Geometria e Análise

I

Teoria geral das curvas algébricas
Complementos de Cálculo Integral

POR

JOSÉ RIBEIRO DE ALBUQUERQUE

Ao grande amigo Heitor [illegible]
Oferece
José Ribeiro de Albuquerque

LISBÔA
1937

Nêste volume reuniram-se alguns assuntos de reconhecida importância, a maioria dos quais se achavam dispersos em diversas memórias e livros raros.

Uma idea fundamental nos orientou, e é fácil resumi-la em poucas linhas: procurou-se mostrar a brilhante solução, dada pela geometria, a determinados problemas de cálculo intregral, especialmente, à integração das diferenciais algébricas relativas às curvas unicursais e às curvas de género um.

O duplo aspecto desta idea levou-nos a dividir o trabalho em duas partes à primeira das quais se chamou «Teoria geral das curvas algébricas».

É muito extensa e fecunda esta teoria e vimo-nos obrigados, com desgosto, a limitar muitos assuntos, que nos desviariam fatalmente do nosso alvo, mas fizemo-lo indicando sempre numerosas obras, onde os assuntos abandonados, têm o merecido desenvolvimento.

Alguns livros citados, é preciso dizê-lo, não se consultaram, mas entre os lidos, havia claras referências, mesmo até transcrições, a permitirem indicá-los com segurança.

A segunda parte dêste volume, é necessàriamente limitada, e constitue o aspecto principal da idea orientadora, mas não é, e com razão, o principal aspecto desta obra.

O AUTOR

PRIMEIRA PARTE

Geometria

CAPÍTULO I

Teoria geral das curvas algébricas

I — Equação de grau n.

A equação geral de grau n pode escrever-se com a forma conhecida:

$$a_1 + (b_1 x + b_2 y) + (c_1 x^2 + 2 c_2 x y + c_3 y^2) + \dots$$
$$\dots + (l_1 x^n + n l_2 x^{n-1} y + \dots + n l_{n-1} x y^{n-1} + l_n y^n) = 0$$

e é composta de uma sucessão de funções homogéneas das duas variáveis x e y, cujos graus crescem desde zero até n. Representando por

$$f_i (x, y) = j x^i + i j x^{i-1} y + \dots + i j_{i-1} x y^{i-1} + j_i y^i$$

uma função homogénea de grau i, podemos escrever a equação de grau n, com a forma abreviada

$$(1) \quad F (x, y) = f_0 (x, y) + f_1 (x, y) + f_2 (x, y) + \dots + f_n (x, y) = 0$$

Deduzamos o número total de coeficientes que figuram nesta equação. Como cada função $f_i (x, y)$ possui $(i + 1)$ coeficientes, a equação (1) apresenta-nos um número de coeficientes igual a

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1) (n + 2)}{2}$$

Mas como podemos evidentemente reduzir, sempre, um dêles à unidade, o número de parâmetros distintos que figuram na equação (1) é de

$$p = \frac{(n + 1) (n + 2)}{2} - 1 = \frac{n (n + 3)}{2}$$

Se as variáveis x e y representarem as coordenadas de pontos, num sistema de eixos coordenados, no plano, podemos enunciar a seguinte proposição:

Uma curva algébrica de ordem n *fica determinada por* $\frac{n(n+3)}{2}$ *pontos.*

Com efeito cada ponto determina uma relação linear dos coeficientes da equação da curva. Voltaremos mais tarde a falar dêste assunto, Capítulo II.

Para obter a equação homogénea de grau n, basta considerar uma nova coordenada z e fazer :

$$F(x, y, z) = f_0 z^n + f_1 z^{n-1} + \ldots + f_{n-1} z + f_n = 0$$

Evidentemente que poderiamos considerar x, y e z como coordenadas triangulares dos pontos da curva, isto é, as distâncias de um ponto da curva aos lados do triângulo fundamental.

Do mesmo modo a equação,

$$F(u, v) = f_0(u, v) + f_1(u, v) + \ldots + f_{k-1}(u, v) + f_k(u, v) = 0$$

representa a equação geral das curvas de classe k desde que as variáveis u e v se considerem as coordenadas tangênciais ordinárias dos pontos da curva.

Se considerarmos uma nova variável w teriamos dum modo idêntico, a equação homogénea

$$F(u, v, w) = f_0 w^k + f_1 w^{k-1} + \ldots + f_{k-1} w + f_k = 0$$

Duma maneira dual, as variáveis u, v e w, podem ser as distâncias dos vértices do trilátero fundamental a uma recta tangente à curva de classe k.

II — Teoria do Centro.

Chama-se *centro de simetria* de uma curva um ponto tal, que todas as rectas que por êle passam, cortam a curva em pares de pontos equidistantes.

Tomando um sistema de eixos coordenados com origem no centro, a equação da curva deverá conservar-se inalterável para uma mudança de sinal nas variáveis. Em vista disso se a curva fôr de ordem par, a sua equação será :

$$f_0 + f_2 + f_4 + \ldots + f_{2k} = 0$$

e se fôr de ordem impar :

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2k+1} = 0$$

Nêste último caso não figura termo independente na equação da curva, o que permite afirmar que *se uma curva de ordem impar admite centro, tal centro pertence à curva.*

Para determinar as coordenadas do centro de uma curva algébrica, procede-se, como ao estudar as cónicas, mudando para novos eixos coordenadas com origem no centro e fazendo coíncidir a nova equação da curva com uma das duas anteriores o que implica um número geralmente elevado de condições para a determinação das coordenadas.

Em vista disso podemos concluir que :

Uma curva algébrica em geral não admite centro.

Há casos especiais, contudo, em que o centro existe. Nos elementos de Geometria Analítica estudam-se as cónicas que são curvas com centro.

Demonstremos agora o seguinte teorema :

Se uma curva algébrica tem centro, êle é único.

A demonstração que se segue é puramente geométrica, muito simples, e não a encontràmos em tratado algum.

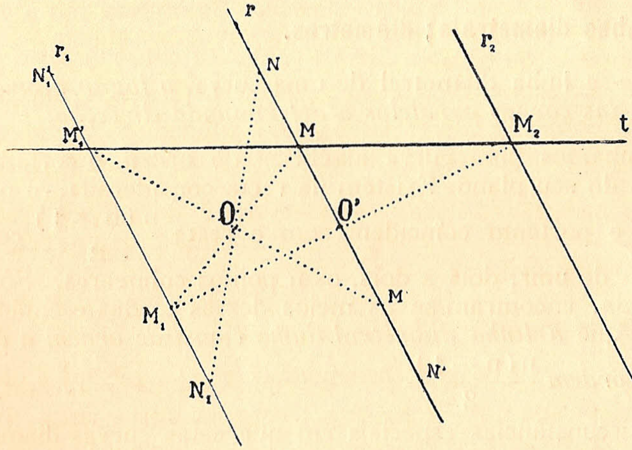

fig. I

Suponhamos que a curva considerada possue dois centros O e O'. Uma transversal r corta a curva em n pontos M M', N N'... e se a transversal passar pelo centro O' êsses pontos encontram-se dispostos simètricamente dum e doutro lado do centro. Porém como O é também um centro encontram-se outros pontos da curva numa transversal r_1 paralela a r. Seja M_1 um dêsses pontos deduzido de M pela consideração do centro O. Combinando M_1 com o centro O' determina-se novo ponto M_2 da curva que por sua vez se combinaria com o centro O para depois dar outro ponto M'_1 também pertencente à curva e sendo todos êstes pontos

$$M, M'_1, M_2, M'_4, \dots$$

pertencentes a uma secante t. Esta geração de pontos sôbre a secante t podia fazer-se $(m + n)$ vezes e então encontraríamos uma recta t do plano duma curva de ordem n que cortaria a curva em $n + m$ pontos podendo m ser tão grande quanto se deseje.

A recta t evidentemente pertence à curva. Como do mesmo modo se encontram outras rectas

$$t' \; s \; s' \dots$$

correspondentes aos pontos $M' \; N \; N' \dots$ verifica-se que a curva degenera num feixe de rectas paralelas à linha $\overline{O\,O'}$ e em número igual a n. Como além disso essas n rectas estão dispostas simètricamente em relação à recta $\overline{O\,O'}$ vê-se que esta última recta é uma linha de infinitos centros. Excluindo as curvas algébricas degeneradas o enunciado encontra-se demonstrado.

III — **Linhas diametrais; diâmetros.**

Define-se linha diametral de uma curva, *o logar geométrico dos meios das cordas paralelas a determinada direcção.*

Suponhamos uma curva algébrica de ordem n cortada por uma recta do seu plano. Existem na recta considerada, n pontos da curva e portanto coïncidem com a recta $\frac{n(n-1)}{2}$ cordas, resultantes de unir, dois a dois, os n pontos colineares. Sôbre a recta, ainda, encontram-se os meios dessas cordas e então concluiremos que *a linha diametral duma curva de ordem* n *é uma curva da ordem* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Há circunstâncias especiais em que estas curvas diametrais se reduzem a rectas, e tomam então o nome de *diâmetros*. Com efeito, suponhamos uma curva algébrica, cuja equação $F(x, y) = 0$, permanece invariável para uma mudança de sinal, numa ou em ambas as variáveis: tal curva admitirá um ou os dois eixos coordenados, como diâmetros.

Quando um diâmetro é perpendicular às cordas que divide ao meio, toma o nome particular de *eixo*.

Quando uma curva de equação $F(x, y) = 0$, contiver na sua equação, só potências pares de uma, ou de ambas as variáveis, essa curva admite um só eixo, ou mesmo dois, sendo êsses eixos de simetria coincidentes com os eixos coordenados.

Um caso também evidente de existência de eixo, é o de uma curva cuja equação $F(x, y) = 0$ é uma função simétrica das duas

variáveis x e y e desta vez é eixo da curva a bissectriz dos eixos coordenados.

Para terminarmos com êste assunto diremos que Newton definia diâmetro de uma curva algébrica *o logar geométrico dos centros de médias distâncias de sistemas de pontos situados sôbre secantes paralelas.*

Dado um sistema de pontos $P_1(x_1\,y_1) \dots P_n(x_n\,y_n)$ lineares ou não, chama-se centro de médias distâncias dêste sistema de n pontos ao ponto C de coordenadas.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Posto isto, consideremos uma secante variável mas ocupando posições paralelas o que é simples de conseguir, tomando para sua equação

$$y = m_1 x + b$$

onde b é um parâmetro variável. Se fôr

$$F(x, y) = f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + f_{n-2}(x, y) + \dots + f_0(x, y) = 0$$

a equação de grau n, da curva algébrica, a eliminação de y, entre as duas equações conduz a uma equação em x^n dando as n abscissas dos pontos comuns às duas linhas. Procuraremos essa equação:

$$f_n(x, m_1 x + b) + f_{n-1}(x, m_1 x + b) + \dots = 0$$

e desenvolvendo, vem

$$f_n(x, m_1 x) + b\,f'_n(x, m_1 x) + \dots$$
$$\dots + f_{n-1}(x, m_1 x) + b\,f'_{n-1}(x, m_1 x) + \dots = 0$$

e sendo a função $f_i(x, y)$ homogénea de grau i

$$x^n f_n(1, m_1) + b\,x^{n-1} f'_n(1, m_1) + \dots$$
$$\dots + x^{n-1} f_{n-1}(1, m_1) + b\,x^{n-2} f'_{n-1}(1, m_1) + \dots = 0$$

ou, ordenando, vem finalmente a equação procurada:

$$x^n f_n(1, m_1) + x^{n-1}\left[b\,f'_n(1, m_1) + f_{n-1}(1, m_1)\right] + \dots = 0$$

Se representarmos por $x_1\;x_2\;x_3 \dots x_n$, as n raizes desta equação, sabemos que é:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{b\,f'_n(1, m_1) + f_{n-1}(1, m_1)}{f_n(1, m_1)}$$

e portanto

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = -\frac{b f'_n(1, m_1) + f_{n-1}(1, m_1)}{n\,f_n(1, m_1)}$$

Se eliminarmos b entre êste valor e a equação da recta, obtemos

$$n f_n(1, m_1) + (y - m_1 x) f'_n(1, m_1) + f_{n-1}(1, m_1) = 0$$

que é a equação de uma recta, chamada por Newton diâmetro da curva algébrica.

IV – Tangente, normal e contacto das curvas.

