrak{g}$ num espaço vectorial complexo. Note-se desde já que tais representações existem pelo conhecido Teorema de Ado.

Considere-se a forma bilinear simétrica

$$\beta(x,y) = \mathrm{tr}\,(\rho(x)\rho(y)).$$

Chamamos a β uma *forma traço*[10]. Tem-se que

$$\beta([x,y],z) = \mathrm{tr}\,(\rho[x,y]\rho(z)) = \mathrm{tr}\,((\rho x\rho y - \rho y\rho x)\rho z) =$$
$$= \mathrm{tr}\,(\rho[z,x]\rho y) = -\beta([x,z],y).$$

A seguinte proposição, bem como a respectiva demonstração, encontra-se em [OV,III,p.14].

Proposição 12 *Seja V um espaço vectorial real ou complexo. Uma subálgebra $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(V)$ é resolúvel sse $\mathrm{tr}\,([X,Y]Z) = 0$ para todo o $X,Y,Z \in \mathfrak{a}$.*

A demonstração é quase a mesma da do critério de Cartan de resolubilidade de álgebras de Lie quaisquer. Aliás, como é fácil perceber, este é corolário da proposição. O resultado que se segue é tambem tirado de [OV,III]. Como para a demonstração é deixada apenas a indicação dos passos a seguir, fazemo-la aqui.

Proposição 13 *Se $\mathfrak{g}$ é semisimples, então qualquer forma traço β é não degenerada.*

Demonstração. Seja

$$\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} : \beta(x,y) = 0,\ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Se $x \in \mathfrak{u}$ e $z \in \mathfrak{g}$ então $\beta([x,z],y) = \beta(x,[z,y]) = 0$ para todo o $y \in \mathfrak{g}$, logo $\mathfrak{u}$ é um ideal. $\rho(\mathfrak{u})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ que, pelo lema anterior, é resolúvel. Como é isomorfo a $\rho(\mathfrak{u})$, $\mathfrak{u}$ é resolúvel. Uma vez que o radical é 0, $\mathfrak{u}$ é 0 e β é não degenerada.

Tudo isto foi para chegar aos seguintes resultados de que não conhecemos referência e que devem ser sobejamente conhecidos.

Teorema 14 *Toda a forma traço de uma álgebra de Lie simples complexa é múltipla da forma de Killing.*

Demonstração. β é um produto escalar para o qual todos os $\mathrm{ad}\,(x)$ são anti-autoadjuntos. Basta então ver a primeira parte da demonstração do Teorema 10 atrás, que é copiada do lema 7.6 de [M].

Corolário 15 *Se $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Lie simples e complexa de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, a sua forma de Killing é um múltiplo da forma traço*

$$\mathrm{tr}\,(XY), \quad X,Y \in \mathfrak{a}.$$

Compare-se tambem este resultado com o exercício 12 do Capítulo 4 de [V].

---

[10]Na verdade estamos a adulterar o nome dado a $\beta(X,Y) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(XY)$ onde X,Y são vectores de uma certa álgebra de matrizes (cf.[BO]).

1.5 Duas propriedades dos grupos de Lie

Juntamos nesta secção, sem razão especial, o estudo de duas propriedades dos grupos de Lie, ou, mais precisamente, os resultados do estudo que fizemos.

A primeira propriedade, a unimodularidade, apenas tem a ver com a estrutura diferenciável de um grupo topológico localmente compacto. Já utilizámos os resultados que se seguem, implícitamente, no Teorema 7 do §1.4. Mais tarde veremos outras aplicações.

A segunda propriedade já depende da estrutura semi-Riemanniana que um dado grupo de Lie possua. Pomos a questão de saber quando é que uma conexão semi-Riemanniana é completa.

1.5.1 Grupos de Lie Unimodulares

Dissemos atrás que um grupo de Lie conexo é unimodular quando a sua álgebra de Lie é unimodular, isto é, verifica $\operatorname{tr}\operatorname{ad} x = 0$, para todo o vector x.

Na realidade o termo 'unimodular' usa-se para designar qualquer grupo de Lie que verifica outra condição que vamos recordar dentro em pouco. No entanto, se o grupo de Lie for conexo, as duas definições coincidem.

Vejamos algumas matérias que se aprendem em [Hig].

Seja G um grupo topológico localmente compacto e separado não necessáriamente grupo de Lie.

Denotamos $C_c(G)$ o conjunto das funções contínuas $f{:}G \longrightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto, isto é,

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{g \in G : f(g) \neq 0\}}$$

é compacto. O conhecido lema de Urysohn tem como corolário que $C_c(G) \neq \{0\}$ $(G \neq \emptyset)$. $C_c(G)$ é um espaço vectorial real. A uma aplicação linear não nula

$$\mu : C_c(G) \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que $\mu(f) \geq 0$ se $f \geq 0$, damos o nome de *integral positivo* em G. A um integral positivo invariante à esquerda, isto é, $\mu(f) = \mu(f \circ L_g)$ para todo o $f \in C_c(G)$ e para todo $g \in G$, chamamos um *integral de Haar esquerdo* em G. Da mesma forma se define *integral de Haar direito.*

Teorema 1 *Seja G um grupo topológico localmente compacto e separado. Existe um integral de Haar esquerdo μ em G.*

Da mesma forma, existe um integral de Haar direito ν mas, em geral, $\mu \neq \nu$. O próximo Teorema tambem tem um análogo 'à direita'. (Demonstrações em [Hig]).

Teorema 2 *Se μ e μ' são dois integrais de Haar esquerdos em G, então existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu' = \lambda\mu$.*

Seja μ um integral de Haar esquerdo em G. Seja μ_g a aplicação $\mathbb{R}$-linear dada por $\mu_g(f) = \mu(f \circ R_{g^{-1}})$, definida em $C_c(G)$ e com valores em $\mathbb{R}$. μ_g é um integral positivo e, $\forall h \in G,\ f \in C_c(G)$,

$$\mu_g(f \circ L_h) = \mu(f \circ L_h \circ R_{g^{-1}}) = \mu(f \circ R_{g^{-1}} \circ L_h) = \mu_g(f),$$

quer dizer, μ_g é um integral de Haar esquerdo. Pelo Teorema 2, existe $\Delta(g) \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu_g = \Delta(g)\mu$. É fácil ver, usando novamente o Teorema 2, que $\Delta(g)$ é independente do integral de Haar escolhido inicialmente. Uma vez que $R_{(g_1g_2)^{-1}} = R_{g_1^{-1}}R_{g_2^{-1}}$, tem-se

$$\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2) = \Delta(g_2g_1).$$

Prova-se que Δ é contínua. Logo $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ é um homomorfismo de grupos topológicos.

A Δ chama-se *função modular esquerda*.

O grupo G diz-se *unimodular* se $\Delta(g) = 1,\ \forall g \in G$. Tem-se então $\mu_g = \mu$ e $\mu(f) = \mu(f \circ R_g)$ para todo $g \in G$, ou seja, μ é invariante à direita.

Recíprocamente, um grupo topológico localmente compacto e separado que admite um integral de Haar simultâneamente esquerdo e direito é unimodular. Por exemplo, se G é abeliano, G é unimodular. Se é compacto, tambem, pois $\Delta(G)$, sendo um subgrupo compacto de $\mathbb{R}^+$, tem de ser igual a $\{1\}$. (Há outra demonstração. Seja $f \equiv 1 \in C_c(G)$. $0 \neq \mu(f) = \mu_g(f) = \Delta(g)\mu(f)$. Logo $\Delta(g) = 1$.)

Suponhamos agora G um grupo de Lie de dimensão n. G é, como todas as nossas variedades, um espaço topológico localmente compacto e separado. O Teorema [V,2.11.2] implica que, sendo contínua, a função modular Δ é analítica. Vamos agora achar uma expressão para Δ.

Recordemos que a cada forma diferencial (serão sempre diferenciáveis e globais) de grau n está associada uma medida de Borel não negativa (cf.[V,p.12]).

Tal como definimos métrica invariante à esquerda (cf.(1.1)), podemos definir formas diferenciais *invariantes à esquerda* sobre G. São as que satisfazem, $\forall g \in G$,

$$L_g^*\omega = \omega.$$

De entre as do mesmo grau, essas formas diferenciais formam um módulo. Apenas com a multiplicação por escalares, esse módulo 'é' o espaço vectorial $\wedge_p^n(\mathfrak{g})$, o espaço das formas alternadas de grau p sobre $\mathfrak{g}$.

Assim, podemos concluir que existe uma forma diferencial ω de grau n, sobre G, invariante à esquerda, e que ω é única a menos de multiplicação por uma constante real, pois $\dim \wedge_n^n(\mathfrak{g}) = 1$.

A $n-$forma ω define uma orientação em G (cf.[V,p.12]). Posto que $L_g^*\omega = \omega$, todas as translacções L_g preservam a orientação de G. Precisamos agora de um lema da teoria da integração em variedades.

Lema 3 *Sejam M e N variedades diferenciáveis munidas de orientação. Sejam $\Phi : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo que preserva a orientação e ω uma $n-$forma diferencial sobre N. Tem-se que*

$$\int_M f\,\Phi^*\omega = \int_N (f \circ \Phi^{-1})\omega$$

para todo $f \in C_c(M)$.

Demonstração em [Hel].

Proposição 4 *Seja ω uma forma diferencial de grau n invariante à esquerda num grupo de Lie G. A medida de Borel em G associada a ω é um integral de Haar esquerdo.*

Recíprocamente, todo o integral de Haar esquerdo é uma medida de Borel.

Demonstração. Notemos μ a medida de Borel. Como é bem sabido, μ verifica as condições para ser um integral positivo. Dando a G a orientação acima, tem-se, para $f \in C_c(G)$ e para $g \in G$,

$$\mu(f \circ L_g) = \int (f \circ L_g)\omega = \int f\, L^*_{g^{-1}}\omega = \int f\omega = \mu(f).$$

No outro sentido, o resultado vem pelo Teorema 2 e por existirem medidas de Borel em G.

No essencial o que se segue está demonstrado em [Hel]. Trata-se de outra aplicação do lema acima, depois de se conhecer a equivalência entre medidas de Borel e de Haar.

Proposição 5 *A função modular verifica $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}\,(g)^{-1}|$, para todo $g \in G$.*

Corolário 6 (lema 6.1 de [M]) *Um grupo de Lie G é unimodular sse $\mathrm{Ad}\,(g)$ tem determinante ± 1, $\forall g \in G$.*

Por exemplo, um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante $< \, , \, >$ de assinatura qualquer é unimodular. De facto, por $< \, , \, >$ ser $\mathrm{Ad}\,(G)$-invariante, não é difícil perceber que a condição do corolário 6 é satisfeita. Em particular, todo o grupo de Lie semisimples é unimodular[11].

Os dois resultados seguintes estão demonstrados em [M].

Lema 7 (lema 6.2 de [M]) *Se G é um grupo de Lie que admite um subgrupo discreto Γ tal que a variedade quociente G/Γ é compacta, então G é unimodular.*

[11] há outra prova: um grupo de Lie semisimples não pode admitir o ideal $\ker\Delta$ de dimensão $n-1$.

Em termos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo temos o seguinte critério, que já havíamos anunciado.

Proposição 8 (lema 6.3 de [M]) *Um grupo de Lie conexo é unimodular sse $\mathfrak{g}$ é unimodular.*

Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, $\mathrm{ad}\,(x)$ tem traço nulo, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Como $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ para quaisquer matrizes A e B, tem-se, em qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,[x,y] = \mathrm{tr}\,[\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y] = 0$. Então a aplicação linear $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x \mapsto \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,(x))$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. O seu núcleo

$$\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,(x) = 0\}$$

é um ideal que contém $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. $\mathfrak{u}$ chama-se o *kernel* ou *núcleo unimodular* de $\mathfrak{g}$ e, como álgebra de Lie, $\mathfrak{u}$ é unimodular (óbvio). Todo o grupo de Lie conexo com álgebra de Lie reductiva é unimodular, pois $\mathfrak{g} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. É o caso dos compactos.

Repare-se ainda no simples facto que é afinal praticamente o único desta secção que nos será útil mais tarde. Sejam $\mathfrak{u}_i$ $(i = 1,2)$ os kerneis unimodulares das álgebras de Lie $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1,2)$ e seja $g : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ um isomorfismo. Tem-se então $g(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$. Para a demonstração basta lembrar que $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,(gx) = \mathrm{tr}\,(g\mathrm{ad}\,(x)g^{-1}) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,(x)$.

1.5.2 Estruturas semi-Riemannianas completas

Toda a variedade Riemanniana compacta é completa. Isto é imediato a partir de um muito conhecido resultado da geometria Riemanniana, o Teorema de Hopf-Rinow (cf.[BO]). Há exemplos de variedades semi-Riemannianas compactas e não completas (cf.[BO,p.193]).

Toda a variedade Riemanniana homogénea é completa. Por dois caminhos se chega a essa conclusão. Um passa novamente por Hopf-Rinow e por todo o espaço homogéneo localmente compacto e métrico ser completo (Banach). O outro é uma demonstração directa que se encontra em [KN,I,p.176]. Assim, os grupos de Lie com métrica definida invariante à esquerda são completos. Há exemplos de variedades semi-Riemannianas homogéneas e não completas (cf.[BO,p.257]). Há exemplos, nomeadamente, como veremos, com grupos de Lie munidos de métrica invariante à esquerda.

Afortunadamente, quando as duas condições, compacta e homogénea, se juntam, a variedade é completa.

Teorema 9 (Marsden) *Uma variedade semi-Riemanniana compacta e homogénea é completa.*

Corolário 10 *Um grupo de Lie compacto com estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda é completo.*

Em estilo de exercício adaptaremos a demonstração que vimos em [BO,p.258] do Teorema acima ao caso dos grupos de Lie. Para isso necessitamos do tensor derivação de Lie $\mathcal{L}$, associado, aqui, à estrutura semi-Riemanniana, e do conceito de campo de Killing. Um campo vectorial diferenciável x sobre uma variedade diz-se um *campo de Killing* se $\mathcal{L}_x <\ ,\ >= 0$.

Combinando dois resultados de [BO] temos o seguinte lema de que não conhecemos referência.

Lema 11 *Os campos vectoriais invariantes à direita sobre um grupo de Lie G são campos de Killing (para a estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda).*

Demonstração. É sabido que a derivada de Lie em variedades quaisquer de um campo tensorial A, segundo um campo vectorial diferenciável x, verifica

$$\mathcal{L}_x A = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\psi_t^*(A) - A),$$

onde $\{\psi_t\}$ é o fluxo de x (cf.[BO,p.250]). Seja agora x um campo vectorial invariante à direita sobre G. Determinemos o fluxo de x. Como x é invariante à direita, uma sua curva integral maximal α que comece em 0, isto é,

$$\alpha : I \to G \ \text{ diferenciável, de domínio } I \subset \mathbb{R} \text{ máximo e tal que}$$

$$\alpha(0) = e, \qquad \alpha'(t) = x_{\alpha(t)},$$

é exactamente o subgrupo a um parâmetro de G associado a x (que é induzido por existir um e um só homomorfismo de grupos de Lie $\alpha : \mathbb{R} \to G$ que tem por derivada o homomorfismo

$$t\frac{d}{dt} \longmapsto tx$$

entre as álgebras de Lie $\mathbb{R}$ e a dos campos vectoriais invariantes à direita sobre G (cf.[V,p.84 e 71])). Seja $\{\psi_t\}$ o fluxo de x. Temos então $\psi_t(e) = \alpha(t)$. Agora

$$\left(\frac{dR_g \circ \alpha}{dt}\right)_0 = R_{g_*e}\left(\frac{d\alpha}{dt}(0)\right) = R_{g_*e}(x_e) = x_g,$$

logo $\psi_t(g) = \alpha(t)g$, i.e., $\psi_t = L_{\alpha(t)}$. Então ψ_t é uma isometria, ou seja, $\psi_t^* <\ ,\ >=<\ ,\ >$. Pela igualdade inicial, $\mathcal{L}_x <\ ,\ >= 0$ c.q.d.

Demonstração do corolário 10. Pela regra do produto de um operador de derivação (cf.[BO,p.44]), temos que $\mathcal{L}_x <\ ,\ >= 0$ sse

$$x <u,v>=<[x,u],v> + <u,[x,v]>$$

para todo o u, v campos vectoriais diferenciáveis sobre G. Finalmente, para mostrar que G é completo, basta ver, como é fácil perceber, que qualquer geodésica $\gamma : [0, b[\to G$ é prolongável para além de b por uma geodésica. Seja então $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para b. Se necessário passando a uma subsucessão, $(\gamma(s_k))$ converge para um ponto $g \in G$. Vejamos que tambem $(\gamma'(s_k))$ é convergente. Tomando um campo de referenciais $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ invariante à direita sobre G, queremos ver que $<\gamma'(s_k), x_i>$ converge, $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Por um lado, pelo lema e pela equivalência acima,

$$x_i <\gamma', \gamma'> = 2 < [x_i, \gamma'], \gamma'> .$$

Por outro, $\nabla < \ , \ > = 0$ implica

$$x_i <\gamma', \gamma'> = 2 < \nabla_{x_i} \gamma', \gamma'>,$$

onde tambem notamos γ' um prolongamento de γ' a todo o G.