Sejam $x_0\ y_0\ z_0$, as coordenadas de um ponto da curva de equação $F(x, y, z) = 0$.

Consideremos uma recta pertencendo ao ponto, e dêmos às suas equações a forma paramétrica

$$x = x_0 + a p \qquad y = y_0 + b p \qquad z = z_0 + c p$$

Os pontos de encontro da recta e da curva são dados pela equação

$$F(x_0 + a p, y_0 + b p, z_0 + c p) = F(x_0\, y_0\, z_0) +$$
$$+ p(a F'_{x0} + b F'_{y0} + c F'_{z0}) + p^2(\ldots) \ldots = 0$$

Como por hipótese o ponto de coordenadas $x_0\ y_0\ z_0$ pertence à curva, será:

$$F(x_0\, y_0\, z_0) = 0$$

e então

$$p(a F'_{x0} + b F'_{y0} + c F'_{z0}) +$$
$$+ p^2(a^2 F''_{x0x0} + b^2 F''_{y0y0} + c^2 F''_{z0z0} + \ldots) + \ldots = 0$$

ou

$$a F'_{x0} + b F'_{y0} + c F'_{z0} +$$
$$+ p(a^2 F''_{x0x0} + b^2 F''_{y0y0} + c^2 F''_{z0z0} + \ldots) + \ldots = 0$$

Para a recta ser tangente à curva, deve esta equação admitir uma nova raiz nula e portanto

$$a F'_{x0} + b F'_{y0} + c F'_{z0} = 0$$

eliminando a, b e c com as equações da recta teremos:

$$(x - x_0) F'_{x0} + (y - y_0) F'_{y0} + (z - z_0) F'_{z0} = 0$$

que é a equação da tangente. Para a obtermos em coordenadas cartesianas basta fazer $z = 1$

$$(x - x_0) F'_{x0} + (y - y_0) F'_{y0} = 0$$

A equação da normal será

$$(x - x_0) F'_{y0} - (y - y_0) F'_{x0} = 0$$

Nestas duas equações F'_{x0} e F'_{y0} representam os valores das primeiras derivadas de F no ponto de coordenadas $x_0\ y_0\ z_0$.

Querendo agora determinar as equações da tangente a uma curva tiradas por um ponto do seu plano, teremos que exprimir que a equação da tangente é satisfeita pelas coordenadas $x_1\ y_1$ dêsse ponto. Virá

$$(x_1 - X) F'_x(X, Y) + (y_1 - Y) F'_y(X, Y) = 0$$

em que as coordenadas, desconhecidas, do ponto de contacto, X Y, teem que ser determinadas pelo sistema, desta última equação e da equação da curva

$$F(X, Y) = 0$$

O sistema assim formado admite $n(n-1)$ soluções o que permite enunciar o seguinte teorema:

Uma curva algébrica de ordem n *é em geral da classe* $K = n(n-1)$

Este resultado foi dado por Poncelet *(Annales de Gergonne*, t. VIII, pág. 214).

O mesmo problema estudado com as normais conduz ao sistema:

$$\begin{cases} (y_1 - Y) F'_x(X, Y) - (x_1 - X) F'_y(X\, Y) = 0 \\ F(X\, Y) = 0 \end{cases}$$

Estas duas equações de grau n admitem n^2 soluções comuns e portanto:

Em geral por um ponto do plano podem conduzir-se n^2 *normais, a uma curva algébrica de ordem* n.

Estudemos agora o problema do contacto de duas curvas algébricas.

Sejam

$$Y = F(x) \text{ e } y = f(x)$$

as equações de duas curvas algébricas e sejam x' y' as coordenadas dum ponto, comum às duas curvas.

Se dermos um acréscimo h a x', sejam y_1 e y_2 as ordenadas dos pontos das duas curvas que correspondem a essa nova abscissa. Temos

$$y_1 = F(x' + h) = F(x') + h F'(x') + \frac{h^2}{2!} F''(x') + \ldots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} F^{p+1}(x') + \ldots$$

$$y_2 = f(x' + h) = f(x') + h f'(x') + \frac{h^2}{2!} f''(x') + \ldots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(x') + \ldots$$

Subtraindo termo a termo e notando que

$$F(x') = f(x')$$

vem :

$$y_1 - y_2 = h\left[F'(x') - f'(x')\right] + \frac{h^2}{2!}\left[F''(x') - f''(x')\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[F^{p+1}(x') - f^{p+1}(x')\right] + \ldots$$

O segundo membro desta expressão é um polinómio inteiro em h e para valores suficientemente pequenos, em valor absoluto, da variável, toma o sinal do primeiro termo.

Se as derivadas $F'(x')$ e $f'(x')$ não forem iguais, existe uma única raiz nula e segue-se que as curvas se atravessam no ponto $(x'\ y')$.

Suponhamos agora que se tem

$$F'(x') = f'(x')$$

haverá duas raizes nulas e além disso o primeiro termo não muda de sinal com h; as curvas portanto não se atravessam e como teem dois pontos de ordenadas iguais para a abscissa x', diz-se que as curvas teem um *contacto simples* no ponto (x', y').

Duma maneira geral diz-se que há um contacto de ordem p quando forem iguais, para as duas curvas, as p primeiras derivadas. Nesse caso o segundo membro começa por um termo em h^{p+1} e se p fôr par o segundo membro varia de sinal com h e por conseguinte as curvas atravessam-se. Como além disso

$$y_1 - y_2$$

se anula para $p + 1$ valores de h, diz-se que o contacto é da ordem $p + 1$.

Se p fôsse ímpar concluia-se que o contacto era de ordem par e as curvas não se atravessavam.

Resumindo :

Quando duas curvas são tangentes, atravessam-se ou não conforme o contacto é de ordem par ou ímpar ; a ordem do contacto é dada pela ordem das derivadas das curvas que em primeiro logar se não anulam simultâneamente.

V — Polares de um ponto :

Sejam $M'(x'\ y'\ z')$ e $M''(x''\ y''\ z'')$ dois pontos do plano de uma curva algébrica de ordem n.

As coordenadas de um ponto qualquer M (x, y, z) da recta definida por M' e M'' são dadas pelas expressões

$$x = \frac{x' + k\,x''}{1 + k} \quad y = \frac{y' + k\,y''}{1 + k} \quad z = \frac{z' + k\,z''}{1 + k}$$

em que k é o valor da rasão de dois segmentos

$$k = \frac{\overline{M'\,M}}{\overline{M\,M''}}$$

Substituindo na equação da curva F (x, y, z) = 0, as variáveis, pelas coordenadas do ponto M, vem :

$$F(k\,x'' + x', k\,y'' + y', k\,z'' + z') = 0$$

que desenvolvida, dá :

$$F(x'\ y'\ z') + k\,(x''\,F'_{x'} + y''\,F'_{y'} + z''\,F'_{z'}) + \ldots$$

$$\ldots + k^n\,F(x''\ y''\ z'') = 0$$

ou invertendo o desenvolvimento

$$k^n\,F(x''\ y''\ z'') + k^{n-1}(x'\,F'_{x''} + y'\,F'_{y''} + z'\,F'_{z''}) + \ldots$$

$$\ldots + F(x'\ y'\ z') = 0$$

As raizes $k_1\ k_2 \ldots k_n$ correspondem aos pontos $M_1\ M_2\ M_3 \ldots M_n$ comuns à secante e à curva. Se escolhermos o ponto M'' de modo que seja :

$$x'\,F'_x + y'\,F'_y + z'\,F'_z = 0$$

Nesta circunstância será nula a soma das razões

$$\frac{\overline{M'\,M_1}}{\overline{M_1\,M''}} + \frac{\overline{M'\,M_2}}{\overline{M_2\,M''}} + \ldots + \frac{\overline{M'\,M_n}}{\overline{M_n\,M''}} = 0$$

sôbre tôda e qualquer secante passando por $M'(x'\ y'\ z')$.

A equação

$$x'\,F'x + y'\,F'y + z'\,F'z = 0$$

representa uma curva da ordem $(n - 1)$ que recebe o nome de *primeira polar* do ponto M' relativamente à de equação F (x, y, z) = 0.

Do mesmo modo escolhendo M'' teríamos

$$x'^2\,F''_{xx} + y'^2\,F''_{yy} + z'^2\,F''_{zz} +$$

$$+ 2\,x'\,y'\,F''_{xy} + 2\,x'\,z'\,F''_{xz} + 2\,y'\,z'\,F''_{yz} = 0$$

que representa uma curva da ordem $n - 2$ chamada *segunda polar* de M'.

Encontraríamos assim sucessivas polares de ordens decrescentes desde $(n - 1)$ até 1.

A última polar do ponto M' será a recta

$$x F'_{x'} + y F'_{y'} + z F'_{z'} = 0$$

e a penúltima a cónica:

$$x^2 F''_{x' x'} + y^2 F''_{y' y'} + z^2 F''_{z' z'} + \\ + 2 x y F''_{x' y'} + 2 x z F''_{x' z'} + 2 y z F''_{y' z'} = 0$$

Dum modo geral a polar p do ponto M', que é uma curva da ordem $n - p$, obtem-se da polar $n - p$ (curva da ordem p) por uma mudança de letras acentuadas. Êste facto permite afirmar que *se o ponto M'' pertence à polar p do ponto M', por sua vez o ponto M' pertence à polar $n - p$ do ponto M''.*

Procuremos a equação da primeira polar do ponto M' em relação à linha

$$P_1 (x, y, z) = x' F'_x + y' F'_y + z' F'_z = 0$$

e acharemos

$$x' P'_{1x} + y' P'_{1y} + z' P'_{1z} = 0$$

e feitas as devidas substituïções caímos na segunda polar de M' em relação à curva primitiva. Generalisando vem:

A polar p de M', relativamente à polar i de M', considerando esta última polar em relação à curva primitiva, é a polar $i + p$ de M' em relação à curva primitiva.

O caminho seguido no parágrafo anterior para determinar o número de tangentes de uma curva tiradas por um ponto do seu plano, leva-nos a apresentar, agora, o seguinte enunciado:

Os $n(n-1)$ pontos de contacto das tangentes conduzidas por um ponto a uma curva de ordem n, formam o sistema completo das intersecções da curva com uma outra curva de ordem $n - 1$, que é a primeira polar do ponto considerado.

Como a última polar de M' é uma recta, no caso particular do polo estar sôbre a curva primitiva, essa recta será uma tangente. Mas a recta de que estamos tratando é, também, a polar linear do ponto M', relativamente a todas as polares de ordem superior e, por conseguinte, a polar $(n - i - 1)$ da polar i do ponto M'. Então:

Se o polo pertence à curva primitiva, todas as suas polares por êle passam, sendo ao mesmo tempo tangentes à curva primitiva, (contactos simples).

Como a primeira polar é tangente à curva, dois dos pontos comuns à curva e à polar se encontram confundidos com o ponto de contacto da tangente à curva no polo, e portanto

De um ponto de uma curva de ordem n, não se podem tirar mais que $n(n-1) - 2$ tangentes, a essa curva.

Voltemos de novo à equação da última polar

$$x F'_{x'} + y F'_{y'} + z F'_{z'} = 0$$

e comparemo-la com uma recta qualquer

$$l x + m y + n z = 0$$

As igualdades

$$\frac{F'_{x'}}{l} = \frac{F'_{y'}}{m} = \frac{F'_{z'}}{n}$$

sendo duas igualdades distintas de grau $(n - 1)$ admitem $(n - 1)^2$ soluções comuns, de modo que:

Uma recta qualquer admite $(n - 1)^2$ polos.

Muitas outras proposições, sôbre as polares, se poderiam fazer, o que parecia natural num estudo completo dêste assunto. Mencionamos o trabalho de *A. Clebsh. Ueber eine Klasse von Eliminationsproblemen etc.* no *Journal de Borchardt, t. 58.*

Nêste trabalho encontram-se números teoremas sôbre as polares, derivados da aplicação de um método de eliminação de m variáveis entre m equações homogéneas, uma de grau qualquer, outra do segundo grau, e as restantes lineares.

VI — **Polares de uma recta**

Seja d' $(u'\ v'\ w')$ uma recta fixa, e conduzamos por um dos seus pontos outra recta d'' $(u''\ v''\ w'')$; uma terceira recta d, do feixe, será definida pelas coordenadas

$$u = \frac{u' + k u''}{1 + k} \qquad v = \frac{v' + k v''}{1 + k} \qquad w = \frac{w' + k w''}{1 + k}$$

onde k é a rasão simples de trez raios do feixe.