Então, como a conexão de Levi-Civita tem torsão nula,

$$< \nabla_{\gamma'} x_i, \gamma'> = < \nabla_{x_i} \gamma', \gamma'> - < [x_i, \gamma'], \gamma'> = 0.$$

Agora

$$\frac{d}{dt}\left(<\gamma', x_i>_{\gamma(t)}\right) = \gamma' <\gamma', x_i> = < \nabla_{\gamma'} \gamma', x_i> + <\gamma', \nabla_{\gamma'} x_i> = 0,$$

donde se conclui que $<\gamma', x_i>$ é constante sobre a curva γ e que, por isso, $\gamma'(s_k)$ converge para um vector $v \in T_gG$.

Temos uma curva γ' em TG. Prova-se que γ' é uma curva integral de um certo campo vectorial[12] diferenciável sobre TG, que notamos ξ (cf.[BO,p.70]) e que tem a propriedade de $\pi \circ \beta$ ser uma geodésica de G se β é uma curva integral de ξ, onde $\pi : TG \to G$ é a projecção do fibrado tangente.

Ora o facto de $(\gamma'(s_k))$ convergir, implica que γ' é prolongável para além de b como curva integral de ξ (cf.[BO,p.30]). Então $\pi \circ \gamma'$ é um prolongamento geodésico de γ, para além de b, c.q.d.

Conseguimos assim fugir ao cálculo variacional que a demonstração do Teorema de Marsden contem.

Lembremos aquilo que já mostrámos no §1.4. Todo o grupo de Lie com métrica bi-invariante é completo. Em [BO] a demonstração deste facto vem depois de se mostrar que toda a variedade semi-Riemanniana simétrica é completa (uma geodésica prolonga-se para a 'frente' por simetria com o caminho que percorreu 'atrás').

Mostremos agora um exemplo de um grupo de Lie semi-Riemanniano não completo. É necessário o Teorema que classifica todas as formas espaciais (ver p.12) e cuja demonstração se encontra em qualquer um dos [BO;KN;W]. Apresentamos uns traços desse trabalho, mas, lamentavelmente, sem tocar no essencial que a questão encerra — o Teorema de Cartan-Ambrose-Hicks.

[12] este campo vectorial, grosso modo, corresponde a γ''.

Toda a conexão numa variedade de dimensão 1 é plana ($R = 0$). Uma forma espacial unidimensional coincide com a geodésica completa que ela contem, logo, é difeomorfa a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{T}$. Seja $n \geq 2$ e considere-se o espaço semi-Euclideano $\mathbb{R}_s^{n+1}$ com a sua métrica b de assinatura $(s, n+1-s)$ onde $0 \leq s \leq n$ (cf.§1.1). Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Os conjuntos

$$S_s^n = \{x \in \mathbb{R}_s^{n+1} : b(x,x) = r^2\},$$

$$H_s^n = \{x \in \mathbb{R}_s^{n+1} : b(x,x) = -r^2\}$$

chamam-se, respectivamente, *esfera semi-Riemanniana* e *espaço hiperbólico*. Prova-se que S_s^n e H_s^n são subvariedades semi-Riemannianas de $\mathbb{R}_s^{n+1}$, de dimensão n, completas e de curvatura seccional constante $\frac{1}{r^2}$ e $-\frac{1}{r^2}$, respectivamente. Prova-se tambem que

$$S_s^n \sim \mathbb{R}^s \times S^{n-s} \sim H_{n-s}^n, \tag{1.9}$$

onde $\sim$ denota 'difeomorfo a' e S^{n-s} é a conhecida esfera (Riemanniana) de dimensão $n-s$.

Agora, é sabido que toda a variedade conexa M tem um espaço de cobertura universal $\widetilde{M}$. Quando M é semi-Riemanniana é possível construir em $\widetilde{M}$ tambem uma estrutura semi-Riemanniana tal que a aplicação de cobertura é, localmente, uma isometria. $\widetilde{M}$ é então simplesmente conexa, completa se M o for e com as mesmas curvaturas em cada ponto (ver nota de roda-pé no final do §1.2).

Pelo que se viu, tem-se, para $n - s \neq 0$,

$$\widetilde{S_s^n} = S_s^n \quad \text{e} \quad \widetilde{H_{n-s}^n} = H_{n-s}^n \qquad \text{sse} \quad n - s \neq 1.$$

Como se sabe, $\widetilde{S^1} = \mathbb{R}$, logo, $\widetilde{S_{n-1}^n} \sim \mathbb{R}^n \sim \widetilde{H_1^n}$. Notemos $\widetilde{S_n^n}$ a componente conexa de $(0,\ldots,0,1)$ em S_n^n e $\widetilde{H_0^n}$ a componente conexa de $(1,0,\ldots,0)$ em H_0^n. A restrição dos difeomorfismos (1.9) mostra que $\widetilde{S_n^n} \sim \mathbb{R}^n \sim \widetilde{H_0^n}$. Concluindo, todos os $\widetilde{S}, \widetilde{H}$ são simplesmente conexos.

Teorema 12 *Formas espaciais simplesmente conexas são isométricas sse têm a mesma dimensão, índice e curvatura seccional.*

Corolário 13 (classificação das formas espaciais) *Seja M uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e métrica de assinatura $(s, n-s)$. M é simplesmente conexa, completa e de curvatura seccional constante $K \in \mathbb{R}$ sse é isométrica a um dos espaços*

$$\widetilde{S_s^n} \ \textit{se} \ K > 0, \qquad \mathbb{R}_s^n \ \textit{se} \ K = 0, \qquad \widetilde{H_s^n} \ \textit{se} \ K < 0$$

onde $r \in \mathbb{R}^+$ é escolhido apropriadamente.

Finalmente, prova-se que toda a forma espacial M é isométrica à variedade quociente $\widetilde{M}/\Gamma$ (as variedades quociente têm uma estrutura semi-Riemanniana canónica dada por M), onde Γ é um grupo de isometrias de $\widetilde{M}$ que tem, portanto, uma acção propriamente descontínua sobre a forma espacial simplesmente conexa $\widetilde{M}$.

Exemplo de um grupo de Lie semi-Riemanniano não completo. Considere-se a álgebra de Lie do "exemplo especial" do Capítulo 3 e G um grupo de Lie simplesmente conexo que lhe esteja associado. Existe um tal G. Pelo que se demonstra naquele Capítulo, G é resolúvel. Então, por [V,Teorema 3.18.11], ficamos a saber que G é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Resumindo o corolário acima, temos que uma forma espacial simplesmente conexa de dimensão n e índice s é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ sse

$$(\spadesuit)\begin{cases} s = n, n-1 \text{ e } K > 0 & ou \\ k = 0 & ou \\ s = 0, 1 \text{ e } K < 0 \end{cases}$$

Demonstra-se que podemos dar a G uma estrutura semi-Riemanniana indefinida de qualquer índice com $K \in \mathbb{R}$ qualquer como curvatura seccional — constante (ver Teorema 2). Escolhendo s e K fora dos casos $\spadesuit$ temos que G não pode ser completo para essa estrutura. G é o exemplo pretendido. (Questão: a que condição obedece afinal um grupo de Lie semi-Riemanniano para ser completo ? Particularmente, quando é que uma estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda é completa ?)

Se $\sigma : I \to M$ é uma geodésica numa variedade semi-Riemanniana M, então $<\sigma', \sigma'>$ é constante ao longo de σ visto que

$$\frac{d <\sigma', \sigma'>_\sigma}{dt} = \sigma' <\sigma', \sigma'> = 2 <\nabla_{\sigma'} \sigma', \sigma'> = 0$$

É então costume falar em curvas geodésicas σ *tipo espaço*, *tipo tempo* e *tipo luz* se, respectivamente, $<\sigma', \sigma'> > 0$, < 0 ou $= 0$. Há exemplos de variedades com curvas completas e não completas dos três tipos, mostrando que aqueles conceitos são todos independentes. Em [BEE] encontra-se um estudo aprofundado destas questões, bem como da possibilidade de extender uma variedade. Uma variedade semi-Riemanniana conexa M diz-se *extensível* se existe uma variedade semi-Riemanniana conexa $\widetilde{M}$ e uma aplicação diferenciável $f : M \to \widetilde{M}$, isometria de M sobre $f(M)$ aberto estrictamente contido em $\widetilde{M}$.

Proposição 14 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana conexa. Se M é completa, então M não é extensível.*

Demonstração (resolução de um exercício de [BO]). Toda a variedade é localmente conexa por arcos. Munida de uma estrutura semi-Riemanniana, é possível arranjar vizinhanças de cada ponto da variedade onde dois quaisquer pontos podem ser ligados por uma curva geodésica[13]. Aceitando este resultado, suponhamos por absurdo que M é extensível. Identificamos M a $f(M)$, sem o que apenas se sobrecarregaria a notação do que se segue. Seja $m_0 \in \partial M$ e $\widetilde{U}$ uma vizinhança convexa de m_0 em $\widetilde{M}$. Tomamos $\widetilde{m} \in \widetilde{U} \setminus M$, $m \in M \cap \widetilde{U}$ e $\widetilde{\sigma}:[0,1] \longrightarrow \widetilde{M}$ uma geodésica ligando m a $\widetilde{m}$. Como M é aberta em $\widetilde{M}$, perto de m a sua conexão coincide com a de $\widetilde{M}$, logo, há uma restrição de $\widetilde{\sigma}$ que é uma geodésica de M. Como M é completa, essa restrição prolonga-se a uma geodésica $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow M$. Por unicidade das curvas integrais, $\sigma_{|[0,1]} = \widetilde{\sigma}$, donde $\widetilde{\sigma}(1) = \widetilde{m} = \sigma(1) \in M$. Absurdo!

1.6 Produtos semi-directos de Grupos de Lie

O facto de em [M] encontrarmos um estudo sobre a métrica de um certo produto semi-directo de grupos de Lie e o facto de termos generalizado em parte esse estudo, bem como a necessidade de encontrar grupos de Lie simplesmente conexos, levaram-nos a dedicar uma secção ao assunto que esta tem por tema.

Sejam A e B dois grupos de Lie conexos e $t{:}B \longrightarrow \operatorname{Aut} A$ um homomorfismo de grupos de Lie[14]. O produto semi-directo $A \oplus_t B$, isto é, a variedade $A \times B$ com operação

$$(a,b)\cdot(\tilde{a},\tilde{b}) = (at_b(\tilde{a}), b\tilde{b})$$

$(a, \tilde{a} \in \mathfrak{a},\ b, \tilde{b} \in \mathfrak{b})$, tem álgebra de Lie, a menos de isomorfismo, o produto semi-directo $\mathfrak{a} \times_\sigma \mathfrak{b}$ das respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ de A e B, onde $\sigma{:}\mathfrak{b} \longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{a}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Se $t_b \in \operatorname{Aut} A$, então $dt_b \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. Pela igualdade

$$t_b(\exp x) = \exp dt_b(x)$$

se vê que o homomorfismo de grupos $b \longmapsto dt_b$ é analítico (lembrar que a estrutura analítica de $\operatorname{Aut}\mathfrak{a}$ vem de este ser um subgrupo algébrico de $GL(\mathfrak{a})$). σ é a derivada desse homomorfismo. Temos então, numa notação mais flexível do que a correcta, para quaisquer $x, x' \in \mathfrak{a},\ y, y' \in \mathfrak{b}$,

$$[x+y, x'+y']_\sigma = [x,x'] + \sigma(y)(x') - \sigma(y')(x) + [y,y']$$

(não perder o juízo do sentido daquelas somas). Esta equação mostra bem a 'bilinearidade' de $[\ ,\ ]_\sigma$, mostra que $\mathfrak{a}$ é um ideal e que $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Lie.

Lembremo-nos, como referência, do Teorema de Levi-Malčev que diz que toda a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é produto semi-directo $\mathfrak{q} \times_\sigma \mathfrak{s}$ do seu radical $\mathfrak{q}$ e de uma subálgebra semisimples maximal $\mathfrak{s}$.

[13]Essas vizinhanças tomam a designação de *convexas* (cf.[BO]).
[14]ver em [OV,I] como obter uma estrutura de grupo de Lie em Aut (A).

Vejamos como se constrói o grupo de Lie associado a um produto semi-directo.

Teorema 1 *Sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ álgebras de Lie e H_1, H_2 os respectivos grupos de Lie simplesmente conexos associados. Seja σ uma representação de $\mathfrak{h}_2$ em $\mathfrak{h}_1$ tal que $\sigma(y) \in \operatorname{Der}\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{h}_1)$, $\forall y \in \mathfrak{h}_2$. Então existe um homomorfismo de grupos de Lie*

$$t : H_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} H_1$$

tal que $\mathfrak{h}_1 \times_\sigma \mathfrak{h}_2$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie simplesmente conexo $H_1 \oplus_t H_2$.

Demonstração. $\sigma : \mathfrak{h}_2 \to \operatorname{Der}\mathfrak{h}_1$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então, como H_2 é simplesmente conexo, existe $\pi : H_2 \to \operatorname{Aut}\mathfrak{h}_1$ tal que $d\pi = \sigma$ (cf.[V,Teorema 2.7.5]). Pela mesma razão, para cada $h_2 \in H_2$, $\exists\, t_{h_2} \in \operatorname{Aut} H_1$ tal que $\pi(h_2) = dt_{h_2}$. Como $d : \operatorname{Aut} H_1 \to \operatorname{Aut}\mathfrak{h}_1$ é um isomorfismo, $t = d^{-1}\pi$ é um homomorfimo de grupos de Lie. É agora trivial verificar que a álgebra de Lie de $H_1 \oplus_t H_2$ é $\mathfrak{h}_1 \times_\sigma \mathfrak{h}_2$.

Corolário 2 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus < u >$ com $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$. Seja G um grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}$ e H um subgrupo de Lie de G simplesmente conexo associado a $\mathfrak{h}$. Então um grupo de Lie simplesmente conexo associado a $\mathfrak{g}$ é $H \oplus_t \mathbb{R}$, onde $t : \mathbb{R} \to \operatorname{Aut} H$ é dado por*

$$t_s(h) = \exp(su)\, h\, \exp(-su), \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ h \in H,$$

e exp *é a exponencial de G.*

Demonstração (não conhecemos referência para este resultado). t está bem definida porque $\exp(-u) = \exp(u)^{-1}$ e, sendo $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$, H é normal em G. Tendo em conta a demonstração do Teorema, vamos mostrar que $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{h} \times_\sigma \mathbb{R}$ onde $\sigma : \mathbb{R} \to \partial\mathfrak{h}$ é dada por

$$\sigma = d\pi \quad \text{e} \quad \pi = dt_s.$$

Sendo $H \oplus_t \mathbb{R}$ simplesmente conexo e associado a $\mathfrak{h} \times_\sigma \mathbb{R}$ isto responderá ao nosso problema. Dado $s \in \mathbb{R}$, notando $\tilde{t_s}$ o prolongamento natural de t_s a G,

$$\pi(s) = dt_s = d(\tilde{t_s})_{|\mathfrak{h}} = \operatorname{Ad}(\exp(su))_{|\mathfrak{h}} = e^{\operatorname{ad}(su)}{}_{|\mathfrak{h}}.$$

Logo

$$\sigma(s) = d\pi(s) = \operatorname{ad}(su)_{|\mathfrak{h}}$$

O produto de Lie em $\mathfrak{h} \times_\sigma \mathbb{R}$ é dado por, $\forall x, x' \in \mathfrak{h}$, $s, s' \in \mathbb{R}$,

$$[s, s']_\sigma = 0, \qquad [x, x']_\sigma = [x, x'], \qquad [s, x] = \sigma(s)(x) = [su, x].$$

O isomorfismo de $\mathfrak{g}$ para aquele produto semi-directo $x+su \mapsto (s,x)$ é o procurado.

Três exemplos clássicos de produtos semi-directos.
1. Seja V um espaço vectorial de dimensão finita. V pode ser entendido como uma álgebra de Lie abeliana e neste caso $\mathrm{Der}\, V = \mathfrak{gl}(V)$. Dada uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer, podemos naturalmente formar o produto semi-directo $V \times_\rho \mathfrak{g}$. Se G é um grupo de Lie simplesmente conexo associado a $\mathfrak{g}$, pelo Teorema 1, existe uma representação de G em V, $R : G \to GL(V)$, dada por $dR = \rho$, tal que $V \oplus_R G$ é o grupo de Lie associado a $V \times_\rho \mathfrak{g}$.
2. Dado um espaço vectorial V é possível definir em $TV = V \times V$ uma conexão que tem como geodésicas as rectas de V, isto é, $s \mapsto m + sv$ $(m, v \in V,\ s \in \mathbb{R})$. Das equacões

$$\exp_m(sx) = m + sx, \qquad f \circ \exp_m = \exp_{f(m)} \circ df_m$$

$(m, x \in V,\ s \in \mathbb{R})$ se deduz que todas as transformações afins de V são do tipo $f(x) = f(0) + df_0(x)$. Se $f(0) = 0$, então $f \in GL(V)$. Se $df_0 = \mathrm{Id}$, f é uma translacção. Por definição de transformação afim, o conjunto das transformações afins forma um grupo para a composição, que denotamos $GA(V)$ (cf. final da nota sobre variedades homogéneas do §1.2, 13). Identificando o subgrupo abeliano das translacções $t_v : x \mapsto v + x$ com V, temos que

$$GA(V) = V \oplus_{\mathrm{Id}} GL(V),$$

pois, tomando $f_i = t_{v_i} \circ g_i = v_i + g_i(\cdot)$, $v_i \in V$, $g_i \in GL(V)$, $i = 1, 2$,

$$f_1 \circ f_2 = v_1 + g_1(v_2) + g_1 g_2(\cdot) = t_{v_1 + g_1(v_2)} \circ g_1 g_2.$$

Pelo que vimos no início desta secção, $GA(V)$ tem álgebra de Lie $V \times_{\mathrm{Id}} \mathfrak{gl}(V)$ (compare-se este exemplo com o primeiro).
3. A conexão de que se fala no ponto 2, pode ser a conexão de Levi-Civita de umas certas métricas que se fixam em V. Olhando para V como um grupo de Lie abeliano e fixando um produto escalar em $V(\simeq T_0V)$, a métrica induzida invariante à esquerda (bi-invariante) é plana. Não é difícil ver que, independentemente da estrutura semi-Riemanniana assim construída, as geodésicas são sempre as rectas de V (basta pensar na equação diferencial que as define). Agora, o subgrupo $\mathcal{I}(V)$ de $GA(V)$ das isometrias de V, que neste caso se costuma notar $E_s(V)$, é composto pelas funções f tais que $df_0 \in O(V)$. Assim, o chamado *grupo dos movimentos rígidos* de V é o produto semi-directo

$$E_s(V) = V \oplus_{\mathrm{Id}} O(V).$$

São usuais as abreviaturas $E_0(V) = E(V)$ e $E_1(\mathbb{R}^2) = E(1,1)$. A álgebra de Lie de $E_s(V)$ é $\mathfrak{e}_s(V) = V \times_{\mathrm{Id}} \mathfrak{o}(V)$. Veja-se tambem a este propósito o final do §1.1.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e uma sua derivação ϕ qualquer vamos notar

$$(\mathfrak{h},\phi)=\mathfrak{h}\times_{\sigma}\mathbb{R},$$

onde $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Der}\,\mathfrak{h}$ é dado por $\sigma(1)=\phi$. Tambem escreveremos $\mathfrak{h}\times_{\phi}<u>=(\mathfrak{h},\phi)$, com u denotando formalmente um novo vector. $\mathfrak{h}\times_{\phi}<u>$ é simplesmente a álgebra de Lie livre gerada pelo ideal $\mathfrak{h}$ e por u e tal que $\mathrm{ad}\,(u)=\phi$. Chamamos a $(\mathfrak{h},\phi)$ uma álgebra de Lie *split*.

Claramente, qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que $\mathcal{D}\mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}$, é isomorfa a $(\mathfrak{h},\mathrm{ad}\,(u)_{|\mathfrak{h}})$, onde $\mathfrak{h}$ é um hiperespaço que contém $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ e $<u>$ é um suplementar de $\mathfrak{h}$. São precisamente estas álgebras que nós vamos estudar até ao fim desta secção.

O próximo lema é verdadeiro para qualquer álgebra de Lie reductiva, isto é, não é necessária a hipótese sobre a dimensão (cf.[V,Teorema 3.16.3]). O interesse do resultado está na demonstração trivial, comparada com a do caso geral, que se arranjou.

Lema 3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tal que $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ é semisimples e tem codimensão 1. Então*

$$\mathfrak{g}=\mathcal{Z}(\mathfrak{g})\oplus\mathcal{D}\mathfrak{g}.$$

Demonstração. É sabido que as derivações de uma álgebra de Lie semisimples $\mathfrak{l}$ são todas interiores, isto é, $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{l})=\mathrm{Der}\,(\mathfrak{l})$. Seja agora $u\in\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}=\mathcal{D}\mathfrak{g}\oplus<u>$. $\mathrm{ad}\,(u)_{|\mathfrak{g}'}$ é uma derivação de $\mathfrak{g}'=\mathcal{D}\mathfrak{g}$, então pela hipótese $\exists x\in\mathcal{D}\mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}\,(u)_{|\mathfrak{g}'}=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}(x)=\mathrm{ad}\,(x)_{|\mathfrak{g}'}$. Daqui sai

$$u-x\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}).$$

Obviamente, $\mathfrak{g}=<u-x>\oplus\mathfrak{g}'$, donde, se virmos que $\dim\mathcal{Z}(\mathfrak{g})=1$, está provado. Suponhamos $\lambda(u-x)+y\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ com $\lambda\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathfrak{g}'$. Claro que $y\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Então tambem $y\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}')=0$, c.q.d.

Um caso bem conhecido em que podemos aplicar o lema anterior, sabendo que $\mathfrak{sl}_n$ é semisimples de dimensão n^2-1, é

$$\mathfrak{gl}_n=\mathfrak{z}\oplus\mathfrak{sl}_n$$

onde $\mathfrak{z}$ é então igual a $<I>$. Assim $Z(GL_n)=\{\alpha I:\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.

Recordemos do §1.1 a noção de operador anti-autoadjunto de um espaço vectorial V munido de um produto escalar . De forma semelhante se define *operador autoadjunto*. É aquele que satisfaz

$$<Lx,y>=<x,Ly>$$

para todos os vectores $x,y\in V$.

Lema 4 *Qualquer endomorfismo linear L de um espaço vectorial com produto escalar se decompõe na soma*

$$L = A + S$$

onde A é anti-autoadjunto e S é autoadjunto.

Demonstração. Imediata.[15]

Suponhamos agora que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com um ideal $\mathfrak{u}$ de codimensão 1, tem um produto escalar $<\ ,\ >$ tal que $\mathfrak{u}$ é não degenerado. Escolhamos um vector $b \in \mathfrak{g}$ unitário ortogonal a $\mathfrak{u}$ e denotemos $L = \mathrm{ad}\,(b)_{|\mathfrak{u}}$. Sejam A e S tais como no lema acima. Considerando um grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}$ com estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda induzida pelo produto escalar de $\mathfrak{g}$, o subgrupo associado a $\mathfrak{u}$ é uma subvariedade semi-Riemanniana para a estrutura induzida pela do grupo maior. Como dissemos no §1.2, a conexão induzida $\overline{\nabla}$ em $\mathfrak{u}$ coincide com a sua conexão de Levi-Civita.

Lema 5 (generalizaçãodo lema 5.5 de [M]) *Nas condições acima, para todos os vectores $u, v \in \mathfrak{u}$,*

$$\nabla_b\, b = 0, \qquad \nabla_b\, u = Au, \qquad \nabla_u\, b = -Su$$

$$\nabla_u\, v = \overline{\nabla}_u\, v + \epsilon < Su, v> b, \qquad onde\ \epsilon = <b, b> .$$

Demonstração. Usando a fórmula de Koszul (1.8), p.14, vem

$$<\nabla_b\, b, z> = <[z, b], b> = 0,$$

$$<\nabla_b\, u, z> = \frac{1}{2}\left(<[b, u], z> - <[u, z], b> + <[z, b], u>\right),$$

$\forall z \in \mathfrak{g}$, donde se deduzem as duas primeras fórmulas do lema. A terceira vem, por exemplo, de (1.2), p.8. Para a quarta só temos de calcular

$$\begin{aligned} <\nabla_u\, v, b> &= \frac{1}{2}\left(<[u, v], b> - <[v, b], u> + <[b, u], v>\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + <Lv, u> + <Lu, v>\right) = <Su, v> . \end{aligned}$$

Precisamos de outro lema de álgebra linear.

Lema 6 *Se S é um endomorfismo autoadjunto de um espaço vectorial V com produto escalar, satisfazendo a condição para todo o $x \in V$*

$$<x, x> = 0 \implies <Sx, x> \neq 0,$$

então existe uma base ortonormada de V constituída por vectores próprios de S.

[15] ter em conta o *adjunto* de L, isto é, o operador L^* que satisfaz $<Lx, y> = <x, L^*y>$.

Para a demonstração ver W.H.Greub, *Linear Algebra*, 3^a edição, Springer, p.272.

Demonstração do lema 15 do §1.3.2. Se $b \perp \mathfrak{g}'$ então $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{u} =< b >^\perp$, que é um ideal de codimensão 1 não degenerado. Notando $L = A + S$ como acima, temos, se $<x,x>= 0$ $(x \neq 0)$,

$$<Sx,x>=<(L-A)x,x>=<Lx,x>\neq 0.$$

Existe então uma base ortonormada $(u_i)_{2\leq i\leq n}$ de vectores próprios de S (n é a dimensão de $\mathfrak{g}$). Temos, veja-se (1.5) ou (1.4), p.10,

$$r(b) = \epsilon \sum_i K(b,u_i) = \sum_i \epsilon_i <R(b,u_i)b,u_i>,$$

onde $\epsilon =<b,b>$, $\epsilon_i =<e_i,e_i>$. Ora, sendo λ_i o valor próprio de u_i,

$$\begin{aligned} <R(b,u_i)b,u_i> &= -<\nabla_b \nabla_{u_i} b,u_i> + <\nabla_{u_i} \nabla_b b,u_i> + <\nabla_{[b,u_i]} b,u_i> \\ &= <ASu_i,u_i> + 0 + <-SLu_i,u_i> \\ &= \lambda_i <Au_i,u_i> - <Au_i,\lambda_i u_i> - <S^2u_i,u_i> \\ &= -\lambda_i^2 <u_i,u_i>= -\lambda_i^2\,\epsilon_i. \end{aligned}$$

Agora é fácil ver que $r(b) = -\mathrm{tr}\, S^2 \leq 0$, dando-se a igualdade sse $S = 0$.

Continuando os cálculos desta última demonstração, chegamos ao seguinte resultado de cujos detalhes da prova poupamos o leitor.

Lema 7 (generalizaçãodo lema 5.6 de [M]) *Nas condições do lema 15 do §1.3.2 e da sua demonstração, notando, respectivamente, $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ as curvaturas escalares dos grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{u}$, temos*

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}} - \epsilon\,(\mathrm{tr}\, S)^2 - \epsilon\,\mathrm{tr}\,(S^2).$$

2 O caso da dimensão 4

Veremos no Teorema 2 do Capítulo 3 a caracterização completa da curvatura semi-Riemanniana invariante à esquerda dos grupos de Lie não abelianos de dimensão 2. Note-se que estes fazem forçosamente parte do "exemplo especial".

Em [M] encontramos o estudo das curvaturas Riemannianas dos grupos de Lie de dimensão 3 com métrica invariante à esquerda. O caso da assinatura $(-,+,+)$ foi estudado em [CorPar].

O que se impunha agora e desejávamos apresentar aqui era um estudo completo da curvatura seccional dos grupos de Lie de dimensão 4 munidos de métricas invariantes à esquerda de índice 0, 1 ou 2. O tempo não nos permitiu e finalmente pouco se conseguiu.

2.1 Classificação

Por classificação dos grupos de Lie de dimensão 4 queremos dizer a determinação de todas as álgebras de Lie não isomorfas. Obtivemo-las 'fazendo splits' (cf.§1.6) das de dimensão 3, que já estavam completamente determinadas em [M] de modo simples, depois de mostrar que nenhuma podia ter $\dim \mathfrak{g}' = 4$. Depois, tentámos achar alguns exemplos de grupos de Lie associados àquelas álgebras, mas nem sempre conseguimos. Há três tipos de grupos de Lie que teimam em não ser vistos.

Só já perto do fim do trabalho descobrimos em [OV,III] uma tabela com todas as álgebras de Lie complexas de dimensão 4. Por aí se conclui o próximo resultado (lembrar a fórmula $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^c = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$). Apresentamos, no entanto, a demonstração teórica.

Proposição 1 *Não existem álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão 4 tais que $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Supondo que existem, vejamos primeiro que $\mathfrak{g}$ terá de ser simples. $\mathfrak{g}$ não é resolúvel, logo $\mathfrak{g}$ não tem ideais de dimensão 2 – $\mathfrak{f}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ resolúveis implica $\mathfrak{g}$ resolúvel – nem de dimensão 3 – $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus < b >$, então $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{i}$. Suponhamos que $\mathfrak{g}$ tem um ideal unidimensional $\mathfrak{i} = < b >$. O lema [V,3.18.3] garante a existência de uma subálgebra $\mathfrak{s}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{i}$. $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ implica $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$, donde $\mathfrak{s}$ é simples (ver [M]), com constantes de estrutura nalguma base (x, y, z) dadas por

$$[x, y] = \alpha z \qquad [y, z] = \beta x \qquad [z, x] = \gamma y$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seja $\lambda_x \in \mathbb{R} : [b, x] = \lambda_x b$ e defina-se λ_y, λ_z da mesma forma.

$$\begin{aligned} [[x, y], b] + [[y, b], x] + [[b, x], y] &= 0 \\ (-\alpha\lambda_z - \lambda_y\lambda_x + \lambda_x\lambda_y)\, b &= 0, \end{aligned}$$

donde $\lambda_z = 0$ e, por contas parecidas, $\lambda_x = \lambda_y = 0$. Assim $\mathfrak{i} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, pelo que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s}$, o que é absurdo.

$\mathfrak{g}$ não tem qualquer ideal próprio não nulo, logo $\mathfrak{g}$ é simples. Necessitamos agora, novamente, da Teoria das subálgebras de Cartan (cf.§1.4, p.32) que vamos usar para a álgebra semisimples $\mathfrak{g}^c$. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^c$ e

$$\mathfrak{g}^c = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

uma decomposição por raízes de $(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{h})$. A teoria revela que os *subespaços raíz* $\mathfrak{g}_\alpha$ são unidimensionais, como já tínhamos referido, e aparecem aos pares, isto é, $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$ (cf.[V,corolário 4.3.2]). Daqui se conclui que $\mathfrak{h}$ só pode ter dimensão 2. Partindo das igualdades

$$[h_1, h_2] = 0, \qquad [h_i, y] = \alpha(h_i)y, \qquad [h_i, z] = -\alpha(h_i)z,$$

onde (h_1, h_2) é uma base de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_\alpha =< y >$, $\mathfrak{g}_{-\alpha} =< z >$ e $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ é dada por $\alpha(h_i) \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$, se deduz que $\mathcal{D}\mathfrak{g}^c$ tem no máximo dimensão 3, o que é absurdo. Está demonstrada a proposição.

Toda a álgebra de Lie quadridimensional é então do tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\phi < u >= (\mathfrak{h}, \phi)$$

onde $\mathfrak{h}$ é um ideal que contem $\mathcal{D}\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ é split no sentido da definição da p.49. É fácil perceber que para determinar as álgebras de Lie de dimensão 4 não é preciso fazer splits de todas as de dimensão 3. Basta fazê-lo com as não isomorfas.

Lema 2 *Sejam $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ duas álgebras de Lie e ϕ_1 uma derivação da primeira. Se $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2$, então existe uma derivação ϕ_2 de $\mathfrak{h}_2$ tal que $(\mathfrak{h}_1, \phi_1) \simeq (\mathfrak{h}_2, \phi_2)$.*

Demonstração. Imediata. As derivações são conjugadas pelo isomorfismo de $\mathfrak{h}_1$ para $\mathfrak{h}_2$.

Em [M] encontramos a seguinte classificação das álgebras de Lie de dimensão 3. Prova-se que para as unimodulares existe sempre uma base $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ tal que

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \qquad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \qquad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$$

($\lambda_i \in \mathbb{R}$) e que as classes de isomorfismo são determinadas pelos sinais de λ_1, λ_2, λ_3.

Tabela 1

Grupos de Lie de dimensão 3 (unimodulares)			
$\mathfrak{h}_i$ i	assinatura de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	grupo de Lie associado	
1	$+,+,+$	SU_2	compacto e simples
2	$+,+,-$	SL_2	simples e não compacto
3	$+,+,0$	$E(2)$	resolúvel
4	$+,-,0$	$E(1,1)$	resolúvel
5	$+,0,0$	H_3	nilpotente
6	$0,0,0$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	abeliano

Lembrar que H_3 é o grupo de Heisenberg (ver p.19). Veja-se nos exemplos do §1.6 quem são os grupos $E(2)$ e $E(1,1)$.

Lema 3 (lema 4.10 de [M]) *Se o grupo de Lie conexo H é não unimodular, então a sua álgebra de Lie tem uma base $(e_i)_{1\leq i\leq 3}$ tal que*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3,$$

$$[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3,$$

com $[e_2, e_3] = 0$, e tal que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

tem traço $\alpha + \delta = 2$. Se excluirmos o "caso especial" em que $A = I$, então o determinante $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ dá um invariante por isomorfismo completo[16] *para esta álgebra de Lie.*

Ver as demonstrações destes factos em [M]. Note-se que todos os grupos não unimodulares são resolúveis. Do lema 3 do §1.6, p.49, e da tabela 1 se conclui o próximo resultado.

Proposição 4 *Com excepção dos localmente isomorfos a*

$$\mathbb{R}\oplus SU_2 \qquad \text{ou a} \qquad \mathbb{R}\oplus SL_2,$$

todo o grupo de Lie de dimensão 4 é resolúvel.

---

[16] com *invariante completo* quer-se dizer que está em causa uma equivalência. Por exemplo, no lema, D determina unívocamente uma classe de isomorfismo daquelas álgebras de Lie.

Deduzimos 19 tipos distintos de grupos de Lie. Como não faz parte dos objectivos do nosso trabalho, remetemos o leitor interessado nesta dedução para o apêndice A. Eis, na tabela abaixo, as álgebras de Lie dos 19 grupos. As duas primeiras são as reductivas não comutativas. Destas, apenas $\mathfrak{g}_1$ é compacta.