Substitüindo estes valores na equação tangencial da curva obtem-se

$$k^n F(u''\ v''\ w'') + k^{n-1} (u' F'_{u''} + v' F'_{v''} + w' F'_{w''}) + \ldots \\ \ldots + F(u'\ v'\ w') = 0$$

Esta equação dá os n valores de k relativos às tangentes à curva pertencentes ao feixe. As equações das polares da recta fixa d' obteem-se igualando a zero, os coeficientes das sucessivas potências de k.

Assim a primeira polar tem por equação

$$u' F'_u + v' F'_v + w' F'_w = 0$$

e a última polar é o ponto de equação

$$u\, F'_{u'} + v\, F'_{v'} + w\, F'_{w'} = 0$$

Este ponto coïncide com o ponto de contacto se a recta d' é tangente à curva.

Poderiam, assim, deduzir-se propriedades duais das do parágrafo anterior.

VII — **Assintotas.**

Dá-se o nome de *assintota à posição limite de uma tangente cujo ponto de contacto se afasta indefinidamente sôbre o ramo infinito de uma curva.*

Consideremos a equação homogénea

$$f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y)\,z + f_{n-2}(x,y)\,z^2 + \ldots + f_0(x,y)\,z^n = 0$$

que representa uma curva algébrica de ordem n.

Se nela fizermos $z = 0$, determinaremos as intersecções da curva com a recta do infinito

$$f_n(x,y) = 0$$

Esta equação homogénea define um sistema de rectas passando pela origem.

Resolvendo a equação

$$f_n(x,y) = f_n(1,\frac{x}{y}) = f_n(1,m_i) = 0$$

obtemos n valores de m

$$m_1 \quad m_2 \quad \ldots \quad m_n$$

que são chamadas *direcções assintóticas* da curva, e que não são mais que os coeficientes angulares das assintotas.

Para determinar as ordenadas na origem, de cada uma das assintotas, consideremos a equação duma delas

$$y = m_i\, x + b$$

Eliminando y entre esta equação e a equação da curva, vem sucessivamente

$$f_n(x,m_i x + b) + f_{n-1}(x,m_i x + b) + f_{n-2}(x,m_i x + b) + \ldots = 0$$

e

$$f_n(x,m_i x) + b f'_n(x,m_i x) + \frac{b^2}{2!} f''_n(x,m_i x) + \ldots$$

$$\ldots + f_{n-1}(x,m_i x) + b\, f'_{n-1}(x,m_i x) + \frac{b^2}{2!} f''_{n-1}(x,m_i x) + \ldots$$

$$\ldots + f_{n-2}(x,m_i x) + b\, f'_{n-2}(x,m_i x) + \ldots = 0$$

e também

$$x^n f_n(1,m_i) + x^{n-1}\Big[\, b\, f'_n(1,m_i) + f_{n-1}(1,m_i) \Big] +$$

$$+ x^{n-2}\Big[\frac{b^2}{2!} f''_n(1,m_i) + b\, f'_{n-1}(1,m_i) + f_{n-2}(1,m_i) \Big] + \ldots = 0$$

Mas

$$f_n(1,m_i) = 0$$

e introduzindo esta condição na equação anterior, o resultado indica que tôda a recta paralela à assintota, inclusivamente esta, encontra a curva em $(n - 1)$ pontos.

Para a assintota a equação deve admitir nova raiz infinita e ter-se-há

$$b\, f'_n(1,m_i) + f_{n-1}(1,m_i) = 0$$

donde

$$b = -\frac{f_{n-1}(1,m_i)}{f'_n(1,m_i)}$$

No caso de $f_{n-1}(1,m_i) = 0$, temos para equação da assintota

$$y = m_i\, x$$

Quando fôr $f'_n(1, m_i) = 0$, a assintota é uma recta do infinito, mas paralela á recta

$$y = m_i\, x$$

Finalmente, se se tem simultâneamente

$$f_{n-1} = 0 \quad f'_n = 0$$

m_i é uma raiz múltipla da equação em x^n e b poderá ser determinado por

$$\frac{b^2}{1.2} f''_n(1,m_i) + b\, f'_{n-1}(1,m_i) + f_{n-2}(1,m_i) = 0$$

havendo nêste caso duas raizes b_1 b_2 e portanto duas assintotas

$$y = m_i\, x + b_1 \qquad y = m_i\, x + b_2$$

Quando a curva algébrica admite assintotas paralelas aos eixos a equação

$$f_n(x, y) = 0$$

admite raizes nulas ou infinitas, sendo as últimas relativas às assintotas paralelas ao eixo dos y y.

Tais assintotas determinam-se ordenando o primeiro membro da equação da curva segundo as potências decrescentes da variável y e achando as ordenadas infinitas dessa equação. Assim se fôr

$$y^p f_1(x) + y^{p-1} f_2(x) + \dots = 0$$

teremos que fazer

$$f_1(x) = 0$$

que determina um número de assintotas igual ao seu grau. Como o número máximo de assintotas de uma curva de ordem n é igual ao seu grau e como além disso se podem escolher arbitràriamente os eíxos coordenados, concluiremos :

Uma curva algébrica de ordem n, *que admite* p *assintotas paralelas a uma dada direcção, só pode admitir* n — p *não paralelas a essa direcção.*

VIII — **Pontos singulares nas curvas algébricas.**

Procurámos a equação da tangente determinando as equações das rectas que encontram as curvas em dois pontos consecutivos. Se investigarmos agora a existência das tangentes que teem de comum com a curva três pontos consecutivos teremos as *tangentes estacionárias* ou *tangentes de inflexão*, e os seus pontos de contacto, os *pontos de inflexão* da curva.

A designação destas tangentes vêem do modo como Plücker as considerou na *Theorie der algebraischen Curven* (veja-se referência em *Leçons sur la géométrie*, tradução francesa da obra de Alfred Clebsch *Vorlesungen über Geometrie*, 1879-80-83 pág. 8 vol. 2.º).

Em geral a tangente roda de um modo contínuo em tôrno do seu ponto de contacto quando êste percorre a curva. Porém nos pontos considerados, há duas posições consecutivas, cujas tangentes coïncidem, de modo que tudo se passa como se a tangente parasse um instante, e, como em seguida, há uma mudança no sentido da rotação, Plücker classificou-as de estacionárias ou de inflexão.

Consideremos de novo as coordenadas

$$x = \frac{x' + k\,x''}{1 + k} \quad y = \frac{y' + k\,y''}{1 + k} \quad z = \frac{z' + k\,z''}{1 + k}$$

do ponto M da recta $\overline{M' M''}$ e substituamos estes valores na equação homogénea F (x, y, z) = 0. Desenvolvendo, vem :

$$F(x'\,y'\,z') + k\,(x''\,F'_{x'} + y''\,F'_{y'} + z''\,F'_{z'}) +$$
$$+ \frac{k^2}{1.2}\,(x''^2\,F''_{x'x'} + y''^2\,F''_{y'y'} + z''^2\,F''_{z'z'} + 2\,x''\,y''\,F''_{x'y'} +$$
$$+ 2\,x''\,z''\,F''_{x'z'} + 2\,y''\,z''\,F''_{y'z'}) + \dots = 0$$

Para a recta ter dois pontos coïncidentes em M′ (x′ y′ z′) a equação anterior tem que admitir duas raizes nulas e portanto :

$$F(x'\,y'\,z') = 0 \quad x''\,F'_{x'} + y''\,F'_{y'} + z''\,F'_{z'} = 0$$

onde pelo menos uma das derivadas é diferente de zero para (x′ y′ z′). Para a recta encontrar a curva em mais um terceiro ponto coïncidente com os anteriores tem que ser simultâneamente

$$x\,F'_{x'} + y\,F'_{y'} + z\,F'_{z'} = 0$$
$$x^2\,F''_{x'x'} + y^2\,F''_{y'y'} + z^2\,F''_{z'z'} + 2\,x\,y\,F''_{x'y'} +$$
$$+ 2\,x\,z\,F''_{x'z'} + 2\,y\,z\,F''_{y'z'} = 0$$

o que mostra que a cónica representada pela segunda equação tem que degenerar em duas rectas, uma das quais seja a primeira equação.

Para isso o descriminante da segunda equação deve anular-se o que dá

$$H = \begin{vmatrix} F''_{x'x'} & F''_{x'y'} & F''_{x'z'} \\ F''_{y'x'} & F''_{y'y'} & F''_{y'z'} \\ F''_{z'x'} & F''_{z'y'} & F''_{z'z'} \end{vmatrix} = 0$$

ou, o que é o mesmo, o ponto M′ (x′ y′ z′) tem que satisfazer a uma equação

$$H = 0$$

equação essa que representa uma curva da ordem 3 (n — 2) a que se dá o nome de *hessiana*. Como além disso se tem simultâneamente

$$F(x'\,y'\,z') = 0$$

conclui-se o seguinte :

Os pontos de inflexão de uma curva são os pontos de encontro da curva com a sua hessiana, e portanto em número igual a 3 n (n — 2).

Ver *O. Hesse*, *Journal de Crelle*, t. 28.

O número de pontos de inflexão de uma curva é também apresentado por *Plücker*, no mesmo local, tomo 12.

Os pontos em que a hessiana é tangente à curva primitiva, são pontos de inflexão de ordem superior e seria fácil de ver que os pontos onde a curva algébrica tivesse p pontos de comum com a sua tangente, teria p — 2 com a sua hessiana, e tais pontos são equivalentes a p — 2 pontos de inflexão simples.

Porém é fácil demonstrar que dos pontos de encontro duma tangente com a curva não podem existir mais que três no ponto de contacto, sem que entre os coeficientes da equação da curva, haja uma relação de dependência.

Com efeito, sendo o número de tangentes que se podem conduzir a uma curva, uma simples infinidade, desde que se lhes imponha uma condição êsse número será limitado. (Ver Cramer, *Introdution á L'analyse des lignes courbes*, Génève 1750 pág. 403, e Cayley *Journal de Crelle* t. 34).

Continuemos a imaginar o ponto de contacto a descrever a curva ; quando o ponto parar um instante, sem a sua tangente deixar de rodar, e em seguida retroceder, continuando sempre a tangente a rodar no mesmo sentido, diz-se que a curva tem um *ponto de reversão* e a tangente em tal ponto é a *tangente de reversão*. A determinação destas tangentes faz-se dualmente com a equação tangencial

$$F(u, v, w) = 0$$

As coordenadas u, v, w da tangente satisfazem simultâneamente à equação da curva, e à equação

$$\begin{vmatrix} F''_{uu} & F''_{vu} & F''_{wu} \\ F''_{uv} & F''_{vv} & F''_{wv} \\ F''_{uw} & F''_{vw} & F''_{ww} \end{vmatrix} = 0$$

Então *o número das tangentes de reversão de uma curva de classe* k *é* 3 k (k — 2).

IX — Pontos múltiplos e tangentes múltiplas.

Chama-se *ponto múltiplo de ordem* p duma curva de ordem n, a um ponto tal que tôda a recta que o atravesse não encontra a curva em mais de n — p, outros pontos.

No caso de p = 2 o ponto é duplo, também chamado *nodo ;* nos nodos, a curva algébrica, admite duas tangentes, cada uma das quais encontra a curva em três pontos : dois pontos estão situados num mesmo ramo da curva e o terceiro ponto deve ser encarado como o ponto de cruzamento da tangente com o segundo ramo da curva.

Suponhamos que num ponto M da curva se cruzam dois ramos s e s' e que um terceiro ramo s'' corta os dois anteriores em pontos A e B. Façamos tender s'' para M. No limite a curva

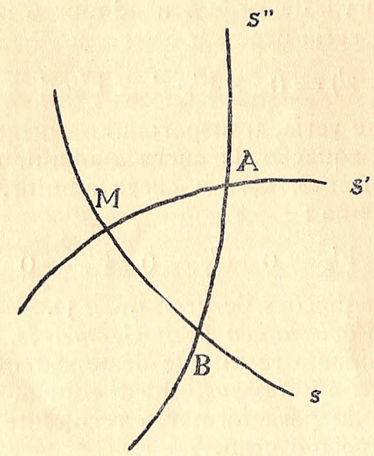

fig. 2

admite em M um ponto triplo que será equivalente aos três pontos duplos M, A e B.