Legenda. 1. $^* := \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}\mathfrak{g}$; $^{**} := \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ 2. As seguintes condições têm de ser satisfeitas: $\phi \in GL_3$; $\zeta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$, ζ qualquer, $\delta > \frac{1}{4}$, $\gamma \neq 0$. 3. Lembremo-nos que a álgebra de Lie $\mathfrak{f}$ faz parte do "exemplo especial" ($\mathfrak{f} =< \{b, v\} >$, $[b, v] = v$). 4. Repare-se que a condição $\zeta(1-\zeta) \leq \frac{1}{4}$ é sempre satisfeita. 5. $\zeta(1-\zeta), \delta, \gamma$ são invariantes por isomorfismo completos e só entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{14}(\phi)$ é que pode haver isomorfismos (ver como no apêndice A, p.73). Todas as outras são não isomorfas. 6. $\mathfrak{g}_9, \mathfrak{g}_{10}, \mathbb{R}^4$ são as únicas nilpotentes. 7. Podemos ainda descrever:

$$\mathfrak{g}_5 \simeq \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_6 \simeq \mathfrak{h}_4 \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_9 \simeq \mathfrak{h}_5 \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_{18} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{f}$$

onde $\mathfrak{f}$ é não abeliana. 8. O risco a 14/19 da tabela separa as $\mathfrak{g}_i$ que são split de álgebras de Lie unimodulares, das $\mathfrak{g}_i$ que são split de não unimodulares.

Tabela 2

Álgebras de Lie de dimensão 4			
$\mathfrak{g}_i$ i	estrutura de $\mathfrak{g}'$	dim $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	estrutura de $\mathfrak{g}$ (u, x, y, z) é uma base
1	$\mathfrak{h}_1$	1	$\mathfrak{su}_2 \times \mathbb{R}$
2	$\mathfrak{h}_2$	1	$\mathfrak{sl}_2 \times \mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}^2$	0	$[x,y] = z, \quad [y,z] = 0, \quad [z,x] = y,$ $[u,x] = 0, \quad [u,y] = y, \quad [u,z] = z$
4	$\mathbb{R}^2$	0	$\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{f}$ não abeliana
5	$\mathbb{R}^2$	1	$[x,y] = z, \quad [y,z] = 0, \quad [z,x] = y,$ $\mathrm{ad}\,(u) = 0$
6	$\mathbb{R}^2$	1	$[x,y] = -z, \quad [y,z] = 0, \quad [z,x] = y,$ $\mathrm{ad}\,(u) = 0$
7 (ζ)	$\mathfrak{h}_5$	0	$[x,y] = e_3, \quad [x,e_3] = 0, \quad [y,e_3] = 0$ $[u,x] = \zeta x, \quad [u,y] = (1-\zeta)y, \quad [u,e_3] = e_3,$
8 (δ)	$\mathfrak{h}_5$	0	$[x,y] = e_3, \quad [x,e_3] = 0, \quad [y,e_3] = 0$ $[u,x] = y, \quad [u,y] = -\delta x + y, \quad [u,e_3] = e_3,$
9	$\mathbb{R}$	2^{**}	$[x,y] = z, \quad \mathrm{ad}\,(z) = 0, \quad \mathrm{ad}\,(u) = 0$
10	$\mathbb{R}^2$	1^*	$[x,y] = z, \quad \mathrm{ad}\,(z) = 0,$ $[u,x] = 0, \quad [u,y] = x$
11	$\mathfrak{h}_5$	1^*	$[x,y] = z, \quad \mathrm{ad}\,(z) = 0,$ $[u,x] = x, \quad [u,y] = -y$
12	$\mathfrak{h}_5$	1^*	$[x,y] = z, \quad \mathrm{ad}\,(z) = 0,$ $[u,x] = y, \quad [u,y] = -x$
13	0	4	$\mathbb{R}^4$
14 (ϕ)	$\mathfrak{h}_6$	0	$\mathbb{R}^3 \times_\phi < u > \quad (\det \phi \neq 0)$
15	$\mathbb{R}^2$	0	$[u,x] = 0, \quad [u,y] = z, \quad [u,z] = 0,$ $[x,y] = y, \quad [x,z] = z, \quad [y,z] = 0$
16	$\mathbb{R}^2$	1	$\mathrm{ad}\,(u) = 0,$ $[x,y] = y, \quad [x,z] = z, \quad [y,z] = 0$
17 (γ)	$\mathbb{R}^2$	1	$\mathrm{ad}\,(u) = 0,$ $[x,y] = 2y + z, \quad [x,z] = \gamma y, \quad [y,z] = 0$
18	$\mathbb{R}$	2	$\mathrm{ad}\,(u) = \mathrm{ad}\,(x) = 0, \quad [y,z] = z$
19	$\mathbb{R}^2$	1^*	$[u,x] = z, \quad [u,y] = 0,$ $[x,y] = y, \quad \mathrm{ad}\,(z) = 0$

2.2 Métricas bi-invariantes e métricas planas

Vamos primeiro só determinar que grupos de Lie de dimensão 4 aceitam métricas bi-invariantes. Fique desde já acente que quando se falar da unicidade de certa estrutura semi-Riemnniana num grupo de Lie, quer se dizer 'a menos de isomorfismo isométrico'.

Nenhuma álgebra de Lie de dimensão n tem centro de dimensão $n-1$.

Lema 1 *Seja G um grupo de Lie de dimensão n munido de uma métrica $<\ ,\ >$ bi-invariante e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Ou $\mathfrak{g}$ é abeliana ou $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \perp \mathcal{D}\mathfrak{g}$ e $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ tem dimensão $\leq n-3$.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ não é abeliana e $<\ ,\ >$ é bi-invariante

$$\sum_i < [u_i, v_i], z >= \sum_i - < v_i, [u_i, z] >= 0,$$

$\forall u_i, v_i \in \mathfrak{g},\ z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Suponhamos $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = n-2$ e que (u, v) é a base de um suplementar de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Por contas parecidas à última, temos

$$< [u, v], z >=< [u, v], u >=< [u, v], v >= 0,$$

$\forall z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, donde resulta o absurdo $[u, v] = 0$.

Pelo Teorema 8 do §1.4, p.32, e pela tabela 2, concluímos que apenas dois tipos de grupos de Lie conexos admitem métricas Riemannianas bi-invariantes: os abelianos e os localmente isomorfos a $SU_2 \oplus \mathbb{R}$. O corolário 11 do §1.4, p.35, ensina-nos a construir aquelas métricas. Em $SU_2 \oplus \mathbb{R}$ são as induzidas pelos produtos escalares (cf.§1.1)

$$(-\alpha B) \times f,$$

onde $\alpha > 0$, $f \in \odot^2\mathbb{R}$ é definida positiva e B é a forma de Killing de $\mathfrak{su}_2$.

Seja G um grupo de Lie como o do lema 1. A representação adjunta da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e a escolha de uma base de $\mathfrak{g}$ induzem naturalmente um homomorfismo $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{so}_{pq}$, que tambem notamos ad, e onde (p, q) é a assinatura da métrica.

Suponhamos que G tem dimensão 4 e que $(p, q) = (1, 3)$. Um resultado do apêndice B diz que $\mathfrak{so}_{1,3}$ não tem subálgebras de Lie de dimensão 4 ou 5. Para o caso da métrica Lorentziana bi-invariante ficamos então reduzidos à hipótese $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 1$, se G é não abeliano, visto que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ tem dimensão 3.

Proposição 2 *Apenas os grupos de Lie conexos com álgebra de Lie associada isomorfa a $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \times \mathfrak{su}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_2$, $\mathbb{R}^4$ ou a $\mathfrak{g}_{12}$ admitem estruturas Lorentzianas bi-invariantes. As métricas dos associados a $\mathfrak{g}_1$ e a $\mathfrak{g}_2$ são dadas, respectivamente, por*

$$(-f) \times (-\alpha B) \quad e \quad g \times \alpha B$$

onde $\alpha > 0$, $f, g \in \odot^2\mathbb{R}$ são definidas positivas e B é a forma de Killing (das respectivas álgebras simples).[17] *As métricas bi-invariantes dos grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_{12}$ são dadas, na base (u, x, y, z) indicada na tabela 2, pela matriz (da métrica)*

$$\alpha \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. As métricas 'de' $\mathfrak{g}_1$ e de $\mathfrak{g}_2$ são construídas de modo análogo àquela outra Riemanniana que achámos para $\mathfrak{g}_1$. Note-se que a assinatura da forma de Killing de $\mathfrak{sl}_2$ é $(-,+,+)$ (cf.lema 4 do §1.4). Procurando entre as álgebras de Lie que satisfazem $\dim \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 1$, com contas como as que vamos exemplificar para $\mathfrak{g}_5$, vemos que apenas $\mathfrak{g}_{12}$ admite a métrica bi-invariante indicada. Para $\mathfrak{g}_5$, então, vem

$$z \perp u, \qquad <z,z> = <-[y,x], z> = <[y,z], x> = 0,$$
$$<z,x> = <[x,y], x> = -<[x,x], y> = 0,$$
$$<z,y> = \ldots = 0$$

(cf. tabela 2). Resulta $z = 0$, o que é absurdo.

Passemos agora ao caso da assinatura (2,2). Um estudo das subálgebras de Lie $\mathfrak{l} = < \{(u_i, v_i)\}_{1 \le i \le j} >$ de $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{so}_{2,2}$ (cf.apêndice B) de dimensões $j = 3, 4$, baseado na análise de $\mathrm{rk}\,(u_i), \mathrm{rk}\,(v_i)$ permitiu-nos deduzir o próximo resultado.

Proposição 3 *Apenas os grupos de Lie conexos com álgebra de Lie associada isomorfa a $\mathfrak{g}_2$, $\mathbb{R}^4$ ou a $\mathfrak{g}_{11}$ admitem estruturas semi-Riemanniana bi-invariantes de assinatura $(2,2)$. As métricas dos grupos associados a $\mathfrak{g}_2$ são dadas por*

$$(-f) \times B \quad ou \quad g \times (-B)$$

onde $f, g \in \odot^2\mathbb{R}$ são definidas positivas e B é a forma de Killing de $\mathfrak{sl}_2$. As métricas bi-invariantes dos grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_{11}$ são dadas, na base (u, x, y, z) indicada na tabela 2, pela matriz

$$\alpha \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

[17] Por curiosidade anotamos que $\mathbb{R} \oplus SU_2$ com esta estrutura Lorentziana é um "espaço tempo de Robertson-Walker" - cf.[BEE].

Os detalhes da demonstração ficam para outra vez.

Fica tambem para uma próxima oportunidade o estudo da curvatura $R(x,y)z = \frac{1}{4}[[x,y],z]$.

Lembremos o facto enunciado na seccao 1.3.1, p.1.3.1, de não haver métricas planas em grupos de Lie de álgebra de Lie reductiva tais que $\mathcal{D}\mathfrak{g} \perp \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ ($\mathcal{D}\mathfrak{g} \neq 0$). Notemos que este pormenor se adapta perfeitamente às métricas bi-invariantes dadas pelo corolário 11 do §1.4, p.35. Em particular, as métricas de $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ enunciadas nesta secção não são planas.

Achámos métricas planas nos grupos de Lie de dimensão 4 *invariantes à esquerda* de assinaturas $(0,4)$, $(1,3)$ e $(2,2)$, com ajuda do Teorema 6 do §1.3.1. O próximo resultado deve ser confrontado com os de [M] e [Nom] sobre o mesmo assunto no caso da dimensão 3 (ver §1.3.1).

Proposição 4 *Seja G um grupo de Lie de dimensão 4 e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Suponhamos G não abeliano só para simplificar a escrita.*

(i) G admite uma métrica Riemanniana invariante à esquerda plana sse $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}_5$.

(ii) Se G não está associado a $\mathfrak{g}_1$ ou a $\mathfrak{g}_2$, então qualquer métrica Riemanniana invariante à esquerda sobre G, não plana, tem curvatura escalar estrictamente negativa.

(iii) Se $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}_5$ ou a $\mathfrak{g}_6$, então G admite métricas invariantes à esquerda planas de índices 1,2 e 3.

(iv) As métricas planas obtidas no ponto (i) e (iii) são as únicas que o Teorema 6 do §1.3.1 fornece.

Esboço da demonstração. Note-se que $\mathfrak{g}_5 \simeq \mathfrak{e}_2 \times \mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}_6 \simeq \mathfrak{e}_{1,1} \times \mathbb{R}$. (i) prova-se da mesma forma que (iii), pelo que deixamos isso ao cuidado do leitor. (ii) é apenas uma combinação do Teorema 18 do §1.3.3 e da proposição 4, §2.1. Vamos então provar (iii) começando por mostrar (iv) para o caso Lorentziano (os outros casos provam-se da mesma maneira). Supomos que $\mathfrak{g}$ tem um produto escalar $<\,,\,>$ de índice 1 que a deixa nas condições do Teorema 6 do §1.3.1.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u},$$

$\mathfrak{b} \perp \mathfrak{u}$ (abelianos) e $\mathrm{ad}\,(b)$ é anti-autodjunta.

Suponhamos $\dim \mathfrak{b} = 1$. Se é em $\mathfrak{b}=<b>$ que está a direcção tipo tempo, então $\mathrm{ad}\,(b)$ é anti-autoadjunta neste caso sse o for no caso Riemanniano. Assim aparece $\mathfrak{g}_5$, a partir de (ii), com métrica plana. Supomos então $<b,b> > 0$. Notemos $\psi = \mathrm{ad}\,(b)_{|\mathfrak{u}}$ e tambem

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix} (\neq 0)$$

a matriz de ψ numa base ortonormada de $\mathfrak{u}$ (é fácil ver que $\psi^T I_{1,2} = -I_{1,2}\psi$ implica ψ daquela forma). Os valores próprios de ψ são

$$0 \qquad \pm\,\delta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$$

($\delta > 0$), estes últimos, quando existem. Designando u, v, w os vectores próprios em $\mathfrak{u}$ associados a $0, \delta, -\delta$, respectivamente, vê-se logo que o ideal (!) $< \{v - w, b, v+w\} >$, verificando

$$[v-w, b] = -\delta(v+w) \qquad [b, v+w] = \delta(v-w) \qquad [v+w, v-w] = 0,$$

é isomorfo a $\mathfrak{h}_4$, ou seja, $\mathfrak{e}_{1,1}$. Podemos assim concluir que G associado a $\mathfrak{g}_6$ tem uma métrica plana.

Se $\delta, -\delta$ não existem, numa certa base de $\mathfrak{u}$, temos

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}.$$

com $ed < 0$. Daqui vem nova métrica plana para $\mathfrak{g}_5$.

O leitor já percebeu como prosseguem os cálculos, ainda mais fáceis, para os casos $\dim \mathfrak{b} = 2, 3$. Note-se que há várias métricas planas para $\mathfrak{g}_5$ e para $\mathfrak{g}_6$.

Uns cálculos rápidos permitiram-nos, por aplicação da proposição de G.S.Birman que se encontra no §1.3.1, achar métricas de Lorentz planas em $\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_{16}$.

Em [J2] encontrámos o seguinte Teorema sobre métricas Riemannianas de Einstein.

Teorema 5 (G.Jensen,1969) *Seja G um grupo de Lie de dimensão 4 munido de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda. Então G é um espaço de Einstein sse a sua álgebra de Lie é uma das seguintes, com o produto interno definido, a menos de mudança de escala, por $x_1, \ldots, x_4$ ser uma base ortonormada. Valores distintos de t definem álgebras de Lie não isomorfas.*

$$1. \quad \mathbb{R}^4 \;\; ou \quad \begin{array}{ll} [x_1, x_2] = 0 & [x_2, x_3] = 0 \\ [x_1, x_3] = x_4 & [x_2, x_4] = 0 \\ [x_1, x_4] = -x_3 & [x_3, x_4] = 0. \end{array}$$

São as métricas planas da proposição anterior, ponto (i).

$$2. \quad \begin{array}{ll} [x_1, x_2] = x_2 - tx_3 & [x_2, x_3] = 2x_4 \\ [x_1, x_3] = tx_2 + x_3 & [x_2, x_4] = 0 \\ [x_1, x_4] = 2x_4 & [x_3, x_4] = 0, \quad 0 \le t < \infty. \end{array}$$

A curvatura seccional verifica $-4 \leq K \leq 1$.

$$3.\quad \begin{array}{ll} [x_1, x_2] = x_2 & [x_2, x_3] = 0 \\ [x_1, x_3] = x_3 - tx_4 & [x_2, x_4] = 0 \\ [x_1, x_4] = tx_3 + x_4 & [x_3, x_4] = 0, \quad 0 \leq t < \infty. \end{array}$$

Neste caso K *é constante igual a* -1.

$$4.\quad \begin{array}{ll} [x_1, x_2] = 0 & [x_2, x_3] = 0 \\ [x_1, x_3] = x_3 & [x_2, x_4] = x_4 \\ [x_1, x_4] = 0 & [x_3, x_4] = 0. \end{array}$$

$K = -1$ *constante.*

Para a demonstração ver [J2].

É fácil verificar que

$$\mathfrak{k}^1 \simeq \mathfrak{g}_5 \qquad \mathfrak{k}^2(t=0) \simeq \mathfrak{g}_7(\frac{1}{2}) \simeq \mathfrak{g}_7(-\frac{1}{2})$$

$$\mathfrak{k}^2(t>0) \simeq \mathfrak{g}_8(\frac{1+t^2}{4}) \qquad \mathfrak{k}^3(t) \simeq \mathfrak{g}_{14} \qquad \mathfrak{k}^4 \simeq \mathfrak{g}_4,$$

onde $\mathfrak{k}^i$ denota a álgebra do ponto i do Teorema acima.