Do mesmo modo, suponhamos que além dos dois ramos s e s' outros dois s'' e s''' se cruzavam num ponto N ; quando N tendesse para M, evidentemente que no limite a curva admitiria em M um ponto múltiplo de ordem 4 equivalente a seis pontos duplos. Generalisando : um ponto múltiplo de ordem p, equivale a um número de pontos duplos igual a

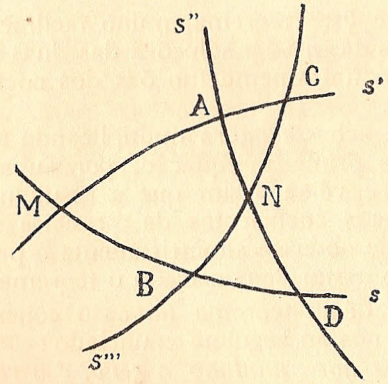

fig. 3

$$\frac{p\,(p-1)}{2}$$

Para uma curva de ordem n admitir o ponto $M'(x', y', z')$ como ponto duplo seria necessário ter

$$F(x', y', z') = 0 \quad x F'_{x'} + y F'_{y'} + z F'_{z'} = 0$$

o que fàcilmente se veria, transportando a origem dos eixos para M' e obrigando a equação da curva a admitir duas raizes nulas.

Ter-se-há, portanto, para a curva admitir, pelo menos, um ponto duplo o sistema:

$$F'_x = 0 \quad F'_y = 0 \quad F'_z = 0$$

formado por três equações de grau $(n - 1)$.

Clebsch em *Vorlesungen über Geometrie*, afirma não existir regra para determinar a resultante dêste sistema, porém Salmon nas suas *Introductory lessons*, third edition, art. 91 atribui a Sylvester um método para formar a resultante dum sistema de três equações do mesmo grau.

Podemos contudo aplicar o seguinte teorema que Clebsch demonstra na pág. 13 da sua geometria.

A resultante de três equações, respectivamente de graus m, n *e* p *relativamente a três variáveis homogéneas, é de grau* n p, *com respeito aos coeficientes da equação de grau* m, *de grau* m p *relativamente aos da equação de grau* n, *e* m n *relativamente aos da de grau* p.

Demonstra-se êste teorema, muito fàcilmente, supondo calculados os valores das $n \times p$ soluções das duas últimas equações. Êsses valores são ùnicamente funções dos coeficientes das duas últimas equações.

A resultante acha-se agora multiplicando as n. p expressões que se obtêm da primeira equação, por substituïção das soluções calculadas, e vê-se assim que a resultante é bem do grau n p em relação aos coeficientes da primeira equação. Mas o determinante pode obter-se simètricamente a partir das restantes equações, ficando assim demonstrado o teorema.

A aplicação dêste teorema ao caso concreto que estamos tratando, conduz-nos ao seguinte enunciado:

O eliminante que igualado a zero, é a resultante que dá a condição de existência de um ponto duplo, na curva correspondente de ordem n, *é do grau* $3(n - 1)^2$

Determinámos assim a condição de existência de um ponto duplo. O problema que a seguir se nos apresenta é o da determinação do número máximo de pontos duplos de uma curva algébrica de ordem n.

A determinação dêste número foi feita por Cramer para as oito primeiras ordens, e verificou-se que era dado por

$$\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

sem contudo se descobrir um método analítico de determinar curvas algébricas com o máximo de pontos duplos, nem mesmo uma construção geométrica dessas curvas. (Vêr Salmon — *A Treatise on the higher plane curves* pág. 31).

Deve-se à análise moderna a demonstração dêste teorema, que se encontra relacionado com os trabalhos de Riemann sôbre funções elípticas e abelianas.

Essa demonstração é repetida e utilisada por Clebsh nas suas memórias do *Journal de Crelle* t. LXIV pág. 210 t. LXXIII pág. 189, e ainda em *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. LX pág. 68.

Chasles deduz de um estudo feito sôbre superfícies regradas, uma demonstração simplecíssima dêste teorema, *Comptes Rendus*, t. LXII pág. 579.

Apesar de ser necessário demonstrar prèviamente duas proposições relativas às superfícies regradas seguiremos essa via, principalmente pela grande clareza e simplicidade de que é dotada.

Demonstremos então, como faz Chasles, o seguinte:

Dadas duas curvas, torsas ou planas, do espaço, que designaremos por U_n *e* $U_{n'}$, *de ordens* n *e* n', *cujos pontos* A *e* A' *se determinam individualmente, e se correspondem anharmònicamente, as rectas* $\overline{A A'}$, *que unem êstes pontos, dois a dois, formam uma superfície de ordem* $(n + n')$.

É necessário, para demonstrar o teorema, verificar que $(n + n')$ rectas, geratrizes da superfície, se apoiam numa recta qualquer *r*, do espaço. Um plano *r. X*, pertencente à recta *r* corta a curva U_n em n pontos, A, aos quais correspondem sôbre $U_{n'}$, n pontos A'. Chamemos *r. A'* os n planos definidos por *r* e pelos n A'. Então a um plano *r. X* correspondem n planos *r. A'*. Um dos planos r. A' corta a curva $U_{n'}$, em n' pontos A', a que correspondem em U_n, n' pontos X. Por estes pontos X passam n' planos *r. X* que correspondem a cada plano *r. A'*.

Das relações entre os planos *r. X* e os planos correspondentes *r. A'*, conclue-se que existem $(n + n')$ planos *r. X* que coïncidem, plano a plano, com os correspondentes *r. A'*.

Mas cada um dêstes planos contém um par de pontos correspondentes A A', das duas curvas, e por conseqüência, a recta que os une. Então $(n + n')$ geratrizes da superfície se apoiam em r, e a superfície é da ordem $(n + n')$, como queríamos provar.

Evidentemente, cortando a superfície por um plano, obtem-se uma curva cujos pontos se determinam individualmente, pois que êles correspondem às geratrizes da superfície, e estas, aos pontos duma das duas curvas, que por hipótese se determinam individualmente.

Sabe-se que numa superfície regrada de ordem n, cada geratriz encontra (n — 2) outras geratrizes. Com efeito, suponhamos um plano passando pela geratriz considerada, *a*. Esse plano corta a superfície segundo uma curva de ordem (n — 1) que é logar dos pontos em que o plano corta as outras geratrizes. Um dêstes pontos A' pertence a uma geratriz *a'* infinitamente próxima de *a*.

Façamos com que o plano seja tangente em *a*.

No limite o ponto A' vai caír em *a*, e será o ponto de contacto: Então a geratriz *a* cortará as outras (n — 2) geratrizes, sòmente.

Haverá assim em cada geratriz (n — 2) pontos em que ela corta as restantes. O conjunto dêstes sistemas de (n — 2) pontos, forma uma curva torsa que recebe o nome de *curva nodal* da superfície.

Posto isto demonstremos a segunda proposição de Chasles.

A curva nodal duma superfície de ordem n, *é da ordem*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Vamos supor o teorema demonstrado para uma curva de ordem n — 1, e vamos demonstrá-lo para uma de ordem n.

Uma secção plana da superfície de ordem (n — 1), tem $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ pontos duplos porque é essa a ordem da curva nodal da superfície. Com efeito um plano corta a curva nodal da superfície em $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ pontos e a secção plana tem nêsses pontos os seus pontos duplos, visto que nêsses pontos passam duas geratrizes da superfície.

Ora os pontos desta secção plana determinam-se individualmente, como será demonstrado posteriormente, Capítulo III.

Imaginemos no espaço uma recta *r* e a secção plana que designaremos por Σ e que é evidentemente uma curva da ordem (n — 1). Sôbre a recta e sôbre a curva, podemos sempre tomar, dois sistemas de pontos A B C... e A' B' C'... que se correspondem anharmònicamente.

Pelo teorema anterior as rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$... serão geratrizes de uma superfície de ordem n.

Ora, existe uma geratriz no plano da curva Σ; é a recta que une o ponto em que o plano corta r, com o ponto corres-

pondente de Σ. Esta recta encontra n — 2, geratrizes em (n — 2) pontos que pertencem à curva nodal da superfície. Além disso a curva Σ tem $\frac{1}{2}$(n — 2) (n — 3) pontos duplos que também pertencem à curva nodal.

Esta curva possue portanto, ao todo

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

pontos situados no plano de Σ sendo, portanto, esta a sua ordem.

Para n = 3 temos uma superfície de 3.ª ordem cuja curva nodal se sabe ser uma recta, e com efeito $\frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$

Então a curva nodal duma superfície de 4.ª ordem é da ordem $\frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3$, e por conseqüência a ordem da curva nodal duma superfície de 5.ª ordem, é

$$\frac{(5-1)(5-2)}{2} = 2.3 = 6$$

Só agora se encontra completa a indução do raciocínio e podemos concluir que a curva nodal da superfície de ordem n, é da ordem $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Finalmente, como conclusão dêste último teorema:

Uma curva plana de ordem n *tem* $\frac{1}{2}$(n — 1) (n — 2) *pontos duplos.*

Qualquer curva de ordem n, se pode obter por uma secção plana, duma superfície de ordem n.

Mas o plano corta a curva nodal da superficie também em $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pontos por ser essa a sua ordem, e êsses pontos serão todos os pontos duplos da curva de ordem n, considerada. Encontra-se assim perfeitamente demonstrado êste importante teorema.

Uma *tangente dupla* duma curva é uma recta tal que por um qualquer dos seus pontos se não podem conduzir mais que (k — 2) outras tangentes, se fôr k a classe da curva.

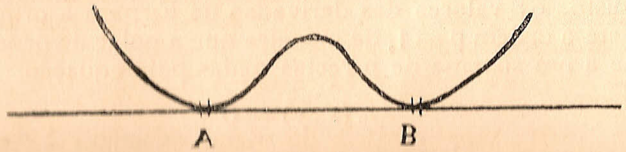

fig. 4

Será assim para tôda a recta que, como a da figura, é tangente à curva em dois pontos A e B. Quando os dois pontos A e B são reais e distintos temos uma *tangente dupla pròpriamente dita*; se os dois pontos são imaginários temos uma *tangente isolada*; finalmente, se há um único contacto, a tangente tem três pontos de comum com a curva e ela torna-se uma *tangente de inflexão*.

São precisamente, os casos duais, do *ponto nodal pròpriamente dito*, quando no ponto da curva há duas tangentes reais e distintas; do *ponto isolado* quando as duas tangentes são imaginárias e do *ponto de reversão* quando as duas tangentes coïncidem.

Para terminar diremos que, um estudo dual feito com a equação tangencial da curva nos conduziria a resultados correspondendo-se dualìsticamente com os tirados para os pontos múltiplos.

Do mesmo modo concluiremos como resumo, que deve fazer-se sobresair:

O número máximo de tangentes duplas duma curva de classe k *é dado por*

$$\frac{1}{2}(k-1)(k-2).$$

X — Comportamento das polares e hessiana nos pontos duplos.

Neste parágrafo demonstrar-se-hão algumas proposições preparatórias para o estabelecimento das fórmulas de Plücker de que tratará o parágrafo seguinte.

Consideremos a equação de uma curva relativamente a um sistema de eixos coordenados com origem num ponto múltiplo de ordem p. Essa equação será:

$$F(x,y,z) = f_p(x,y)z^{n-p} + f_{p+1}(x,y)z^{n-p-1} + \ldots + f_n(x,y) = 0$$

Com efeito, fazendo $z = 1$, e resolvendo o sistema formado pela equação da curva e a de uma recta passando pela origem, a equação resultante da substituïção na equação da curva de y por m x, admite p raizes nulas e (n—p), restantes não nulas.

Vimos no parágrafo V que as polares dum ponto da curva passam todas por êsse ponto e são àlém disso tangentes à curva. Além disto, os valores das derivadas de F, para a origem, anulam-se até à ordem $p-1$, de maneira que a polar de ordem $n-p$ reduz-se a um sistema de p rectas dadas pela equação

$$f_p(x,y) = 0$$

e não existem as polares de ordem mais elevada.

Vê-se que a origem é também um ponto múltiplo de ordem p em cada polar e que as suas tangentes são, como para a curva, dadas pela equação

$$f_p(x,y) = 0$$

Consideremos agora um ponto $M'(x'\ y'\ z')$ qualquer. A primeira polar dêsse ponto, em relação à curva $F(x, y, z) = 0$ será

$$x' F'_x + y' F'_y + z' F'_z = 0$$

A derivada F'_z contém no seu primeiro termo $f_p(x, y)$ e as outras derivadas teem potências de x e y, apenas, com expoente diminuido de uma unidade e então, na primeira polar, os menores graus de x e de y, serão $p-1$. Podemos concluir que:

Um ponto múltiplo de ordem p, *da curva, é um ponto múltiplo da ordem* $p-1$, *sôbre a primeira polar de qualquer ponto.*

Para a polar de ordem $n-r$, o menor grau de x e y é $p-r$, e portanto o ponto múltiplo é da ordem $p-r$, para essa polar.

Se considerarmos o caso de a curva admitir um ponto duplo, tomando êsse ponto para origem dos eixos, a equação da curva toma a forma:

$$F(x, y, z) = x\,y\,z^{n-2} + f_3 z^{n-3} + \ldots + f_n = 0$$

Na equação da primeira polar de M'

$$x' F'_x + y' F'_y + z' F'_z = 0$$

os termos de grau menor em x e y são $x y' + y x'$ e a equação da tangente na origem será:

$$x y' + y x' = 0$$

que é conjugada com a recta $x y' - y x' = 0$ que liga a origem com o polo M', relativamente às tangentes $x = 0$ e $y = 0$. A rasão anharmónica destas quatro rectas é igual a -1.

Se a origem fôr um ponto de reversão, teremos

$$F(x, y, z) = x^2 z^{n-2} + f_3 z^{n-3} + \ldots + f_n = 0$$

em que a recta $x = 0$ é a tangente de reversão. E como na polar o termo de menor grau é $x x'$ conclui-se que *a tangente de reversão, é tangente à primeira polar, no ponto de reversão.*

Também se conclui imediatamente que :

Nos pontos de reversão, a primeira polar e a curva, tocam-se em três pontos.

Consideremos agora a equação da hessiana

$$H = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{yx} & F''_{zx} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{zy} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

A forma dêste determinante conduz a várias definições desta curva. Com efeito consideremos a equação da polar de segunda ordem dum ponto M′ relativamente à curva algébrica de equação $F(x, y, z) = 0$. Será

$$x^2 F''_{x'x'} + y^2 F''_{y'y'} + z^2 F''_{z'z'} + 2\,x\,y\,F''_{x'y'} +$$
$$+ 2\,x\,z\,F''_{x'z'} + 2\,y\,z\,F''_{y'z'} = 0$$

Então poderemos definir a hessiana como o *logar geométrico dos pontos cujas polares cónicas, degeneram em duas rectas.*

Quando pretendemos exprimir que a primeira polar de M′ tem um ponto duplo, teremos de satisfazer simultâneamente às condições :

$$x'\,F''_{xx} + y'\,F''_{xy} + z'\,F''_{xz} = 0$$
$$x'\,F''_{yx} + y'\,F''_{yy} + z'\,F''_{yz} = 0$$
$$x'\,F''_{zx} + y'\,F''_{zy} + z'\,F''_{zz} = 0$$

e então *a hessiana é o logar geométrico dos pontos duplos da primeira polar de qualquer ponto.*

Consideremos agora a equação duma curva

$$F(x, y, z) = x\,y\,z^{n-2} + (c_1 x^3 + 3\,c_2 x^2 y +$$
$$+ 3\,c_3\,x\,y^2 + c_4\,y^3)\,z^{n-3} + f_4(x, y)\,z^{n-4} + \ldots = 0$$

tendo um ponto duplo na origem dos eixos e cujas tangentes nêsse ponto coïncidem com os eixos.

Ver-se-há que sem alterar as conclusões a tirar, podemos despresar os termos de ordem superior à primeira, em x e y, excepto o termo em y^3. Teremos a equação duma curva

$$(1)\quad x\,y\,z^{n-2} + c_4\,y^3\,z^{n-3} = 0$$

que se obteve substituïndo na origem, o elemento de um ramo pela tangente $y = 0$, e o elemento de outro pelo da parábola

$$x + c_4\,y^2 = 0$$

Conservámos o termo em y^3 para que a recta $x = 0$ encontre a curva sempre em três pontos coïncidentes, o que conserva a característica de ponto duplo, à origem.

Evidentemente que poderiamos ter feito antes

$$(2)\quad x\,y\,z^{n-2} + c_1\,x^3\,z^{n-3} = 0$$

Quer na equação (1), quer em (2), o factor y ou x figura para mostrar que existem dois ramos distintos da curva passando pela origem.

O hessiano da curva (1) tem por valor um determinante cujas duas primeiras colunas são

$$\begin{vmatrix} 0 & z^{n-2} \\ z^{n-2} & 6\,c_4\,y\,z^{n-3} \\ (n-2)\,y\,z^{n-3} & (n-2)\,x\,z^{n-3} + 3\,(n-3)\,c_4\,y^2 z^{n-4} \end{vmatrix}$$

e a terceira

$$\begin{vmatrix} (n-2)\,y\,z^{n-3} \\ (n-2)\,x\,z^{n-3} + 3\,(n-3)\,c_1\,y^2 z^{n-4} \\ (n-2)\,(n-3)\,x\,y\,z^{n-4} + (n-3)\,(n-4)\,c_4\,y^3 z^{n-5} \end{vmatrix}$$

e desenvolvendo, obtêem-se

$$x\,y\,z^{3n-8}\left[2\,(n-2)^2 - (n-2)\,(n-3)\right] +$$
$$+ c_4\,y^3 z^{3n-9}\left[6\,(n-3)(n-2) - (n-3)(n-4) - 6\,(n-2)^2\right]$$

e reduzindo chegamos ao seguinte resultado, para equação da hessiana

$$(n-2)\,x\,y\,z^{3n-8} - n\,c_4\,y^3\,z^{3n-9} = 0$$

Esta equação contem, no primeiro termo, o factor $x\,y$ e é fácil de vêr que o mesmo sucedia se não se desprezassem os termos. Daqui se conclue que: a hessiana possue também um ponto duplo na origem e com as mesmas tangentes, que a curva. Um dos ramos toca o eixo $y = 0$ e o outro é dirigido segundo o elemento da parábola

$$(n-2)\,x - n\,c_4\,y^2 = 0$$

cuja curvatura é oposta à da parábola

$$x + c_4\,y^2 = 0$$

Como se chegaria a uma conclusão semelhante com a curva (2) vemos que a curva e a hessiana no ponto duplo são, como indica a figura. Então poderemos resumir :

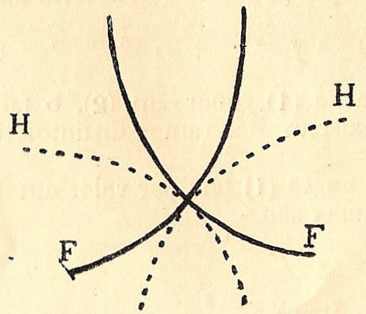

fig. 5

O número de pontos de intersecção que, em geral se podem considerar reünidos num ponto duplo, pertencendo simultâneamente a $F = 0$ *e a* $H = 0$ *é pois, igual a seis.*

Consideremos agora um ponto de reversão na origem : a equação da curva será :

$$F(x, y, z) = x^2 x^{n-2} + (c_1 x^3 + 3 c_2 x^2 y +$$
$$+ 3 c_3 x y^2 + c_4 y^3) z^{n-3} + \dots = 0$$

e para pontos da curva infinitamente próximos da origem teremos semelhantemente ao que foi feito :

$$(3) \quad x^2 z^{n-2} + c_4 y^3 z^{n-3} = 0$$

$$(4) \quad y^2 z^{n-2} + c_1 x^3 z^{n-3} = 0$$

A hessiana da curva (3), feitos os cálculos necessários é

$$x^2 y + \frac{n-3}{2(n-2)} c_1 y^4 = 0$$

e como o primeiro termo é do terceiro grau a hessiana possui um ponto triplo na origem : um ramo toca a recta $y = 0$; os dois outros são dados pela equação :

$$(5) \quad x^2 + \frac{n-3}{2(n-2)} c_1 y^3 = 0$$

e que são da mesma forma que a curva (3) apresentando também um ponto de reversão na origem, com a mesma tangente que a curva. Com o mesmo valor de y a equação (5) dá valores de x

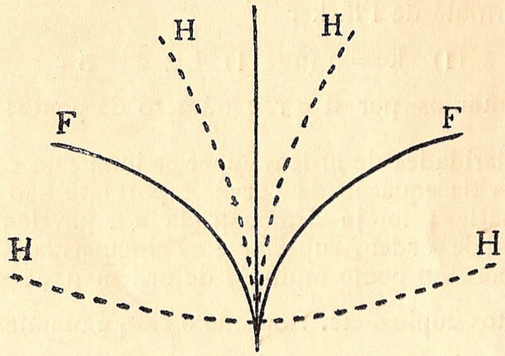

fig. 6

mais pequenos que (3). A curva tem no ponto de reversão os ramos mais afastados que os da hessiana como se vê na figura junta.

Resumindo :

Oito das intersecções, duma curva com ponto de reversão, e da sua hessiana estão reünidos no ponto de reversão.

Com estas conclusões importantes a que chegámos nêste parágrafo vamos estabelecer as fórmulas de Plücker.

XI — Fórmulas de Plücker.

Se supozermos que numa curva de ordem n, ou da classe k, se supõe a máxima generalidade, isto é, a equação de tal curva não supõe relação alguma entre os seus coeficientes, as singularidades que essa curva apresentar são chamadas *singularidades ordinárias.*

As fórmulas de Plücker, são quatro equações, entre as singularidades ordinárias duma curva algébrica.

Vejamos como se estabelecem estas fórmulas.

Designando, como temos feito até aqui, por n, a ordem da curva, e por k, a sua classe, vimos no parágrafo IV que se tinha

$$k = n(n-1)$$

Obteve-se êste número determinando as soluções do sistema formado pela equação da curva e pela equação da primeira polar.

Se a curva admitir pontos duplos e pontos de reversão viu-se no parágrafo anterior que o número de soluções dêste sistema que estamos considerando baixa de duas unidades por cada ponto duplo e baixa de três por cada ponto de reversão. Então temos a primeira fórmula de Plücker

$$(1) \qquad k = n\,(n-1) - 2\,d - 3\,r$$

onde representámos por d e r o número de pontos duplos e de reversão.

As singularidades de ordem superior implicam relações entre os coeficientes da equação da curva e portanto não são singularidades ordinárias; foi já demonstrada a equivalência entre as singularidades de ordem superior e as singularidades ordinárias.

Assim, por um ponto múltiplo de ordem p devem contar-se $\frac{p\,(p-1)}{2}$ pontos duplos, etc. Em todo o caso é manifesta a influência dessas singularidades superiores nos sistemas considerados.

Os pontos de inflexão de uma curva são também dados pelo sistema de duas equações; a hessiana e a curva. Como foi visto no parágrafo VIII, representando por w o número de pontos de inflexão temos

$$w = 3\,n\,(n-2)$$

Porém no parágrafo anterior viu-se que um ponto duplo abate o número de pontos de inflexão em seis unidades, e também o ponto de reversão em oito.

A segunda fórmula de Plücker é então:

$$(2) \qquad w = 3\,(n-2)\,n - 6\,d - 8\,r$$

Demonstradas estas duas primeiras expressões a dualidade permite estabelecer as restantes, que aliás se poderiam estabelecer fazendo o estudo com as coordenadas tangenciais. Designando então por t o número de tangentes duplas ou tangentes de inflexão temos

$$(3) \qquad n = k\,(k-1) - 2\,t - 3\,w$$

$$(4) \qquad r = 3\,(k-2)\,k - 6\,t - 8\,w$$

As fórmulas (1), (2), (3) e (4) relacionam as singularidades ordinárias.

$$n\,k, \quad d\,t, \quad r\,w$$

Se eliminarmos d entre (1) e (2) e t entre (3) e (4) virá

$$(5) \qquad 3\,(k-n) = w - r$$

Então as quatro fórmulas de Plücker representam três rela-

ções *distintas* entre as seis singularidades ordinárias visto que dados os valores de três delas as fórmulas

(1), (2), (3), (4) e (5)

dão as três restantes.