3 O "exemplo especial"

Este capítulo é dedicado a um género de grupos de Lie que J.Milnor referiu em [M] como fazendo parte de um "exemplo especial". Trata-se da seguinte classe que vamos, como em [Nom], denotar por $\mathfrak{S}$. Um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e dimensão $n \geq 2$ está em $\mathfrak{S}$ sse é não comutativo e satisfaz

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad [x, y] \text{ é combinação linear de } x \text{ e de } y.$$

Em [M] demonstra-se que $G \in \mathfrak{S}$ sse a sua álgebra de Lie é do tipo $\mathfrak{n} \times_{\mathrm{Id}} < b >$, onde $\mathfrak{n}$ é um ideal (de codimensão 1) abeliano. Quer dizer, $\exists b \in \mathfrak{g}$ tal que

$$[b, x] = x, \quad [x, y] = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{n}.$$

Daqui se percebe logo que G é resolúvel. É provado tambem que todo o elemento do "exemplo especial" tem, para qualquer métrica Riemanniana invariante à esquerda, curvatura seccional constante negativa. E mais, $\mathfrak{S}$ caracteriza-se por

$$G \in \mathfrak{S} \iff \begin{array}{l} \text{Toda a métrica Riemanniana invariante à esquerda} \\ \text{sobre } G \text{ tem curvatura seccional de sinal constante.} \end{array}$$

Generalizámos estes resultados a métricas de qualquer assinatura e é isso que vamos mostrar aqui. Inicialmente obtivemos o nosso resultado fazendo contas como em [Nom]. Introduzindo o lema que se segue, que abrange uma classe um pouco maior que $\mathfrak{S}$, tudo fica mais simples.

Lema 1 (generalização do lema 3.1 de [Bar]) *Seja G um grupo de Lie com métrica semi-Riemanniana invariante à esquerda e tal que a sua álgebra de Lie se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times_L < b >$$

onde b é um vector unitário e ortogonal a $\mathfrak{n}$. $\mathfrak{n}$ é um ideal abeliano e $L = \mathrm{ad}\,(b)_{|\mathfrak{n}} = \lambda \mathrm{Id} + A$, onde A é a parte anti-autoadjunta de L e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, notando $\epsilon = <b, b> = \pm 1$, G tem curvatura seccional constante $K = -\epsilon\lambda^2$.

Demonstração (decalcada da de [Bar]). A curvatura seccional é constante $K = -\epsilon\lambda^2$ sse $R(x, y)z = -\epsilon\lambda^2 (x \wedge y)z$, onde se denota

$$(x \wedge y)z = <z, x>\, y - <z, y>\, x$$

(ver §1.2, p.11). Usando o lema 5 do §1.6, p.50, vem

$$\nabla_b b = 0 \qquad \nabla_b u = Au \qquad \nabla_u b = -\lambda u$$

$$\nabla_u v = \epsilon\lambda <u,v> b, \qquad \forall u,v \in \mathfrak{n}.$$

Então, para quaisquer $u, v, w \in \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned}
R(u,v)w &= -\nabla_u \nabla_v w + \nabla_v \nabla_u w = -\epsilon\lambda <v,w> \nabla_u b + \epsilon\lambda <u,w> \nabla_v b = \\
&= \epsilon\lambda^2(<w,v> u - <w,u> v) = -\epsilon\lambda^2(u \wedge v)(w) \\
R(u,v)b &= -\nabla_u \nabla_v b + \nabla_v \nabla_u b = \lambda\nabla_u v - \lambda\nabla_v u = 0 = -\epsilon\lambda^2(u \wedge v)(b) \\
R(b,u)v &= -\nabla_b \nabla_u v + \nabla_u \nabla_b v + \nabla_{\lambda u + Au} v = \\
&= -\epsilon\lambda <u,v> \nabla_b b + \nabla_u Av + \epsilon\lambda <\lambda u + Au, v> b = \\
&= \epsilon\lambda(<u,Av> + \lambda <u,v> + <Au,v>)b = -\epsilon\lambda^2(b \wedge u)(v) \\
R(b,u)b &= -\nabla_b \nabla_u b + \nabla_u \nabla_b b + \nabla_{\lambda u + Au} b = \\
&= \lambda\nabla_b u - \lambda(\lambda u + Au) = \lambda(Au - \lambda u - Au) = -\epsilon\lambda^2(b \wedge u)(b)
\end{aligned}$$

Está provado.

Segue-se o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2 (generalização do Teorema 1 de [Nom]) *Seja G um grupo de Lie de dimensão n pertencente à classe $\mathfrak{S}$. Então*

(i) Qualquer estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda sobre G, de assinatura $(p, n-p)$, tem curvatura seccional K constante.

Nomeadamente, K é constante negativa, se $p = 0$, ou positiva, se $p = n$.

(ii) Inversamente, dados $p \in \mathbb{N}$, $0 < p < n$ e $K \in \mathbb{R}$ quaisquer, podemos construir uma métrica invariante à esquerda de assinatura $(p, n-p)$ com K de curvatura seccional, constante por (i). Podemos ainda concluir o mesmo nos casos $p = 0, K < 0$ e $p = n, K > 0$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g} =< b > \oplus \mathfrak{n}$ a álgebra de Lie do grupo de Lie G.

$$[b,u] = u \qquad [u,v] = 0, \qquad \forall u,v \in \mathfrak{g}.$$

(i) Suponhamos que $\mathfrak{g}$ tem um produto escalar.

Caso I. $< \, , \, >_{|\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$ não degenerada.

Já se sabe que existe um vector unitário $b' \notin \mathfrak{n} :< b', \mathfrak{n} >= 0$. Escrevendo $b' = \lambda b + u_0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathfrak{n}$ temos

$$[b', v] = \lambda v \qquad \forall v \in \mathfrak{n}.$$

Aplicando o lema anterior a este caso simples em que o operador $A = 0$, temos o resultado, com as particularidades óbvias para os índices 0 e n.

Caso II. $<\,,\,>_{|\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$ é degenerada.
Existe $e\in\mathfrak{n}$ tal que $<e,\cdot>=0$ sobre $\mathfrak{n}$. Então, sendo $<\,,\,>$ não degenerada sobre $\mathfrak{g}$, $<e,b>\neq 0$. Claro que se pode logo supôr

$$<e,b>=1.$$

Denotemos

$$a(x)=<e,x> \qquad C(x,y)=a(x)y-a(y)x, \qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Imediatamente se reconhece a linearidade e bilinearidade, respectivamente, de a e C. Como $\ker a=\mathfrak{n}$ e C é anti-simétrica e

$$C(b,u)=u=[b,u] \qquad C(u,v)=0=[u,v], \qquad \forall u,v\in\mathfrak{n},$$

vem que $C=[\,,\,]$. Da fórmula de Koszul (1.8) deduz-se então

$$<\nabla_x y,z>=\frac{1}{2}(<[x,y],z>-<[y,z],x>+<[z,x],y>)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(a(x)<y,z>-a(y)<x,z>-a(y)<z,x>+a(z)<y,x>-a(x)<z,y>+$$

$$+a(z)<x,y>\Big)=a(z)<x,y>-a(y)<x,z>=<x,y><e,z>-a(y)<x,z>.$$

Então

$$\nabla_x y=<x,y>e-a(y)x$$

e daqui vem

$$R(x,y)z=-\nabla_x\nabla_y z+\nabla_y\nabla_x z+\nabla_{[x,y]}z=$$

$$=-<y,z>\nabla_x e+a(z)\nabla_x y-a(z)\nabla_y x+<x,z>\nabla_y e+a(x)\nabla_y z-a(y)\nabla_x z=$$

$$=-<y,z><x,e>e+a(z)<x,y>e-a(z)a(y)x$$

$$-a(z)<y,x>e+a(z)a(x)y+<x,z><y,e>e+$$

$$+a(x)<y,z>e-a(x)a(z)y-a(y)<x,z>e+a(y)a(z)x=0$$

(ii) Se se quer curvatura seccional $K>0$ escolhe-se a seguinte métrica. Tomamos $b'=\sqrt{K}b$ e impomos

$$<b',b'>=-1 \qquad <b',\mathfrak{n}>=0$$

$$<\,,\,>_{\mathfrak{n}} \text{ de índice } q,\quad 0\leq q\leq n-1.$$

Pelo que vimos acima, com a métrica induzida por este produto escalar, G tem curvatura seccional constante K.

Para $K < 0$ faz-se o mesmo com $b' = \sqrt{-K}b$ e tomando o produto escalar em $\mathfrak{g}$

$$<b', b'>= 1 \qquad <b', \mathfrak{n}>= 0$$

$$< , >_{\mathfrak{n}} \text{ de índice } p, \quad 0 \leq p \leq n - 1.$$

Finalmente, se se quer $K = 0$, basta, como se viu, tomar uma métrica em G que seja degenerada sobre $\mathfrak{n}$. Esta tem necessáriamente índice $0 < p < n$.

Suponhamos, daqui em diante, uma dimensão $n \geq 2$ fixa para os nossos grupos de Lie e notemos tambem por $\mathfrak{S}$ esta subclasse de $\mathfrak{S}$.

Observações. Sejam $\mathfrak{G}^-(p)$ (respectivamente: $\mathfrak{G}^+(p)$, $\mathfrak{G}^0(p)$) a classe dos grupos de Lie (quaisquer) que admitem uma estrutura semi-Riemanniana invariante à esquerda de assinatura $(p, n-p)$ e de curvatura seccional constante negativa (respectivamente: positiva, nula).

a) J.Milnor em [M] e E.Heintze, pelo Teorema 10 do §1.3.1, p.21, provaram: $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}^-(0)$.

b) F.Barnet em [Bar], veja-se o Teorema 11 do §1.3.1, mostrou: $\mathfrak{G}^-(0) \subset \mathfrak{G}^+(1)$.

c) K.Nomizu provou: $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}^-(1) \cap \mathfrak{G}^0(1) \cap \mathfrak{G}^+(1)$. É fácil ver que tambem se pode provar esta última inclusão com o resultado de F.Barnet. a) e b) implicam $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}^+(1)$. Sendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus < b >$ a álgebra de Lie de um elemento de $\mathfrak{S}$, como acima, conclui-se que todo o elemento $\neq 0$ de $\mathfrak{n}$ gera um ideal unidimensional. Combinando este facto com a) e aplicando o Teorema 11 do §1.3.1 temos as restantes inclusões.

d) Generalizámos atrás $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}^-(p) \cap \mathfrak{G}^0(p) \cap \mathfrak{G}^+(p)$ $(0 < p < n)$. Além das questões, tipo as que F.Barnet pôs, sobre que $\mathfrak{G}^{-,+}(p) \subset \mathfrak{G}^{+,-}(q)$, é-nos suscitada a seguinte: Dado $G \in \mathfrak{G}^-(0)$, será que $G \in \mathfrak{G}^-(p) \cap \mathfrak{G}^0(p) \Leftrightarrow$ a álgebra de Lie de G tem um ideal de dimensão p ?

Vamos notar $\mathfrak{F}(p)$ a classe dos grupos de Lie tais que toda a métrica de assinatura $(p, n-p)$ tem curvatura seccional de sinal constante.

Como se disse atrás, em [M] encontramos $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(0)$. Já vimos que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}(p)$. Olhando para o Teorema 17 do §1.3.2 concluímos

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(0) = \mathfrak{F}(1) = \mathfrak{F}(2) = \cdots = \mathfrak{F}(n).$$

Note-se por último que, pelo Teorema de Kulkarni 1.2, §1.2, p.11, para $0 < p < n$, considerar que a curvatura seccional K tem sinal constante é o mesmo que considerar que K é constante.

Assim se conclui que não vale a pena procurar outros grupos de Lie para os quais se tenham os mesmos resultados simples do Teorema 2.

Apêndice A

O objectivo deste apêndice é determinar todas as álgebras de Lie de dimensão 4 e dar os exemplos que conhecemos de grupos de Lie que lhes estão associados. Particularmente os simplesmente conexos. A lista final com os resultados obtidos encontra-se no §2.1. Aqui, quando falarmos em $\mathfrak{g}_i$ estamo-nos a referir à álgebra de Lie número i da tabela 2 do §2.1. Da mesma forma, o índice numa álgebra de Lie de dimensão 3 $\mathfrak{h}_i$ faz referência à tabela 1 daquela secção.

Frizemos que por base se entende um sistema ordenado de vectores que forme uma base.

NOTA: Quando está subentendida a base, identificamos as aplicações com as suas matrizes.

Caso unimodular

Vamos começar por arranjar splits (cf.§1.6) de dimensão 4 com as álgebras de Lie unimodulares de dimensão 3, que, como sabemos, são todas descritas numa base $(e_i)_{1\leq i\leq 3}$ por

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \qquad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \qquad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$$

($\lambda_i \in \mathbb{R}$) e onde as classes de isomorfismo são determinadas pelos sinais de λ_1, λ_2, λ_3. Supomos logo $\lambda_1 = 0$ pois com todos os $\lambda_i \neq 0$ já se viu no §2.1 que se obtêm $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$.

Antes de avançarmos para esse caso vejamos os grupos de Lie que encontrámos associados[18] a $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_1$ (só os compactos): $\mathbb{T}\oplus SU_2$, $\mathbb{T}\oplus O_3$, $\mathbb{T}\oplus SO_3$, U_2, $\mathbb{T}\oplus Sp(1)$, $Sp(2)\cap GL_4(\mathbb{R})$ (note-se que $SU_2 \simeq Sp(1) \sim S^3$ e é simplesmente conexo e que $GL_4(\mathbb{R})$ é fechado em $GL_4(\mathbb{C})$).

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_2$: GL_2, $GL_2^+ \simeq \mathbb{R}\oplus SL_2 \simeq \mathbb{R}\oplus Sp(1,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}\oplus O_{1,2}$, $U_{1,1}$, $\mathbb{R}\oplus SU_{1,1}$, $Sp(2,\mathbb{R})\cap O_{2,2}$ ($\widetilde{GL_2^+} =?$, $\widetilde{SL_2} =?$).

Seja $\mathfrak{h}$ uma das álgebras $\mathfrak{h}_i$ e $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ uma derivação de $\mathfrak{h}$. Sejam $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ tais que

$$\phi(e_i) = \sum_j \xi_{ij} e_j.$$

As seguintes equações são fundamentais.

$$0 = \phi(\lambda_1 e_1) = \phi[e_2, e_3] = [\phi e_2, e_3] + [e_2, \phi e_3] =$$

[18] ver em S.Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic (1978), uma descrição das subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ clássicas.

$$= \xi_{21}[e_1, e_3] + \xi_{22}[e_2, e_3] + \xi_{31}[e_2, e_1] + \xi_{33}[e_2, e_3] = -\xi_{21}\lambda_2 e_2 - \xi_{31}\lambda_3 e_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi_{21}\lambda_2 & = & 0 \\ \xi_{31}\lambda_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{4.10}$$

$$\phi(\lambda_2 e_2) = \phi[e_3, e_1] = [\phi e_3, e_1] + [e_3, \phi e_1] =$$

$$= \xi_{32}[e_2, e_1] + \xi_{33}[e_3, e_1] + \xi_{11}[e_3, e_1] + \xi_{12}[e_3, e_2] = -\xi_{32}\lambda_3 e_3 + \lambda_2(\xi_{11} + \xi_{33})e_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & = & \xi_{21}\lambda_2 \\ \lambda_2(\xi_{11} + \xi_{33}) & = & \lambda_2\xi_{22} \\ -\xi_{32}\lambda_3 & = & \lambda_2\xi_{23}. \end{array} \right. \tag{4.11}$$

$$\phi(\lambda_3 e_3) = \phi[e_1, e_2] = [\phi e_1, e_2] + [e_1, \phi e_2] =$$

$$= \xi_{11}[e_1, e_2] + \xi_{13}[e_3, e_2] + \xi_{22}[e_1, e_2] + \xi_{23}[e_1, e_3] = -\xi_{23}\lambda_2 e_2 + \lambda_3(\xi_{11} + \xi_{22})e_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} 0 & = & \lambda_3\xi_{31} \\ -\xi_{23}\lambda_2 & = & \lambda_3\xi_{32} \\ \lambda_3(\xi_{11} + \xi_{22}) & = & \lambda_3\xi_{33}. \end{array} \right. \tag{4.12}$$

(4.10), (4.11) e (4.12) resumem-se a

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \xi_{21}\lambda_2 & = & 0 \\ \xi_{31}\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2(\xi_{11} + \xi_{33}) & = & \lambda_2\xi_{22} \\ -\xi_{32}\lambda_3 & = & \lambda_2\xi_{23} \\ \lambda_3(\xi_{11} + \xi_{22}) & = & \lambda_3\xi_{33}. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

Caso I. $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

Como se disse, só o sinal interessa, pelo que podemos logo pôr $\lambda_2 = 1$, sendo o caso em que $\lambda_2 = -1$ análogo e não trazendo nada de novo.

De (4.13) vem $\xi_{21} = \xi_{31} = \xi_{11} = 0$, $\xi_{22} = \xi_{33}$, $\xi_{32} = -\frac{\xi_{23}}{\lambda_3}$. Quer dizer,

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi_{12} & \xi_{22} & -\frac{\xi_{23}}{\lambda_3} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{22} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$\partial\mathfrak{h}$ tem dimensão 4! É fácil ver que $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}) = 0$, logo, $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})$ tem dimensão 3. Seja $< \psi >$ um suplementar de $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})$ em $\partial\mathfrak{h}$. Seja $\phi = \mathrm{ad}\,(x) + \alpha\psi$ uma derivação qualquer de $\mathfrak{h}$ ($x \in \mathfrak{h}$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\phi < u > & \longrightarrow & \partial\mathfrak{h} \\ e_i & \mapsto & \mathrm{ad}\,(e_i) \\ u & \mapsto & \phi \end{array}$$

é um isomorfismo se $\alpha \neq 0$, que é a condição necessária para a sobrejectividade da aplicação. Basta ver então que

$$\mathrm{ad}\,[u, e_i] = \mathrm{ad}\,(\phi e_i) = \phi \mathrm{ad}\,(e_i) - \mathrm{ad}\,(e_i)\phi = [\phi, \mathrm{ad}\,(e_i)].$$

Uma vez que $\mathfrak{h}$ é unimodular, o suplementar ψ de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ pode ser

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(veja-se (4.14)). $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\begin{array}{ll} [u, e_1] = 0 & [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3 \\ [u, e_2] = e_2 & [e_3, e_1] = e_2 \\ [u, e_3] = e_3 & [e_2, e_3] = 0, \end{array}$$

pelo que se obtem $\mathfrak{g}_3$ no caso $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_3$ ($\lambda_3 > 0$) e $\mathfrak{g}_4$ no caso $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_4$ ($\lambda_3 < 0$).

Se $\alpha = 0$, isto é, se a derivação ϕ é interior, rápidamente se conclui, com a mudança de variáveis $u \mapsto u - x$, que podemos supôr $\phi = 0$ e, logo, que $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{g}_5 = \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$ ou a $\mathfrak{g}_6 = \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_4$.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_3$: $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}_3 \simeq \mathrm{Aut}\,(\widetilde{E(2)}^0)$. Pela exponencial e de $\mathfrak{gl}_3$ determinámos a componente conexa de e do primeiro grupo. É gerada pelos subgrupos a um parâmetro

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\mathrm{sen}t \\ 0 & \mathrm{sen}t & \cos t \end{pmatrix}$$

($t \in \mathbb{R}$, $e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função exponencial). Como o último daqueles subgrupos é difeomorfo a S^1, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{h}_3)^0 = \mathsf{e}^{\partial \mathfrak{h}_3}$ não é simplesmente conexo. $\widetilde{\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{h}_3)}^0$ descobre-se então com a ajuda do corolário 2 do §1.6, p.47.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_4$: $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}_4 \simeq \mathrm{Aut}\,E(1,1)$ e $GA(\mathbb{R}) \times GA(\mathbb{R})$. Pela exponencial e determinámos a componente conexa de e do primeiro grupo. É gerada pelos subgrupos a um parâmetro

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-it) & i\mathrm{sen}(-it) \\ 0 & i\mathrm{sen}(-it) & \cos(-it) \end{pmatrix}$$

($t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$). O facto de estes subgrupos serem todos difeomorfos a $\mathbb{R}$ prova que $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{h}_4)^0 = \mathsf{e}^{\partial \mathfrak{h}_4}$ é simplesmente conexo (cf.[OV,III]). A transformação de variáveis

$$(u, e_1, e_2, e_3) \mapsto \left(\frac{u + e_1}{2}, \frac{u - e_1}{2}, \frac{-e_2 - e_3}{2}, \frac{-e_2 + e_3}{2}\right)$$

mostra que $\mathfrak{g}_4$ é isomorfa ao produto $\mathfrak{f} \times \mathfrak{f}$ onde $\mathfrak{f}$ é a única álgebra de Lie não comutativa de dimensão 2. Esta tem grupo de Lie associado $GA(\mathbb{R})$, que é simplesmente conexo (cf.§1.6).

Encontrámos ainda duas outras álgebras de Lie isomorfas a $\mathfrak{g}_3$ (+) ou a $\mathfrak{g}_4$ (-):

$$\mathfrak{l}_{\pm} = \left\{ A \in \mathfrak{gl}_3 : A^T \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \right\}.$$

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_5$ (simplesmente conexo):[19] $\mathbb{R} \oplus \widetilde{E(2)}^0$.
Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_6$ (simplesmente conexo): $\mathbb{R} \oplus E(1,1)$.

Caso II. $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$.

Supomos logo $\lambda_3 = 1$. De (4.13) vem

$$\begin{cases} \xi_{31} = \xi_{32} = 0 \\ \xi_{11} + \xi_{22} = \xi_{33}. \end{cases}$$

Qualquer derivação ϕ de $\mathfrak{h}_5$ é do tipo

$$\phi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & 0 \\ \xi_{12} & \xi_{22} & 0 \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{11} + \xi_{22} \end{pmatrix}.$$

$\partial\mathfrak{h}_5$ tem dimensão 6. $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_5$ tem dimensão 2, pois que $\mathrm{ad}\, e_3 = 0$. Tem-se

$$\mathrm{ad}\, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ad}\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Já se percebeu que podemos logo tomar, para achar as álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_5 \times_\phi < u >$, uma derivação ϕ com componente nula em $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_5$, isto é, podemos logo tomar $\xi_{13} = \xi_{23} = 0$. Chamando

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}.$$

temos então

$$\begin{array}{lll} [u, e_1] = ae_1 + de_2 & [u, e_2] = ce_1 + be_2 & [u, e_3] = (a+b)e_3 \\ \quad [e_1, e_2] = e_3 & \quad [e_3, e_1] = 0 & \quad [e_2, e_3] = 0 \end{array} \tag{4.15}$$

Os cálculos mostram que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0$ sse $a + b \neq 0$.

Caso II.1. Se $a + b \neq 0$.

Dividindo u por $a + b$ se necessário, podemos já supôr $a + b = 1$. O polinómio característico de A é

$$p(t) = \begin{vmatrix} a - t & c \\ d & b - t \end{vmatrix} = t^2 - (a+b)t + ab - cd = t^2 - t + \det A.$$

[19] ao contrário de, por exemplo, $\widetilde{SL_2}$, fácilmente se determina $\widetilde{E(2)}^0$.

$p(t)$ tem raízes sse $1 - 4\det A \geq 0 \Leftrightarrow \det A \leq \frac{1}{4}$.
Caso II.1.1. $\det A \leq \frac{1}{4}$.

Seja ζ uma raíz de A. Como $\operatorname{tr} A = 1$, a outra raíz é $1 - \zeta$. Lembrando que A corresponde a uma transformação linear do subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado por $\{e_1, e_2\}$, temos, para algum $x, y \in < \{e_1, e_2\} >$, (ver (4.15))

$$[u, x] = \zeta x \qquad [u, y] = (1-\zeta)y \qquad [u, e_3] = e_3$$
$$[x, y] = \eta e_3 \qquad [x, e_3] = 0 \qquad [y, e_3] = 0$$

($\eta \in \mathbb{R}$). Trocando e_3 por ηe_3, continuaremos a ter $[u, e_3] = e_3$, $[x, e_3] = 0$, e $[y, e_3] = 0$ e ganhamos $[x, y] = e_3$.

Se $\zeta = 0$ ou $\zeta = 1$. S.p.g. supomos $\zeta = 0$. Então $\mathfrak{i} =< \{u, y, e_3\} >$ é um ideal e $\operatorname{ad}(x)_{|\mathfrak{i}}$ é uma derivação de $\mathfrak{i}$. Como $\mathfrak{i}$ é não unimodular (cp. lema 3 do §2.1) deixamos este caso para mais tarde.

Se $\zeta \neq 0$ e $\zeta \neq 1$. Encontramos as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_7(\zeta)$.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_7(\zeta)$: Os únicos grupos de Lie que arranjámos associados a estas álgebras foram calculados pela exponencial de $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}_7(\zeta)) \subset \mathfrak{gl}_4$, já que a representação adjunta é fiel.

São gerados por

$$\mathrm{e}^{t\operatorname{ad} u} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{t\zeta} & & \\ & & e^{t(1-\zeta)} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{t\operatorname{ad} x} = I + t\operatorname{ad} x \qquad \begin{array}{l} \mathrm{e}^{t\operatorname{ad} y} = I + t\operatorname{ad} y \\ \mathrm{e}^{t\operatorname{ad} e_3} = I + t\operatorname{ad} e_3 \end{array}$$

($t \in \mathbb{R}$). Estes grupos são todos simplesmente conexos.
Caso II.1.2. $\det A > \frac{1}{4}$.

A não tem valores próprios. Existem $x, y \in < \{e_1, e_2\} >$ linearmente independentes tais que $[u, x] = y$. Seja $\delta = |A|$. Então $[u, y] = -\delta x + y$ já que $\operatorname{tr} A = 1$. Temos assim as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_8(\delta)$ (ver (4.15))

$$[u, x] = y \qquad [u, y] = -\delta x + y \qquad [u, e_3] = e_3$$
$$[x, y] = e_3 \qquad [x, e_3] = 0 \qquad [y, e_3] = 0.$$

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_8(\delta)$: Novamente, só conseguimos arranjar um exemplo de um grupo de Lie associado a estas álgebras, atravez das suas representações adjuntas e da exponencial e.

Proposição 3 *O determinante da matriz A é um invariante completo por isomorfismo para as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_7(\zeta)$ e $\mathfrak{g}_8(\delta)$ acima ($\zeta(1-\zeta) \leq \frac{1}{4}$, $\delta > \frac{1}{4}$).*

Demonstração. Se $\zeta(1-\zeta) = 0$, então $\mathcal{D}\mathfrak{g}_7(\zeta)$ tem dimensão 2. $\mathfrak{g}_7(\zeta)$ não é isomorfa a nenhuma das outras $\mathfrak{g}_7$ ou $\mathfrak{g}_8$.

Sejam $\zeta, \tilde{\zeta} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tais que $\zeta(1-\zeta) \neq \tilde{\zeta}(1-\tilde{\zeta})$. Então $\zeta \neq \tilde{\zeta}, 1-\tilde{\zeta}$. Seja $(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{e}_3)$ uma base de $\mathfrak{g}_7(\tilde{\zeta})$ nas 'mesmas' condições da base (u, x, y, e_3)

de $\mathfrak{g}_7(\zeta)$. Suponhamos que existe um isomorfismo $g: \mathfrak{g}_7(\tilde{\zeta}) \to \mathfrak{g}_7(\zeta)$. Como g aplica os ideais derivados nos ideais derivados e $\mathcal{D}\mathcal{D}\mathfrak{g}_7 =< e_3 >$, a matriz de g da base $(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{e}_3)$ para a base (u, x, y, e_3) é

$$g = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & 0 \\ c & c_1 & c_2 & 0 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

Ora, de $d_3 e_3 = g(\tilde{e}_3) = [g(\tilde{u}), g(\tilde{e}_3)] = a d_3 e_3$ vem $a = 1$. De

$$[g(\tilde{u}), g(\tilde{x})] = \zeta b_1 x + (1 - \zeta) c_1 y + d_1 e_3 + (bc_1 - cb_1) e_3$$

$$\text{e } [g(\tilde{u}), g(\tilde{x})] = \tilde{\zeta} g(\tilde{x}) = \tilde{\zeta} b_1 x + \tilde{\zeta} c_1 y + \tilde{\zeta} d_1 e_3$$

vem $b_1 = c_1 = 0$. Então $\det g = 0$. Absurdo.

Da mesma forma se vê que, para $\tilde{\delta}, \delta > \frac{1}{4}$ distintos, $\mathfrak{g}_8(\delta) \not\simeq \mathfrak{g}_8(\tilde{\delta})$. Por análise das álgebras de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}''$ respectivas de $\mathfrak{g}_7(\zeta)$ e $\mathfrak{g}_8(\delta)$, se conclui rápidamente que estas nunca são isomorfas. Está tudo demonstrado.

Caso II.2. Se $a + b = 0$.
Caso II.2.1. Se $A = 0$.

O centro $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< \{u, e_3\} >$. $\mathfrak{g}$ fica determinada por (ver (4.15))

$$\operatorname{ad}(u) = \operatorname{ad}(e_3) = 0 \qquad [e_1, e_2] = e_3.$$

$\mathfrak{g}_9 = \mathfrak{h}_5 \times <u>$ é nilpotente.

É fácil construir representações de $\mathfrak{h}_5$. Por exemplo, a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg H_3 das matrizes 3×3 triangulares superiores e diagonal nula. Outro exemplo, a álgebra de Lie gerada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_9$: Só conseguimos arranjar de um tipo: as somas directas dos grupos de Lie de dimensão 1 com H_3.

(Questão: haverá algum grupo de Lie conexo associado a $\mathfrak{h}_5$ não simplesmente conexo ?)

Caso II.2.2. Se $A \neq 0$ e $|A| = 0$.

Vem

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & c \\ d & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ d & -a \end{bmatrix} = 0$$

Então existe base (x, y) de $< \{e_1, e_2\} >$ tal que $[u, x] = 0$ e $[u, y] = x$. Como $\operatorname{ad}(e_3) = 0$ (ver (4.15)), podemos já supôr que tambem $[x, y] = e_3$. Assim apareceu a álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}_{10}$ com estrutura

$$[u, x] = 0 \qquad [u, y] = x \qquad [x, y] = z \qquad \operatorname{ad} z = 0.$$

unimodular. Note-se que aí o produto de x com y é 0. Umas contas rápidas mostram que

$$\frac{\mathfrak{g}_{11}}{\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{11})} \simeq \mathfrak{h}_4 \quad \text{e} \quad \frac{\mathfrak{g}_{12}}{\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{12})} \simeq \mathfrak{h}_3.$$

Como $\mathfrak{h}_3 \not\simeq \mathfrak{h}_4$, conclui-se que $\mathfrak{g}_{11} \not\simeq \mathfrak{g}_{12}$.

Caso III. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Qualquer endomorfismo de $\mathfrak{h}_6 = \mathbb{R}^3$ é uma derivação, ou seja, $\mathrm{Der}\,\mathbb{R}^3 = \mathfrak{gl}_3$ (cp.(4.15)). Da derivação nula se deduz a álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g}_{13} = \mathbb{R}^4$.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_{13}$ (conexos): $\mathbb{T}^p \oplus \mathbb{R}^q$ $(p + q = 4)$.

Seja agora $\phi \in \mathfrak{gl}_3$ não nula e, como acima, notemos $(\xi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ a matriz de ϕ na base (e_1, e_2, e_3). Na base (u, e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \times_\phi < u >$ as derivações $\mathrm{ad}\,(u), \ldots, \mathrm{ad}\,(e_3)$ são

$$\mathrm{ad}\, u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \phi & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}\, e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{i1} & & & \\ -\xi_{i2} & & 0 & \\ -\xi_{i3} & & & \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad} \neq 0$ sse $|\phi| = 0$.

Caso III.1. $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0 \Leftrightarrow |\phi| \neq 0$.

Como se percebe logo, $\mathcal{D}\mathfrak{g} =< \{e_1, e_2, e_3\} >= \mathbb{R}^3$. Este caso dá então origem às álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{14}$.

Grupos de Lie associados a $\mathfrak{g}_{14}$: Só encontrámos os calculados pela exponencial a partir da representação adjunta de $\mathfrak{g}_{14}$. O facto de estar em GL_3 implica que ϕ tem sempre um valor próprio. Isso permite mostrar que aqueles grupos são simplesmente conexos, uma vez que $t \mapsto e^{t\mathrm{ad}\, u}$ é injectiva.

Seja ϕ_1 outra derivação de $\mathbb{R}^3$ tal que $|\phi_1| \neq 0$. Quando é que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \times_\phi < u >$ e $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^3 \times_{\phi_1} < v >$ são isomorfas? Lembrando que, a existir tal isomorfismo, tambem $\mathcal{D}\mathfrak{g} \simeq \mathcal{D}\mathfrak{g}_1$, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad & \exists g \in GL_3, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}^3 \\ & g(\phi x) = g[u, x] = [\tilde{g}u, gx]_1 = \alpha[v, gx]_1 = \alpha\phi_1(gx). \end{aligned}$$

g é a restrição a $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ do isomorfismo $\tilde{g} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$. Ficamos obrigados a estudar as classes de equivalência da seguinte relação de equivalência em GL_3, que vamos chamar $\mathbb{R}^*$-*conjugação*,

$$\phi \text{ é } \mathbb{R}^*\text{-conjugado com } \phi_1 \iff \exists g \in GL_3, \alpha \in \mathbb{R}^* : \phi = \alpha g^{-1}\phi_1 g.$$

Deixamos isto para outra altura.

O "exemplo especial" do Capítulo 3 inclui-se neste para $\phi = \mathrm{Id}$. Note-se que há uma generalização trivial do caso III.1 a qualquer dimensão. A classe de $\mathbb{R}^*$-conjugação de Id é $\{\alpha \mathrm{Id} : \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Caso III.2. $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0 \Leftrightarrow |\phi| = 0$.