Exprimindo t em função de d, r e m encontrar-se-hia:

$$t = \frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^2-9) - (n^2-n-6)\,(2\,d+3\,r) +$$
$$+\,2\,d\,(d-1) + 6\,d\,r + \frac{9}{2}\,r\,(r-1)$$

Podemos concluir o teorema:

O número máximo de tangentes duplas duma curva de ordem n, *é, no caso da curva não ter pontos duplos,*

$$t = \frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^2-9)$$

Os restantes termos da fórmula são as reduções conseqüentes da existência dos pontos duplos. Igualmente se conclue que:

O número de pontos duplos de uma curva de classe k *que não possue tangentes duplas nem pontos de inflexão, é*

$$d = \frac{1}{2}\,k\,(k-2)\,(k^2-9)$$

Estes números foram deduzidos por Iacobi — *J. de Crelle*, t. 40, pág. 37, e por Clebsh, *mesmo local*, t. 63: vêr também — Salmon *Higher plane curves*, cap. IX.

XII — Género de uma curva algébrica.

As fórmulas de Plücker, permitem verificar a seguinte invariância:

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - d - r = \frac{(k-1)\,(k-2)}{2} - t - w$$

Basta, para isso, substituir no segundo membro, t pelo seu valor tirado da terceira fórmula de Plücker e eliminar em seguida k e w por intermédio das duas primeiras.

Vê-se, assim, que o número

$$g = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - d - r$$

pode considerar-se como uma nova singularidade ordinária que se corresponde dualìsticamente.

A esta nova singularidade deu-se o nome de *género da curva algébrica*.

A noção de género foi introduzida na geometria por Riemann, no seu belo trabalho *Theorie der Abelschen Funtionen* (tomo 54 do *Journal de Crelle)*.

Mas essa noção foi principalmente aplicada e desenvolvida, no que diz respeito às curvas, pelo grande geómetra Alfred Clebsh.

Com esta nova singularidade as fórmulas de Plücker tomam novo aspecto fácil de deduzir e apresentado pela primeira vez por Cayley, no tomo XI, pág. 185, do *Quarterly Journal*.

Este novo aspecto é apresentado por Clebsh nas *Leçons sur la Géométrie* (edição francesa, 1880, pág. 65, 2.° vol.) e aconselhado como sendo o mais fácil de reter na memória.

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= k + r - 2n \\ &= n + w - 2k \\ &= n(n-3) - 2(d + r) \\ &= k(k-3) - 2(t + w) \end{aligned}$$

Apresenta também Clebsh a observação, de que estas fórmulas dizem respeito tanto às singularidades reais como às imaginárias.

Poderiam, contudo, deduzir-se fórmulas dizendo respeito ùnicamente às singularidades reais como o demonstra o geómetra alemão Klein no tomo X dos *Mathem. Annalen*, e Perrin no *Bulletin de la Société mathématique de France*, tomo VI, pág. 84.

CAPÍTULO II

Teoremas gerais sôbre curvas algébricas.

Feixes e rêdes de curvas.

I — Teoremas.

No parágrafo I do capítulo anterior viu-se que uma curva algébrica de ordem n, seria determinada por

$$p = \frac{n(n+3)}{2}$$

condições, como por exemplo a passagem por um número igual de pontos de plano.

Há muitos casos, porém, em que p pontos dados ao acaso não bastam para determinar a curva.

Um caso que lembra imediatamente é o caso da curva de segunda ordem. Na teoria destas curvas viu-se que cinco pontos determinavam a curva se não estivessem três ou mais sôbre a mesma recta.

Se tal sucedesse não só a cónica degenerava, como até dos três pontos sôbre a recta, dois únicos valiam para efeitos de determinação da curva. Evidentemente a cónica degenera por existirem numa recta um número de pontos mais elevado que a ordem da curva, o que, repetimos, obriga a recta a pertencer à curva.

Podem então existir diversas curvas da ordem n definidas, mas mal, evidentemente, por p pontos.

Para a curva ficar perfeitamente definida será necessário que os pontos sejam *distintos*.

Uma curva de ordem n é encontrada por outra curva de ordem m, em m. n pontos reais ou imaginários que são as soluções do sistema formado pelas duas curvas. Se entre os p pontos que definem uma curva de ordem n, estão m. n + 1 pertencentes à linha de ordem n, o logar geométrico compõe-se desta linha e de outra da ordem n — m.

Como exemplo temos, que um sistema de nove pontos determinam uma cúbica; mas se sete dêsses pontos pertencem a uma cónica, a cúbica reduz-se à cónica e a uma recta que passa pelos dois restantes pontos.

Enunciemos agora alguns teoremas gerais :

Teorema I — *Tôdas as curvas de ordem n que passam por* p — 1 *pontos do plano, passam por* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *pontos fixos.*

Com efeito sejam $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ as equações de duas quaisquer linhas de ordem n, passando, por (p — 1) pontos.

O sistema

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

define n^2 pontos pertencentes simultâneamente às duas curvas. Então a equação

$$C_1 + k\, C_2 = 0$$

representa evidentemente uma curva que passa por n^2 pontos ao número dos quais pertencem os (p — 1) considerados. Como os n^2 pontos pertencem também a cada uma das curvas, estas além dos p — 1, passam ainda por

$$n^2 - p + 1$$

ou substitüindo o valor de p, temos que cada curva passa ainda por

$$n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

pontos fixos do plano.

Então as cúbicas que passam por oito pontos passam ainda por um nono ponto, e do mesmo modo as quárticas que passam por 13 pontos dados passam ainda por mais três pontos fixos.

Vê-se que, há quárticas passando por p = 14 pontos, sem ficarem bem determinadas.

Teorema II — *Se, dos* n^2 *pontos de encontro de duas curvas de ordem* n, m. n *pertencerem a uma curva de ordem* m, *os restantes* n^2 — m. n, *pertencem a uma curva da ordem* n — m.

No sistema das duas equações de grau n, $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, podemos substituir qualquer destas equações por

$$C_1 + k\, C_2 = 0$$

que representa uma curva da mesma ordem, e que passa por todos os pontos de encontro de C_1 e C_2.

Ora se existirem nos n^2 pontos, m. n pertencentes a uma curva de ordem m haverá evidentemente um valor de k para o qual $C_1 + k\, C_2 = 0$ seja um produto de duas funções, uma de grau m e outra de grau n, e portanto

$$M . N = 0$$

e se m. n pontos pertencem à curva M = 0 os n (n — m) restantes encontram-se na curva de equação N = 0 de ordem (n — m).

c. q. d.

Dêste teorema deduzem-se vários corolários.

Corolário I — *Dados dois sistemas de* n *rectas, se* m. n *pontos de encontro dessas rectas, pertencem a uma curva de ordem* n, *os restantes* n (n — m) *pontos de encontro estão numa curva de ordem* (n — m).

Corolário II — *Se em dois sistemas de* n *rectas, estiverem* 2 n *pontos de encontro sôbre uma cónica os restantes pontos estarão sôbre uma curva da ordem* n — 2.

Corolário III — *Num polígono de* 2 n *lados, inscrito numa cónica, os pontos de encontro dos lados de ordem impar com os lados não adjacentes de ordem par, encontram-se todos sôbre uma linha de ordem* n — 2.

Quando n = 3 encontra-se o conhecido *teorema de Pascal* para um hexágono inscrito numa cónica.

Corolário IV — *Se tirarmos tangentes a uma curva de ordem* n *pelos* n *pontos de uma secante dessa curva, os* n (n — 2) *pontos de encontro das tangentes e da curva, pertencem a uma mesma curva de ordem* (n — 2).

Basta considerar a secante como uma cónica degenerada em duas rectas coïncidentes.

Teorema III — *Sendo dadas três curvas de ordem* n, C_1, C_2 e C_3 *se se considerarem duas outras curvas da mesma ordem* C e C', *uma passando pelos pontos de intersecção de* C_1 e C_2, *a outra pelos de* C_1 e C_3, *os* n^2 *pontos de intersecção das curvas* C e C', *bem como os* n^2 *pontos de intersecção de* C_2 e C_3 *pertencem a uma curva de ordem* n.

Sejam então

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 0$$

as equações das curvas consideradas. As equações C = 0 e C' = 0 dão para valores convenientes de k e k'

$$C_1 + k\, C_2 = 0 \quad C_1 + k'\, C_3 = 0$$

e subtraindo-as vem :

$$k\, C_2 - k'\, C_3 = 0$$

Esta equação representa uma curva de ordem n que passa pelos pontos de $C = 0$ e $C' = 0$, e de $C_2 = 0$ e $C_3 = 0$.

c. q. d.

Teorema IV — *Entre os* m. n *pontos de encontro de duas linhas de ordens* m *e* n, *um certo número de pontos se encontram determinados pelos outros.*

Sejam

$$M = 0 \quad N = 0$$

as equações das curvas de ordem m e n.

Entre os m. n pontos comuns, são necessários

$$\frac{m\,(m+3)}{2}$$

para definir $M = 0$, e no caso de ser $m > n$, tomando

$$\frac{n\,(n+3)}{2}$$

pontos, a curva $N = 0$ fica completamente definida, e igualmente os restantes pontos de encontro com $M = 0$.

Ora êstes são em número

$$(1) \qquad m\,n - \frac{n\,(n+3)}{2}$$

No caso $m < n$ pode substituir-se $N = 0$ por uma das curvas de equação

$$N + P.\,M = 0$$

Onde P representa um polimónio de grau $(n - m)$ visto que ela encontra $M = 0$ nos mesmos pontos que $N = 0$ qualquer que seja P. Os coeficientes de P são arbitrários e em número de

$$\frac{(n-m+1)\,(n-m+2)}{2}$$

Ora, sem mudar os pontos de encontro de $M = 0$ e $N = 0$, podemos determinar os coeficientes de P de modo que desapareçam na equação

$$N + P.\,M = 0$$

um número igual de coeficientes.

Essa curva especial ficará determinada então por

$$\frac{n\,(n+3)}{2} - \frac{(n-m+1)\,(n-m+2)}{2} = m.\,n - \frac{(m-1)\,(m-2)}{2}$$

pontos, dos quais devemos subtrair os pontos comuns de $M = 0$ e $N = 0$; temos assim determinados pelos outros

$$(2) \qquad \frac{(m-1)\,(m-2)}{2}$$

pontos.

Quando a curva $N = 0$ passa por um ponto duplo de $M = 0$ êste ponto duplo é contado por dois nos m. n pontos comuns das duas curvas.

Então cada ponto duplo diminue o número (2) de uma unidade. Se $N = 0$ passa por d pontos duplos de $M = 0$, temos:

$$\frac{(m-1)\,(m-2)}{2} - d \qquad n > m$$

II — Feixes de curvas.

Sejam $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ duas curvas algébricas de ordem n. A equação

$$C_1 + k\,C_2 = 0$$

onde k é um parâmetro arbitrário, representa um conjunto de linhas tôdas de ordem n e que passam pelos n^2 pontos de intersecção das curvas C_1 e C_2.

Como o parâmetro arbitrário figura no primeiro grau o sistema de curvas representado por aquela equação designa-se por *feixe linear.*

Cada uma das curvas satisfaz a

$$\frac{n\,(n+3)}{2} - 1$$

condições e portanto ficará perfeitamente definida com mais uma condição. Com efeito submetendo, por exemplo, a curva a passar por um ponto determina-se univocamente k, e a curva. Então

Por cada ponto do plano, passa em geral uma curva do feixe, e só uma.

Se procurarmos as curvas do feixe que admitem um ponto duplo, teremos que determinar k de modo que se anule o descriminante da equação do feixe: como êsse descriminante é de grau $3\,(n-1)^2$ relativamente a k, podemos concluir que *existem, em geral, num feixe de curvas de ordem n,* $3\,(n-1)^2$ *curvas de ponto duplo.*

Êste número pode, contudo sofrer redução, nos casos de as curvas C_1 e C_2 serem tangentes, ou que no feixe se encontre uma curva com um ponto de reversão, ou ainda quando as curvas teem um ponto duplo comum. (Vêr Cremona — *Einleitung in die Theorie ebener Curven).*

Com um feixe de cónicas existem três pares de rectas que se encaram como cónicas com ponto duplo.

Designemos agora por $P_1 = 0$ e $P_2 = 0$ as primeiras polares de um ponto (x' y' z') em relação às curvas $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$.

A equação da primeira polar do mesmo ponto em relação às curvas do feixe é dada por

$$P_1 + k P_2 = 0$$

que é evidentemente satisfeita pelos $(n - 1)^2$ pontos comuns às duas polares P_1 e P_2. Então concluimos :

Tôdas as primeiras polares dum ponto em relação às curvas dum feixe passam por $(n - 1)^2$ *pontos fixos.*

Também concluiriamos que as segundas polares passam por $(n - 2)^2$ pontos e finalmente que as rectas polares passam tôdas por um ponto.