$\phi \neq 0$ tem 0 como valor próprio. O subespaço de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3 \times_\phi < u >$

$$\mathrm{Im}\,\phi \oplus < u >$$

é um ideal de dimensão ≤ 3. Tomando um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimensão 3 que contenha aquele, é claro que $\mathfrak{h}$ tambem é um ideal. Se $\mathfrak{h}$ é não abeliano, então, ou estamos num dos casos I, II estudados atrás, ou estamos no caso não unimodular que estudaremos à frente. Supomos então que $\mathfrak{h}$ é abeliano. Daqui vem $0 = [u, \phi(x)] = \phi^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, ou seja, ϕ é nilpotente. Prova-se fácilmente que nalguma base (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ a matriz de ϕ toma uma das formas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, pensando no ideal não abeliano $< \{u, y, z\} >$ de $\mathfrak{g}$, temos o caso resolvido invocando as razões anteriores. No segundo, vem

$$[u, x] = y \qquad [u, y] = z \qquad [x, y] = 0 \qquad \mathrm{ad}\,(z) = 0.$$

$\mathfrak{g}$ é nilpotente. Sejam $\tilde{u} = x$, $\tilde{x} = -y$, $\tilde{y} = u - x$. Temos

$$\begin{array}{ll} [\tilde{x}, \tilde{y}] = -[y, u] = z & \mathrm{ad}\,(z) = 0 \\ [\tilde{u}, \tilde{x}] = [x, -y] = 0 & [\tilde{u}, \tilde{y}] = [x, u - x] = -y = \tilde{x}. \end{array}$$

Olhando para a tabela 2 do §2.1, p.56, vê-se logo que estamos em presença da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{10}$.

Caso não unimodular

Vamos agora obter álgebras de Lie splits (cf.§1.6) de dimensão 4 a partir das não unimodulares de dimensão 3. Seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie não unimodular dada pelo lema 3 do §2.1, p.54, com base (e_1, e_2, e_3) e por uma matriz de traço 2

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Seja $\phi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ uma derivação de $\mathfrak{h}$. Sejam $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ tais que

$$\phi(e_i) = \sum_j \xi_{ij} e_j.$$

As seguintes equações são fundamentais.

$$\begin{aligned} 0 = \phi[e_2, e_3] &= [\phi e_2, e_3] + [e_2, \phi e_3] = \\ = \xi_{21}[e_1, e_3] + \xi_{31}[e_2, e_1] &= \xi_{21}\gamma e_2 + \xi_{21}\delta e_3 - \xi_{31}\alpha e_2 - \xi_{31}\beta e_3 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \xi_{21}\gamma - \xi_{31}\alpha = 0 \\ \xi_{21}\delta - \xi_{31}\beta = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \phi[e_1,e_2] &= \alpha\phi e_2 + \beta\phi e_3 = \\ &= (\alpha\xi_{21}+\beta\xi_{31})e_1 + (\alpha\xi_{22}+\beta\xi_{32})e_2 + (\alpha\xi_{23}+\beta\xi_{33})e_3 \\ \phi[e_1,e_2] &= [\phi e_1, e_2] + [e_1, \phi e_2] = \xi_{11}[e_1,e_2] + \xi_{22}[e_1,e_2] + \xi_{23}[e_1,e_3] = \\ &= (\xi_{11}+\xi_{22})(\alpha e_2 + \beta e_3) + \xi_{23}(\gamma e_2 + \delta e_3) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha\xi_{21} + \beta\xi_{31} = 0 \\ \alpha\xi_{22} + \beta\xi_{32} = \alpha\xi_{11} + \alpha\xi_{22} + \gamma\xi_{23} \\ \alpha\xi_{23} + \beta\xi_{33} = \beta\xi_{11} + \beta\xi_{22} + \delta\xi_{23}. \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \phi[e_1,e_3] &= \gamma\phi e_2 + \delta\phi e_3 = \\ &= (\gamma\xi_{21}+\delta\xi_{31})e_1 + (\gamma\xi_{22}+\delta\xi_{32})e_2 + (\gamma\xi_{23}+\delta\xi_{33})e_3 \\ \phi[e_1,e_3] &= [\phi e_1, e_3] + [e_1, \phi e_3] = \xi_{11}[e_1,e_3] + \xi_{33}[e_1,e_3] + \xi_{32}[e_1,e_2] = \\ &= (\xi_{11}+\xi_{33})(\gamma e_2 + \delta e_3) + \xi_{32}(\alpha e_2 + \beta e_3) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma\xi_{21} + \delta\xi_{31} = 0 \\ \gamma\xi_{22} + \delta\xi_{32} = \gamma\xi_{11} + \gamma\xi_{33} + \alpha\xi_{32} \\ \gamma\xi_{23} + \delta\xi_{33} = \delta\xi_{11} + \delta\xi_{33} + \beta\xi_{32}. \end{cases} \tag{4.18}$$

De $\operatorname{tr} A = 2$, (4.16), (4.17) e (4.18) vem $\alpha - \delta = 2(\alpha - 1)$ e

$$\xi_{11} = \xi_{21} = \xi_{31} = 0, \quad \xi_{12}, \xi_{13} \text{ são quaisquer,}$$

$$\begin{cases} -\beta\xi_{22} + 2(\alpha-1)\xi_{23} + \beta\xi_{33} = 0 \\ \gamma\xi_{22} - 2(\alpha-1)\xi_{32} - \gamma\xi_{33} = 0 \\ \gamma\xi_{23} - \beta\xi_{32} = 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

Notemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times_\phi < u >$, como é habitual, a álgebra de Lie split de $\mathfrak{h}$ por ϕ. Na base (u, e_1, e_2, e_3) temos, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ad}(au + be_1 + ce_2 + de_3) = 0 \iff$$

$$a\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{32} \\ 0 & \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{33} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{12} & 0 & \alpha & \gamma \\ -\xi_{13} & 0 & \beta & \delta \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{22} & -\alpha & 0 & 0 \\ -\xi_{23} & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{32} & -\gamma & 0 & 0 \\ -\xi_{33} & -\delta & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

O centro de $\mathfrak{g}$ é então dado pelas equações:

$$\begin{cases} b\xi_{12} + c\xi_{22} + d\xi_{32} = 0 \\ b\xi_{13} + c\xi_{23} + d\xi_{33} = 0 \\ a\xi_{12} - c\alpha - d\gamma = 0 \\ a\xi_{13} - c\beta - d\delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\xi_{22} + b\alpha = 0 \\ a\xi_{32} + b\gamma = 0 \\ a\xi_{23} + b\beta = 0 \\ a\xi_{33} + b\delta = 0 \end{cases}. \tag{4.20}$$

Caso I. $A = I$.

$\alpha = \delta = 1,\ \beta = \gamma = 0$. Por (4.19) vemos que $\partial\mathfrak{h}$ tem dimensão 6. Tem-se

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já se sabe que podemos considerar que a derivação ϕ é exterior, ou seja, existem reais λ, μ, ν tais que

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \nu & 0 \end{bmatrix}.$$

Das equações de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ acima vemos que $b = 0$.

Caso I.1. $\phi \neq 0$.

Vem $a = c = d = 0$, i.e., $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0$. Então $\mathfrak{g} =< u, e_1, e_2, e_3 >$ é dada por

$$[u, e_1] = 0 \qquad [u, e_2] = \lambda e_2 + \nu e_3 \qquad [u, e_3] = \mu e_2$$
$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_1, e_3] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = 0.$$

$\mathcal{D}\mathfrak{g} =< \{e_2, e_3\} >$. De $\mathrm{tr\,ad}\, u = \lambda$, $\mathrm{tr\,ad}\, e_1 = 2$, $\mathrm{tr\,ad}\, e_2 = 0$, $\mathrm{tr\,ad}\, e_3 = 0$ se conclui que o kernel unimodular (cf.§1.5.1) de $\mathfrak{g}$ é $\mathfrak{u} =< v, e_2, e_3 >$, onde $v = 2u - \lambda e_1$. Façamos $B = \mathrm{ad}\,(v)_{|\mathcal{D}\mathfrak{g}}$.

Se $|B| \neq 0$, então $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{h}_3$ ou $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{h}_4$ (cálculos fáceis). Ora, como $\mathrm{ad}\,(e_1)$ induz uma derivação do ideal $\mathfrak{u}$, vemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ já foi completamente estudada no caso I do caso unimodular.

Se $|B| = 0$, então, como $\mathrm{tr}\, B = 0$, existe base (y, z) de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ tal que $[v, y] = z$, $[v, z] = 0$. Neste caso $\mathfrak{u}$ é isomorfa a $\mathfrak{h}_5$. Temos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{15}$ dada por $(x = e_1)$

$$[v, x] = 0 \qquad [v, y] = z \qquad [v, z] = 0$$
$$[x, y] = y \qquad [x, z] = z \qquad [y, z] = 0.$$

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_{15}$: Uma vez que a representação adjunta é fiel, consegue-se arranjar um subgrupo de Lie de GL_4 com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{15}$ pela exponencial e. O grupo é simplesmente conexo.

Note-se que $\mathfrak{g}_{15}$ não é isomorfo a $\mathfrak{g}_3$ ou a $\mathfrak{g}_4$ porque os respectivos núcleos unimodulares tambem não o são (cf.final do §1.5.1).

Caso I.2. $\phi = 0$.

De (4.20) vem $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< u >$ porque $c = d = b = 0$ e a é qualquer. Assim $\mathfrak{g}_{16} = \mathfrak{h} \oplus \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{h} \times \mathbb{R}$.

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_{16}$: $G = H \oplus \mathbb{R}$ onde H é o grupo de Lie associado a $\mathfrak{h}$. Esta é determinada pelo lema 3 do §2.1 e pela matriz $A = I$.

Caso II.1. $A \neq I$ e $|A| \neq 0$.

Como o determinante de A é um invariante completo para $\mathfrak{h}$, podemos supôr que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $-\gamma = |A|$. Do sistema (4.19) da p.75 vem

$$\begin{cases} -\xi_{22} + 2\xi_{23} + \xi_{33} = 0 \\ \gamma\xi_{23} = \xi_{32} \end{cases}.$$

Então

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \gamma\xi_{23} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{22} - 2\xi_{23} \end{bmatrix}$$

e, como se vê, $\partial\mathfrak{h}$ tem dimensão 4. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ tem dimensão 3. Já se sabe que podemos logo supôr ϕ exterior. Escrevendo as matrizes das aplicações $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_i)$, rapidamente se conclui que ficamos reduzidos a estudar

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{22} \end{bmatrix}.$$

Dividindo u por ξ_{22} e tratando o resultado por u, temos

$$[u, e_1] = 0 \qquad [u, e_2] = e_2 \qquad [u, e_3] = e_3$$
$$[e_1, e_2] = 2e_2 + e_3 \qquad [e_1, e_3] = \gamma e_2 \qquad [e_2, e_3] = 0.$$

Então $< \{u, e_2, e_3\} >$ é um ideal não unimodular que corresponde ao caso $A = I$. Ora, este já foi estudado atrás (caso I.1).

Se $\xi_{22} = 0$, então, das equações para $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ sai $b = c = d = 0$ e a qualquer, ou seja, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< u >$. Daqui Resulta a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{17} = \mathfrak{h} \times \mathbb{R}$.

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_{17}$: $G = H \oplus \mathbb{R}$ onde H é o grupo de Lie associado a $\mathfrak{h}$ — $\mathfrak{h}$ é determinada pelo lema 3 do §2.1 e pela matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & \gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(\gamma \neq 0)$.

Caso II.2. $|A| = 0$.

Podemos logo tomar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das equações (4.19) vem $\xi_{23} = \xi_{32} = 0$.

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(e_3) = 0.$$

As derivações de $\mathfrak{h}$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

geram um suplementar algébrico de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$ em $\partial\mathfrak{h}$. Considerando a derivação exterior $\phi = \xi_{13}\phi_1 + \xi_{33}\phi_2$ temos, de (4.20),

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ d\xi_{33} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\xi_{33} = 0 \\ a\xi_{13} = 0 \end{cases}.$$

Se $\phi = 0$, então a, d são quaisquer e $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< \{u, e_3\} >$. Temos $[e_1, e_2] = 2e_2$ e $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{f}$ onde $\mathfrak{f}$ é uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2.

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_{18}$: $\mathbb{R}^2 \oplus GA(\mathbb{R})$.

Agora, se $\xi_{13} \neq 0$ e $\xi_{33} = 0$, das equações de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ vem que $a = 0$ e d é qualquer, resultando $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) =< e_3 >$. Para $\mathfrak{g}$ vem

$$[u, e_1] = \xi_{13}e_3 \quad [u, e_2] = 0 \quad [e_1, e_2] = 2e_2 \quad \mathrm{ad}\, e_3 = 0.$$

Faça-se a transformação $e_1 \rightarrow \frac{e_1}{2}$, $e_3 \rightarrow \frac{\xi_{13}}{2}e_3$. Chegámos à álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{19}$:

$$[u, e_1] = e_3 \quad [u, e_2] = 0 \quad [e_1, e_2] = e_2 \quad \mathrm{ad}\, e_3 = 0.$$

Note-se que $\mathfrak{g}_{10} \not\simeq \mathfrak{g}_{19}$ porque esta última não é nilpotente.

Grupo de Lie associado a $\mathfrak{g}_{19}$: ?

Finalmente, se $\xi_{33} \neq 0$. Deduz-se $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = 0$. Fazendo a transformação de variáveis

$$e_1 \rightarrow e_1 - \frac{\xi_{13}}{\xi_{33}}e_3`='e_1$$

vem

$$\begin{array}{ccc} [u, e_1] = 0 & [u, e_2] = 0 & [u, e_3] = \xi_{33}e_3 \\ [e_1, e_2] = 2e_2 & [e_1, e_3] = 0 & [e_2, e_3] = 0. \end{array}$$

$< \{u, e_3\} >$ e $< \{e_1, e_2\} >$ são dois ideais não comutativos de $\mathfrak{g}$. Mas $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{f} \times \mathfrak{f} = \mathfrak{g}_4$ já se viu.

Apêndice B

Assinatura da Forma de Killing de uma Álgebra de Lie Semisimples

Uma álgebra de Lie é semisimples sse B é não degenerada. Qual a sua assinatura ? Só sabemos, até aqui, que B é definida negativa sse a álgebra de Lie é compacta (cf.proposição 5 do §1.4). O que se vai ver a seguir arruma o assunto de vez. Toda a teoria encontra-se em [OV,III].

Seja $P = \{A \in \mathfrak{gl}_n : A^T = A,\ \operatorname{tr} A = 0\}$. Notemos $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}_n$. Como é bem sabido (cp.lema 4 de §1.6),

$$\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{k} \oplus P$$

Não é difícil perceber que, se $A_1, A_2 \in P \Rightarrow [A_1, A_2] \in \mathfrak{k}$. Isto permite mostrar que $\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{g}$ verifica:

(1) A transformação $\theta : x + y \mapsto x - y$ $(x \in \mathfrak{k},\ y \in P)$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$.
(2) A forma bilinear $b_\theta(u, v) = -B(u, \theta v)$ é definida positiva em $\mathfrak{g}$.

Reparando que $\theta^2 = \mathrm{Id}$, vem b_θ simétrica. Geralmente, uma decomposição de uma álgebra de Lie semisimples

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus P, \tag{5.21}$$

que verifique (1) e (2) para certos subespaços vectoriais $\mathfrak{k}$ e P, diz-se uma *decomposição de Cartan.* A P chamamos um *subespaço de Cartan.*

Suponhamos então que estamos nestas condições para $\mathfrak{g}$ semisimples qualquer. Fácilmente se prova a equivalência entre (1),(2) e (1′), (2′) abaixo.

(1′) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$; $[\mathfrak{k}, P] \subset P$; $[P, P] \subset \mathfrak{k}$.
(2′) B é definida negativa em $\mathfrak{k}$ e definida positiva em P.

Ainda que B não seja a forma de Killing de $\mathfrak{k}$ (esta não é um ideal, a menos que $\mathfrak{k}$=$\mathfrak{g}$), utilizando-a do mesmo modo que na proposição 5 do §1.4, prova-se que $\mathfrak{k}$ é semisimples compacta. Prova-se tambem que $\mathfrak{k}$ é maximal compacta em $\mathfrak{g}$.

De (1′), (2′) sai

$$P = \mathfrak{k}^\perp$$

(ortogonal relativo a B).

Teorema 4 *Qualquer álgebra de Lie semisimples $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição de Cartan. Todas as decomposições de Cartan de $\mathfrak{g}$ são conjugadas por automorfismos interiores, isto é, por elementos de* $\operatorname{Int} \mathfrak{g} = (\operatorname{Aut} \mathfrak{g})^0$ *(cf.[V, Teorema 3.10.8]).*

(De forma geral, chamam-se *automorfismos interiores* aos elementos do grupo de Lie $\operatorname{Ad}(H) \subset \operatorname{Aut}(\mathfrak{h})$, adjunto de um grupo de Lie H conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.)

Por 'conjugada' quer-se dizer que 'respeita a decomposição de Cartan'. Isto é verdade mais geralmente para isomorfismos entre álgebras de Lie semisimples (ver lema 4, §1.4, p.31).

Já sabemos a assinatura de B, mas o estudo é muito interessante...

Outro exemplo. Seja $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta (existe sempre!) de uma álgebra de Lie complexa semisimples $\mathfrak{z}$ com estrutura complexa J.

$$\mathfrak{z}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u}$$

é uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie real $\mathfrak{z}_{\mathbb{R}}$ que $\mathfrak{z}$ induz.

(Questão: quais as propriedades da métrica Riemanniana invariante à esquerda induzida por b_θ num grupo de Lie semisimples?)

Considerando $\mathfrak{g}$ como um espaço Euclideano com produto interno b_θ, temos o seguinte resultado (comparar com o exemplo introdutório).

Proposição 5 *Para todo o $x \in \mathfrak{g}$, tem-se $\mathrm{ad}\,(\theta x) = -\mathrm{ad}\,(x)^*$. Em particular, $\mathrm{ad}\,(x)$ é (resp. anti-)autoadjunta sse (resp. $x \in \mathfrak{k}$) $x \in P$.*

$\mathrm{ad}\,(x)^*$ é a adjunta de $\mathrm{ad}\,(x)$ (cf. §1.6, lema 4).

Prova-se rápidamente que a decomposição de Cartan de uma soma $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ de ideais simples $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus P_i$ é

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus P$$

onde

$$\mathfrak{k} = \oplus_{i=1}^s \mathfrak{k}_i \qquad P = \oplus_{i=1}^s P_i.$$

Lembremos que uma representação $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se diz irredutível se 0 e V são os únicos subespaços invariantes. Um subespaço $U \subset V$ diz-se invariante para ρ se $\rho(x)(U) \subset U$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Notemos agora que a inclusão $[\mathfrak{k}, P] \subset P$ e a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ induzem uma representaçãode $\mathfrak{k}$ em P. Denotamo-la $\rho\colon \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(P)$.

Proposição 6 *Se $\mathfrak{g}$ é simples, então ρ é irredutível e $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra maximal de P.*

Encontrámos ainda um importante resultado que relaciona um grupo semisimples com a decomposição de Cartan da sua álgebra de Lie. A demonstração envolve outros conhecimentos que estão para além da teoria que temos vindo a mostrar.

Teorema 7 *Seja G um grupo de Lie semisimples e suponhamos que é conhecida uma decomposição de Cartan (5.21) da sua álgebra de Lie. Notemos*

$$K = \{g \in G : \mathrm{Ad}\, g \in O(\mathfrak{g})\} \qquad \widetilde{P} = \exp P.$$

Então $G = K\widetilde{P}$ e todo o elemento $g \in G$ escreve-se de forma única como $g = kp$, onde $k \in K$, $p \in \widetilde{P}$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K \times P & \rightarrow & G \\ (k, y) & \mapsto & k \exp(y) \end{array}$$

é um difeomorfismo. A aplicação $\Theta : kp \mapsto kp^{-1}$ é um automorfismo de G tal que $d\Theta = \theta$.

Note-se que $O(\mathfrak{g})$ do Teorema se refere ao espaço Euclideano $(\mathfrak{g}, b_\theta)$. $G = K\widetilde{P}$ chama-se uma *decomposição de Cartan* do grupo de Lie G.

Vamos agora ver mais um exemplo desta teoria, que foi o que nos levou a estudá-la.

Proposição 8 *$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,3}$ é simples e tem uma decomposição de Cartan $\mathfrak{k} \oplus P$ com $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{so}_3$. A forma de Killing de $\mathfrak{g}$ tem assinatura $(-,-,-,+,+,+)$.*

Em particular, qualquer subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ tem, no máximo, dimensão 3.

Demonstração. Resolvendo o sistema de equações $X^T I_{1,3} = -I_{1,3}X$ vê-se logo que

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & E_i & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

formam uma base de $\mathfrak{g}$, onde $i = 1, 2, 3$, $E_i \in \mathfrak{so}_3$ são

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pondo $\mathfrak{k} =< e_1, e_2, e_3 >$, $P =< v_1, v_2, v_3 >$ e fazendo as contas da estrutura de $\mathfrak{g}$, vemos que ela satisfaz (1′) acima e que, na base $\beta = (e_1, e_2, e_3, v_1, v_2, v_3)$,

$$\mathrm{ad}\,(e_i) = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}\,(v_j) = \begin{bmatrix} 0 & D_j \\ C_j & 0 \end{bmatrix},$$

onde $(-1)^{i+1}A_{4-i} = B_i = E_i$ e C_j, D_j, $i, j = 1, 2, 3$ são outras matrizes (cheias de 0's!). Temos

$$B(e_i, v_j) = 0, \qquad B(e_i, e_j) = \mathrm{tr}\,(A_iA_j + B_iB_j), \qquad B(v_i, v_j) = \mathrm{tr}\,(D_iC_j + C_iD_j)$$

e daqui sai que a base β é ortogonal e

$$B(e_i, e_i) = -4 \qquad B(v_j, v_j) = 4,$$

como era de suspeitar já que $\mathfrak{so}_3$ é compacta. Provámos (2′) e que a assinatura da forma de Killing B é a indicada no enunciado.

Vejamos que $\mathfrak{g}$ é simples, pelo que se concluirá a última frase atravez da proposição 6.

Ora, supondo

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2,$$

onde as $\mathfrak{k}_i$ estão entre as únicas álgebras de Lie simples de dimensão 3 $\mathfrak{su}_2 \simeq \mathfrak{so}_3$ e $\mathfrak{sl}_2$, e lembrando que:

· a forma de Killing de $\mathfrak{sl}_2$ tem assinatura $(-,+,+)$;

· a f.K. de $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2$ é igual a $B_1 \times B_2$ (B_i é a f.K. de $\mathfrak{k}_i$);

· um isomorfismo de álgebras de Lie semisimples é uma isometria para as f.K., temos um absurdo. A assinatura de B só poderia ser (2,4), (6,0) ou (4,2).

Vamos continuar a estudar as álgebras de Lie semisimples $\mathfrak{so}_{pq}$ com $p+q=4$. O próximo resultado foi usado no §2.2, tal como o anterior.

Proposição 9 $\mathfrak{so}_{2,2} \simeq \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$.

Demonstração. Seja (e_1, e_2, e_3, e_4) uma base ortonormada do espaço semi-Euclideano $\mathbb{R}^4_2$ de assinatura $(-,-,+,+)$. A matriz de métrica relativa à base

$$u = \frac{e_3 - e_1}{2} \qquad v = e_3 + e_1 \qquad w = \frac{e_4 - e_2}{2} \qquad z = e_4 + e_2$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos então aproveitar todo o estudo das álgebras semisimples D_l de [V,p.297 a 299], adaptando-o ao caso real, para concluir o nosso resultado (cf.[V,p.299]).

Por curiosidade provamos o seguinte.

Proposição 10 *$SU_2 \times SU_2$ é um espaço de cobertura de SO_4.*
Em particular, $\mathfrak{so}_4 \simeq \mathfrak{su}_2 \times \mathfrak{su}_2$.

Demonstração. Vamos aqui seguir, tomando conta dos pormenores, a técnica indicada em [OV,I,p.25], onde encontrámos este resultado. Considere-se o espaço vectorial V sobre $\mathbb{R}$ das matrizes do tipo

$$X = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}$$

$(u, v \in \mathbb{C})$ e a aplicação $R: SU_2 \times SU_2 \to GL(V)$ definida por

$$R_{A,B}(X) = AXB^{-1} \qquad A, B \in SU_2,\ X \in V.$$

Vejamos que está bem definida. Os elementos de SU_2 escrevem-se como os de V mas com a condição suplementar de $|u|^2+|v|^2 = 1$ (fazer contas ou ver [V,p.66]). Os cálculos mostram então que a matriz $AXB^{-1} \in V$. É trivial verificar que $R_{A,B}$ é um isomorfismo linear de V, estando assim R bem definida.

Tambem é fácil ver que R é um homomorfismo de grupos de Lie, uma representação, portanto, de $SU_2 \times SU_2$ em V, e que

$$\det(R_{A,B}(X)) = \det(X) = |u|^2 + |v|^2.$$

Sem esforço encontramos tambem que det satisfaz a identidade do paralelogramo

$$\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y)$$

e a desigualdade $\det(X) \geq 0$ com igualdade sse $X = 0$. Da teoria das formas quadráticas sabemos que se pode definir um produto interno Φ (definida positiva) sobre V

$$\Phi(X,Y) = \frac{1}{2}(\det(X+Y) - \det X - \det Y).$$

Imediatamente se verifica ser $R_{A,B}$ ortogonal para este produto interno, $\forall A, B \in SU_2$, i.e., $\operatorname{Im} R \subset O(V)$.

Agora, $\ker R$ é um subgrupo normal e fechado de $SU_2 \times SU_2$, logo, um subgrupo de Lie normal ([V,Teorema 2.12.6]). Por [V,Teorema 2.13.4], $\ker R$ tem álgebra de Lie tangente um ideal de $\mathfrak{su}_2 \times \mathfrak{su}_2$. Por [V,Lemma 3.18.4], $(\ker R)^0$ só pode ser um dos

$$SU_2 \times SU_2 \qquad SU_2 \times 1 \qquad 1 \times SU_2 \qquad 1 \times 1.$$

É fácil ver que não pode ser qualquer um dos três primeiros. $\ker R$ é então um subgrupo de Lie discreto e da igualdade

$$R((SU_2 \times SU_2)^0) = (R(SU_2 \times SU_2))^0$$

([V,Teorema 2.7.3]) vem que R e o seu domínio formam um espaço de cobertura de $(\operatorname{Im} R)^0$. De forma geral nota-se $SO(V) = O(V)^0 = (\operatorname{Im} R)^0$. Fixada uma base de V, podemos identificar $SO(V) = SO(4, \mathbb{R})$.

dR dá o isomorfismo de álgebras de Lie enunciado.

Bibliografia

[Bar] F.Barnet, *On Lie groups that admit left-invariant Lorentz metrics of constant sectional curvature*, Illinois Journal of Mathematics, vol.33, nº4, p.631 (1989).

[BEE] J.K.Beem, P.E.Ehrlich e K.L.Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker (1996).

[Besse] A.L.Besse, *Einstein manifolds*, Springer (1987).

[BeemPar] J.K.Beem e P.E.Parker, *Values of pseudoriemannian sectional curvature*, Comment.Math.Helvetici, vol.59, p.319 a 331 (1984).

[Ber] L.B.Bergery, *Sur la courbure des métriques Riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes*, Ann.Scient.Éc.Norm.Sup. 4ª série, t.11, p.543 a 576 (1978).

[Bir] G.S.Birman, *Flat left-invariant lorentz metrics on Lie groups*, pré publicação (1993).

[BO] B.O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic (1983).

[CorPar] L.A.Cordero e P.E.Parker, *Left-invariant Lorentz metrics on 3-dimensional Lie groups*, pré-publicação (1996).

[DajNom] M.Dajczer e K.Nomizu, *On sectional curvature of indefinite metrics.II*, Math.Ann., vol.247, p.279 a 282 (1980).

[GraNom] L.Graves e K.Nomizu, *On sectional curvature of indefinite metrics*, Math.Ann., vol.232, p.267 a 272 (1978).

[Hei] E.Heintz, *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Math.Ann., vol.211, p.23 a 34 (1974).

[Hel] S.Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic (1984).

[Hig] P.J.Higgins, *An introduction to topological groups*, London Math.Soc., Lecture Notes 15, Cambridge University (1974).

[J] G.R.Jensen, *The scalar curvature of left-invariant Riemannian metrics*, Indiana Univer.Math.Journal, vol.20, nº12, p.1125 (1971).

[J2] G.R.Jensen, *Homogeneous Einstein Spaces of dimension four*, J.Diff.Geometry, nº3, p.309 a 349 (1969).

[KN] S.Kobayashi e K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol.I e II, Interscience (1963 e 1969).

[Kul] R.S.Kulkarni, *The values of sectional curvature in indefinite metrics*, Comment.Math.Helvetici, vol.54, p.173 a 176 (1979).

[M] J.Milnor, *Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups Advances in Math.*, vol.21, p.293 a 329 (1976).

[MatsOka] H.Matsushima e K.Okamoto, *Non-existence of torsion free flat connections on a real semisimple Lie group*, Hiroshima Math.Jour., vol.9 ,p.59 a 60 (1979).

[Nom] K.Nomizu, *Left-invariant Lorentz metrics on Lie groups*, Osaka J.Math., vol.16, p.143 a 150 (1979).

[Nom2] K.Nomizu, *Remarks on sectional curvature of an indefinite metric*, Proceedings of the American Math.Soc., vol.89, n^{o}3, p.473 (1983).

[OV] A.L.Onishchik e E.B.Vinberg, *Lie groups and Lie Algebras*, vol.I e III, Springer, EMS n^{os} 20 e 41 (1991).

[Poor] W.A.Poor, *Differential Geometric Structures*, McGraw-Hill (1981).

[V] V.S.Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer (1984).

[W] J.A.Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill (1967).

[Wal] N.R.Wallach, *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Annals of Math. vol.96, p.277 a 295 (1972).

Índice remissivo

ERRATA

Na página 13 cortar o texto que começa na linha 8, a partir de "Isto é", e acaba no fim da linha 18.

Por lapso não foi impressa a definição de referencial ortonormado, que devia ter aparecido na página 19.

Na página 72, linha 2, emendar: $E = \begin{bmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mais abaixo, cortar o texto da linha 4 ("nil ...") até à linha 15, aproveitando apenas a definição de $\rho : \mathfrak{g}_{10} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{10})$ e a linha 7.

Nos cabeçalhos das páginas 14, 25, 28, 37 e 56 fazer as emendas óbvias.

p.	li.	onde se lê	deve-se ler
5	15	Foi nos	Foi-nos
5	-9	$i, j \leq r < k, l,$	$i, j \leq r < k, l,\ i \neq j,\ k \neq l,$
8	-9	...+ $<y, \nabla_x y>$	...+ $<y, \nabla_x z>$
9	15	u e v de M	u e v de P
10	1	prolongando-o um	prolongando-o a um
14	1	$F = df$	$F = df_m$
14	8	(cf.[W,corolário 2.3.14])	(cf.[W,lema 2.3.1])
18	-5	lisas	planas
20	15	$i, j > l$	$1 \leq i, j \leq n - l$
22	-6	autoadjunta	autoadjunta (ver p.49)
23	17	(*iii*) G é produto	(*iii*) $\widetilde{G}$ é produto
24	5	G um grupo de Lie	G um grupo de Lie de dimensão ≥ 3
24	-9	$\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_3 = 1$	$\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_3 = 1$ ou $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_3 = -1$
27	6	negativa como	negativa ou nula como
27	17	menor é K	menor é $\lvert K \rvert$
28	12	constroem	constroiem
29	-13	$<x, [y, z]> = - <[x, y], z>$	$<x, [y, z]> = <[x, y], z>$
32	16	álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma	álgebra de Lie $\mathfrak{g}$
			real ou complexa é uma
35	3	$B^c(S^c y, x)$	$B^c(S^c v, u)$
36	16	subágebras	subálgebras
40	-2	ideal ker Δ	subgrupo normal ker Δ
44	7	$H^n_s = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_s :$	$H^n_s = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_{s+1} :$
45	14	$(\spadesuit)\{k = 0$ ou	$(\spadesuit)\{K = 0$ ou
45	18	(ver Teorema 2)	(ver Teorema 2 do Capítulo 3)

p.	li.	onde se lê	deve-se ler
46	-18	$(a, \tilde{a} \in \mathfrak{a},\ b, \tilde{b} \in \mathfrak{b})$	$(a, \tilde{a} \in A,\ b, \tilde{b} \in B)$
47	-1	$[s, x]$	$[s, x]_\sigma$
48	19	§1.2, 13	§1.2, p.13
48	-9	assim construída,	assim construída e independentemente do índice s da métrica,
50	-5	espaço vectorial V	espaço vectorial V de dimensão ≥ 3
50	-4	para todo o $x \in V$	para todo o $x \in V \setminus \{0\}$
51	9	$\epsilon_i = <e_i, e_i>$	$\epsilon_i = <u_i, u_i>$
54	15	o grupo de Lie conexo H	um grupo de Lie H, de dimensão 3 e conexo,
56	tab	e_3	z
57	4	quer se	quer-se
58	-11	$(-f) \times B$ ou $g \times (-B)$	$(-f) \times \alpha B$ ou $g \times (-\alpha B)$
58	-10	onde $f, g \in \odot^2\mathbb{R}$	onde $\alpha > 0,\ f, g \in \odot^2\mathbb{R}$
59	4	seccao 1.3.1, p.1.3.1	secção 1.3.1, p.21
59	20	$\mathfrak{g}_5$ ou a $\mathfrak{g}_6$	$\mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_6$ ou a $\mathfrak{g}_{10}$
59	-8	ad(b) é anti-autodjunta.	ad(b) é anti-autoadjunta, $\forall b \in \mathfrak{b}$.
59	-5	a partir de (ii)	a partir de (i)
60	4	$(\delta > 0)$	$(\delta \geq 0)$
63	-8	$\forall u, v \in \mathfrak{g}$	$\forall u, v \in \mathfrak{n}$
68	17	componente conexa de e	componente conexa de I
68	-12	componente conexa de e	componente conexa de I
72	-13	$[u, x] = \delta x,\ [u, y] = -\delta y$	$[u, x] = \lambda x,\ [u, y] = -\lambda y$
72	-12	u por $\frac{u}{\delta}$ ... supôr $\delta = 1$	u por $\frac{u}{\lambda}$ ... supôr $\lambda = 1$
76	-1	$A = \begin{bmatrix} 2 & \gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$
79	3	sua assinatura ?	assinatura de B ?
80	-8	maximal de P	maximal de $\mathfrak{g}$