Muitas proposições se poderiam demonstrar sôbre os feixes de curvas, porém tornar-se-hia extensa a sua exposição e fugiriamos ao fim que temos em vista, e que se resume em, apresentar idéas muito sucintas sôbre as curvas algébricas.

Aconselhamos sôbre êste assunto a leitura das obras de Clebsh ou em especial as *Leçons sur la Géométrie* (tom. II e III).

III — **Rêdes de curvas.**

Dá-se êste nome aos sistemas de curvas de ordem n definidas pela equação geral

$$C_1 + h\, C_2 + k\, C_3 = 0$$

onde h e k são dois parâmetros arbitrários e, C_1, C_2, C_3 são três curvas da ordem n.

A característica analítica da rêde de curvas, consiste em cada uma das suas curvas depender linearmente de dois parâmetros. Este facto interpreta-se também geomètricamente do seguinte modo ; submetendo as curvas da rêde à condição de passarem por um ponto, as curvas formam um feixe. Por conseqüência uma reünião de curvas de ordem n que passam por

$$\frac{n\,(n + 3)}{2} - 2$$

pontos fixos fornecem o exemplo mais simples duma rêde.

O estudo das rêdes de curvas conduz-nos a algumas linhas muito interessantes, de que vamos falar.

Numa rêde de curvas há infinitas curvas com ponto duplo. Com efeito o descriminante da equação da rêde contém os coeficientes h e k e portanto para ser nulo, pode consegui-lo de duas infinidades de maneiras. As condições de existência de um ponto duplo são com efeito

$$\begin{aligned} C'_{1x} + h\,C'_{2x} + k\,C'_{3x} &= 0 \\ C'_{1y} + h\,C'_{2y} + k\,C'_{3y} &= 0 \\ C'_{1z} + h\,C'_{2z} + k\,C'_{3z} &= 0 \end{aligned}$$

A eliminação de h e k entre estas três equações conduz a

$$\begin{vmatrix} C'_{1x} & C'_{2x} & C'_{3x} \\ C'_{1y} & C'_{2y} & C'_{3y} \\ C'_{1z} & C'_{2z} & C'_{3z} \end{vmatrix} = 0$$

equação do grau $3\,(n - 1)$ que tem o nome de *hessiana* ou *Iacobiana da rêde.*

A Iacobiana duma rêde, àlém de ser uma curva de ordem $3\,(n - 1)$ *é também o logar geométrico dos pontos duplos.*

Consideremos agora a polar linear de um ponto (x' y' z') em relação a uma curva da rêde ; a sua equação será

$$x\,C'_{1x'} + y\,C'_{1y'} + z\,C'_{1z'} + h\,(x\,C'_{2x'} + y\,C'_{2y'} + z\,C'_{2z'}) + \\ + k\,(x\,C'_{3x'} + y\,C'_{3y'} + z\,C'_{3z'}) = 0$$

e suponhamos que o polo pertence à hessiana ; nêste caso teremos evidentemente que as equações

$$\begin{aligned} x\,C'_{1x'} + y\,C'_{1y'} + z\,C'_{1z'} &= 0 \\ x\,C'_{2x'} + y\,C'_{2y'} + z\,C'_{2z'} &= 0 \\ x\,C'_{3x'} + y\,C'_{3y'} + z\,C'_{3z'} &= 0 \end{aligned}$$

indicam que as polares lineares concorrem tôdas num mesmo ponto. Então *a hessiana é o logar dos pontos cujas polares lineares concorrem num ponto.*

Se o polo (x' y' z') percorrer a hessiana o ponto de concurso das rectas polares descreve uma curva que se obteria destas últimas equações eliminando entre elas os valores x' y' z'.

A essa curva dá-se o nome de *steineriana da rêde.* Como a resultante do sistema é de grau $3\,(n - 1)^2$ em x y z, concluimos que

A steineriana duma rêde é uma curva de ordem $3\,(n - 1)^2$.

Entre os pontos da jacobiana e da steineriana há uma correspondência biunívoca tal que as rectas que unem os pontos definem tangencialmente uma nova curva a que se dá o nome de *cayleyana da rêde.*

Esta última curva é da classe 3 n (n — 1) como seria fácil de demonstrar. (Vêr Clebsh *obra citada* pág. 82).

Para estudo minucioso das rêdes, àlém de Clebsh são utilíssimos Cremona na sua obra já citada e, de Jonquières — *Mathem. Annalen.*

CAPÍTULO III

As curvas de género zero.

Unicursais

I — Definição.

O desenvolvimento sempre crescente do cálculo integral onde se nota o aparecimento de novas integrações, fez surgir novas funções transcendentes. A determinação das áreas e cumprimentos de arcos de curvas dependem de integrais, a grande maioria dos quais se não calculam por intermédio das funções elementares. Um exemplo frizante encontra-se na determinação do arco duma elipse cujo integral deu origem aos trabalhos de Riemann, de Iacobi e tantos outros sôbre as funções elípticas e abelianas. Também a integração das diferenciais relativas às unicursais deu origem aos trabalhos de Chasles, Cayley e Clebsh sôbre o estudo geral e particular das curvas algébricas.

Dissemos já anteriormente, ter sido Riemann o introdutor da noção de género na teoria das funções, noção esta, que foi imediatamente aplicada e desenvolvida, no estudo das curvas por Clebsh e Cayley.

Naturalmente se seguiram estudos permenorisados sôbre curvas dos primeiros géneros, e se Cayley estudou as curvas de género zero, dando-lhes o nome de *unicursais*, Clebsh estudava as curvas de género um, enquanto a análise, com os integrais relativos a estas curvas, estudava as funções elípticas e abelianas, como tínhamos dito.

No capítulo presente, vamos estudar ràpidamente as curvas *unicursais*, isto é, *as curvas algébricas cujo número de pontos duplos atinge o seu máximo*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Elas gosam de uma propriedade importantíssima que passamos a expôr.

II — Propriedade fundamental.

As curvas de género zero gosam da propriedade de todos os seus pontos poderem sêr determinados individualmente. Este facto resulta do teorema demonstrado por Chasles na sua memória em *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences* t. LXII, pág. 584 e que exporemos, em seguida.

Se uma curva C_n *(de ordem* n*) possui* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *pontos duplos, podemos determinar os seus pontos individualmente, utilisando um feixe de curvas de ordem* $(n-1)$, *que têem* $(n-2)$ *pontos duplos comuns com igual número de pontos duplos de* C_n, *e* $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ *pontos simples coïncidindo com os outros pontos duplos de* C_n, *e que passam tôdas por um outro ponto fixo de* C_n.

Com efeito, se se considera um feixe de curvas de ordem $(n-1)$, êle ficará determinado pelo número de pontos dado pela fórmula já conhecida

$$\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1=\frac{n^2+n-4}{2}$$

constitüindo estes pontos o que também se chama *base do feixe*.

Ora os $(n-2)$ pontos duplos de C_n, por onde passa o feixe, equivalem a $3(n-2)$ pontos simples. Mas o feixe passa ainda por mais $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$ pontos e então o número total de pontos para determinar o feixe é

$$3(n-2)+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1$$

e o feixe está perfeitamente determinado.

Reparemos agora que cada curva de feixe, é de ordem $(n-1)$ e cortará C_n, em $n(n-1)$ pontos dos quais são já conhecidos os seguintes:

— um no ponto fixo de C_n por onde passam todas as curvas do feixe.

— $4(n-2)$ encontram-se nos $(n-2)$ pontos duplos de C_n onde também as curvas do feixe têm pontos duplos.

— finalmente $(n-2)(n-3)$ nos outros pontos duplos de C_n.

Com efeito os restantes pontos duplos de C_n são

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-(n-2)=(n-2)(n-3)$$

Temos assim um total de pontos igual a

$$4(n-2)+(n-2)(n-3)+1=n(n-1)-1$$

Então as curvas cortam-se ainda num ponto variável, o que demonstra o teorema.

Chasles apresenta ainda um novo teorema onde emprega um feixe de ordem $(n-2)$.

As curvas do feixe que tem por base, δ *pontos duplos coïncidindo com pontos duplos de* C_n, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ *pontos simples coïncidindo com os restantes pontos duplos de* C_n, *e* $(n-3-2\delta)$ *outros pontos simples tomados sôbre* C_n, *determinam individualmente os pontos de* C_n.

Com efeito, vejamos que o feixe fica perfeitamente determinado.

Os δ pontos duplos equivalem a 3δ pontos simples.

Além disto, o feixe passa por $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ pontos duplos restantes e também por $(n-3-2\delta)$ outros pontos simples sôbre C_n.

Então existem, ao todo, para determinar o feixe

$$3\delta+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta+n-3-2\delta$$

$$=\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1$$

pontos fixos. O feixe está perfeitamente determinado.

Cada curva do feixe é de ordem $n-2$ e encontra portanto a curva C_n em $n(n-2)$ pontos.

Um dêstes pontos é evidentemente variável visto que se tem

$$4\delta+(n-1)(n-2)-2\delta+n-3-2\delta=n(n-2)-1$$

Este feixe de ordem $(n-2)$ também determina individualmente os pontos de C_n.

c. q. d.

Clebsh apresentou uma proposição como a anterior mas onde considera $\delta=0$

III — Determinação das coordenadas do ponto genérico da curva, em função racional de uma variável θ.

Seja $F(x,y)=0$, a equação de uma curva unicursal de ordem n.

Começaremos por determinar os valores reais e imaginários de x e y que satisfaçam simultâneamente às equações

$$F(x, y) = 0 \qquad F'_x = 0 \qquad F'_y = 0$$

Esses sistemas de valores x, y serão por hipótese em número igual a

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Em seguida dividiremos êstes, em dois grupos: um com $n - 2$ pontos duplos

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = b_1 \end{cases} \begin{cases} x = a_2 \\ y = b_2 \end{cases} \cdots \begin{cases} x = a_{n-2} \\ y = b_{n-2} \end{cases}$$

e outro grupo com $\frac{1}{2}(n-2)(n-3) = u$

$$\begin{cases} x = g_1 \\ y = h_1 \end{cases} \begin{cases} x = g_2 \\ y = h_2 \end{cases} \cdots \begin{cases} x = g_u \\ y = h_u \end{cases}$$

Posto isto, tomaremos para equação geral das curvas de ordem $n - 1$, $f(x, y) = 0$, e faremos com que estas curvas admitam $(n - 2)$ pontos duplos.

Determinaremos portanto as três condições.

$$f(x, y) = 0 \qquad f'_x = 0 \qquad f'_y = 0$$

para os pontos

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = b_1 \end{cases} \begin{cases} x = a_2 \\ y = b_2 \end{cases} \cdots \begin{cases} x = a_{n-2} \\ y = b_{n-2} \end{cases}$$

Em seguida com os outros pontos duplos de F (x, y) determinaremos as $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ condições

$$f(g_1, h_1) = 0 \quad f(g_2, h_2) = 0 \cdots$$

Como ainda, o feixe tem que passar por um ponto fixo $(x_0\ y_0)$ da curva unicursal teremos finalmente uma última condição

$$f(x_0\ y_0) = 0 \quad , \quad F(x_0\ y_0) = 0$$

que contém uma quantidade variável. Assim ficam os coeficientes da equação do feixe determinados por equações do primeiro grau, em função linear duma variável θ.

Para calcularmos agora as relações

$$x = \varphi(\theta) \quad y = \psi(\theta)$$

calculam-se as somas dos valores de x e dos valores de y que satisfazem simultâneamente às equações

$$F(x, y) = 0 \quad f(x, y) = 0$$

Essas somas são evidentemente

$$x + 4(a_1 + a_2 + \ldots) + 2(g_1 + g_2 + \ldots) + x_0$$

e

$$y + 4(b_1 + b_2 + \ldots) + 2(h_1 + h_2 + \ldots) + y_0$$

Vamos demonstrar que estas somas são fracções racionais com o mesmo denominador, cujos termos são polinómios do grau n em θ

Consideremos primeiro a equação final em x que se obtém substituindo em f (x, y) os valores de y raizes de F (x, y) = 0 e formando o produto dessas n expressões. Então se forem

$$y_1\ y_2 \cdots y_n$$

as raizes de $F(x, y) = 0$, a equação em x será

$$f(x, y_1) \times f(x, y_2) \times \cdots \times f(x, y_n) = 0$$

Façamos

$$F(x, y) = x^n f_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots$$

e designemos por

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda.$$

as raizes da equação

$$f_i\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

teremos (Capítulo I parágrafo VII):

$$y_1 = \alpha x - \frac{f_{n-1}(\alpha)}{f'_n(\alpha)} \qquad \ldots\ y_n = \lambda x - \frac{f_{n-1}(\lambda)}{f'_n(\lambda)}$$

Fazendo também

$$f(x, y) = x^{n-1} \varphi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \varphi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots$$

obteríamos fàcilmente

$$f(x, y_1) = x^{n-1} \varphi_{n-1}(\alpha) - x^{n-2} \frac{\varphi'_{n-1}(\alpha) f_{n-1}(\alpha) - \varphi_{n-2}(\alpha) f'_n(\alpha)}{f'_n(\alpha)} + \ldots$$

$$f(x, y_2) = x^{n-1} \varphi_{n-1}(\beta) - x^{n-2} \frac{\varphi'_{n-1}(\beta) f_{n-1}(\beta) - \varphi_{n-2}(\beta) f'_n(\beta)}{f'_n(\beta)} + \ldots$$

Então multiplicando membro a membro e dividindo por $\varphi_{n-1}(\alpha)\ \varphi_{u-1}(\beta) \dots \varphi_{n-1}(\lambda)$ e fazendo para simplificar

$$\Theta(x) = \frac{\varphi'_{n-1}(x)\, f_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)\, f'_n(x)}{f'_n(x) \cdot \varphi_{n-1}(x)}$$

obtem-se

$$\frac{f(x, y_1) \cdot f(x, y_2) \dots f(x, y_n)}{\varphi_{n-1}(\alpha)\ \varphi_{n-1}(\beta) \dots \varphi_{n-1}(\lambda)} = x^{n^2-n} -$$

$$- x^{n^2-n-1}\Big[\Theta(\alpha) + \Theta(\beta) + \dots + \Theta(\lambda)\Big] + \dots = 0$$

Deduzamos agora a equação final em y. Para isso se fizermos

$$F(x, y) = y^n F_n\left(\tfrac{x}{y}\right) + y^{n-1} F_{n-1}\left(\tfrac{x}{y}\right) + \dots$$

$$f(x, y) = y^{n-1} \Phi_{n-1}\left(\tfrac{x}{y}\right) + y^{n-2} \Phi_{n-2}\left(\tfrac{x}{y}\right) + \dots$$

onde evidentemente

$$F_n\left(\tfrac{x}{y}\right) = x^n f_n\left(\tfrac{y}{x}\right) \quad F_{n-1} = x^{n-1} f_{n-1}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

$$\Phi_{n-1}\left(\tfrac{x}{y}\right) = x^{n-1} \varphi_{n-1}\left(\tfrac{y}{x}\right) \quad \Phi_{n-2}\left(\tfrac{x}{y}\right) = x^{n-2} \varphi_{n-2}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

de modo que agora teriamos que empregar os inversos de

$$\alpha, \beta, \dots \lambda.$$

Enfim; encontraríamos a equação em y

$$y^{n^2-n} - y^{n^2-n-1}\Big[(n-1)\frac{\xi_1}{\xi} + \alpha\,\Theta(\alpha) +$$

$$+ \beta\,\Theta(\beta) + \dots + \lambda\,\Theta(\lambda)\Big] + \dots = 0$$

Então empregando o símbolo Σ para abreviar, teremos

$$x + 4(a_1 + a_2 + \dots) + 2(g_1 + g_2 + \dots) + x_0 = \Sigma\,\Theta(\alpha)$$

$$y + 4(b_1 + b_2 + \dots) + 2(h_1 + h_2 + \dots) + y_0 =$$

$$= (n-1)\frac{\xi_1}{\xi} + \Sigma\,\alpha\,\Theta(\alpha)$$

onde ξ_1 e ξ são os coeficientes de x^n e x^{n-1} nos polinómios $f_n(x)$ e $f_{n-1}(x)$.

As quantidades $\alpha, \beta, \dots \lambda$ são independentes de θ e a função $\Theta(x)$ contém esta variável só no primeiro grau nos termos

$$\varphi_{n-1}(x) \qquad \varphi_{n-2}(x)$$

de modo que os segundos membros são fracções racionais de denominadores iguais, e cujos numeradores (e denominador comum) são de grau n em θ. Então o mesmo sucede para x e y.

Esta determinação de x e y em função racional de θ foi orientada por um método de eliminação que *Liouville* apresenta numa sua memória no *Journal des Mathématiques, etc.* ano 1841, pág. 345.

IV — Singularidades ordinárias, nas unicursais.

Fixado o grau n duma curva de género zero, as fórmulas de Plücker dão-nos diversos sistemas de valores de

$$d,\ r,\ t \text{ e } w.$$

Porém se no capítulo I, se deduziram essas fórmulas, recordemos que:

Não se demonstrou, até aqui, que, inversamente, todo o sistema de números inteiros, satisfazendo às fórmulas de Plücker, possa encontrar-se, realmente, numa curva.

Não só se não demonstrou tal facto como até seria isso impossível visto que alguns, senão todos êsses números admitem limites superiores e inferiores que nunca poderão ultrapassar. Para exemplo importante do que se afirma podemos demonstrar o seguinte teorema:

O número g é necessàriamente igual ou superior a zero, se a curva tiver que sêr pròpriamente considerada (ou irreductível a outras curvas de ordem menos elevada).

Isto é: se a curva é *irreductível* será necessàriamente

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geqq d + r$$

da mesma maneira

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqq t + w$$

Demonstremos por absurdo e suponhamos então que g era menor que zero; seria

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + s$$

Podemos fazer passar uma curva de ordem (n — 1), por êstes pontos duplos e por mais

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - s = 2(n-1) - s$$

outros pontos. Então esta curva de ordem $(n - 1)$ tem de comum com a curva de ordem n

$$2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + s\right] + 2(n-1) - s = n(n-1) + s$$

isto é, mais s pontos do que deveria possuir e portanto a curva de ordem n de género negativo decompõe-se necessàriamente em duas curvas de ordens menos elevadas o que é contra a hipótese de irreductível feita sôbre a curva.

c. q. d.

Para o caso das curvas unicursais é

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

e a fórmula de Plücker,

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

dá sucessivamente

$$w = 3n(n-2) - 6(d+r) - 2r$$

e

$$w = 3(n-2) - 2r$$

Esta última forma indica que os pontos de reversão têem também (para as unicursais) um limite superior, visto que w, nunca pode ser negativo. Então.

Entre os $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *pontos duplos e de reversão, de uma curva unicursal, não se podem encontrar mais que* $\frac{3}{2}(n-2)$ *pontos de reversão.*

V — Unicursais de segunda ordem.

Suponhamos $n = 2$ e determinemos o género das cónicas. Virá

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$$

o que permite concluir que *as cónicas são curvas unicursais.*

Os números de Plücker para as cónicas, são os seguintes:

$$d = r = w = t = 0$$

e

$$k = n = 2$$

Evidentemente que uma cónica irreductível, não pode possuir um ponto duplo, visto que, se tal sucedesse, a recta passando por êsse ponto e por outro qualquer ponto da curva, cortaria a cónica em três pontos e portanto pertenceria à cónica; o primeiro membro da equação da cónica poderia então decompor-se num produto de dois factores de grau menor que dois, isto é, a cónica era reductível.

É o que sucede com o sistema de duas rectas para as quais os números de Plücker são:

$$k = 0 \quad n = 2 \quad d = 1$$

Duma maneira dual temos para o sistema de dois pontos os seguintes números:

$$k = 2 \quad n = 0 \quad t = 1$$

Procuremos agora aplicar a estas curvas o teorema de Chasles.

O feixe de curvas de ordem $n - 1$, é nêste caso um feixe de rectas, que passa por um ponto fixo $(x_0\, y_0)$ da cónica. Seja

$$y - y_0 = \theta(x - x_0)$$

a equação do feixe, e seja

$$A x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

a equação da cónica. Eliminando y entre as duas equações obtemos uma equação do segundo grau em x que dá as abscissas dos pontos de encontro da recta com a curva.

Como um dos pontos de encontro é o ponto $(x_0\, y_0)$ o primeiro membro da equação em x é divisível por $x - x_0$. A aplicação da regra de Rufini conduz à equação

$$(A + 2B\theta + C\theta^2)x + \\ + (A x_0 + 2B y_0 + 2C y_0 \theta + 2E\theta - C x_0 \theta^2 + 2D) = 0$$

visto que

$$A x_0^2 + 2B x_0 y_0 + C y_0^2 + 2D x_0 + 2E y_0 + F = 0$$

Então teremos

$$x = -\frac{(A x_0 + 2B y_0 + 2D) + 2(C y_0 + E)\theta - C x_0 \theta^2}{A + 2B\theta + C\theta^2}$$

e conseqùentemente

$$y = y_0 + \theta\left[-\frac{(A x_0 + 2B y_0 + 2D) + 2(C y_0 + E)\theta - C x_0 \theta^2}{A + 2B\theta + C\theta^2} - x_0\right]$$

Os valores de x e y são pois duas fracções racionais de θ em que os denominadores são iguais e tanto em x como em y os termos das fracções são polinómios do grau $n = 2$ em θ.

VI — Unicursais de terceira ordem.

Os números de Plücker relativos às cúbicas em geral, são ; para as curvas de terceira ordem

$$n = 3$$

d	r	k	w	g
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

Dêste pequeno quadro vêmos que as cúbicas são, em geral, curvas do género um.

As cúbicas unicursais são as cúbicas com um ponto duplo, e portanto as das duas últimas linhas.

Dualmente, entre as curvas unicursais de terceira classe há as indicadas pelo seguinte quadro

$$k = 3$$

t	w	n	r	g
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

Também são em geral do género um. Figuram entre elas curvas de 4.ª ordem de que falaremos no parágrafo seguinte.

As curvas unicursais de terceira classe são também ùnicamente as que possuem uma tangente dupla ou um ponto de reversão.

Quando se refere a equação duma cúbica unicursal a um sistema de eixos com origem no ponto duplo, essa equação toma a forma bem simples :

$$a x^2 + a' x y + a'' y^2 = b x^3 + b' x^2 y + b'' x y^2 + b''' y^3$$

Nêsse caso as rectas dum feixe com séde na origem e cuja equação é

$$y = \theta x$$

dá, depois dum cálculo bem facil :

$$x = \frac{a + a' \theta + a'' \theta^2}{b + b' \theta + b'' \theta^2 + b''' \theta^3} \qquad y = \frac{a \theta + a' \theta^2 + a'' \theta^3}{b + b' \theta + b'' \theta^2 + b''' \theta^3}$$

e portanto, sempre x e y funções racionais de θ.

Citemos alguns exemplos de cúbicas com ponto duplo :

Folium de Descartes :

A equação desta curva é :

$$x^3 - 3 a x y + y^3 = 0$$

tomando para eixos coordenados as tangentes à curva no seu ponto duplo.

Como a equação apresentada é simétrica em ordem a x e y, vê-se que ela admite a bissectriz dos eixos como um eixo de simetria.

Fazendo então uma mudança de coordenadas definida por

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

obtém-se a seguinte equação, para a curva :

$$Y^2 = \frac{X^2 (3 a - \sqrt{2} X)}{3 (a + \sqrt{2} X)}$$

Desta última equação deduz-se fàcilmente que o folium tem um ponto duplo na origem e uma assintota de equação

$$X = - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Se na primeira equação do folium fizermos

$$y = \theta x$$

obtemos com facilidade as relações seguintes :

$$x = \frac{3 a \theta}{1 + \theta^3} \qquad y = \frac{3 a \theta^2}{1 + \theta^3}$$

Folium parabólico.

Com êste nome designa *Longchamps*, na sua *Geometria da régua e do esquadro*, 1890, pág. 120, a curva de equação

$$x^3 - a (x^2 - y^2) - b x y = 0$$

Quando $b = 0$, a curva é simétrica em relação ao eixo dos xx, e toma o nome de *folium recto ;* se $b \neq 0$ o folium é *oblíquo.*

Igualmente com o feixe de rectas de equação

$$y = \theta x$$

se obtêem as coordenadas dos pontos desta curva

$$x = a (1 - \theta^2) + b \theta \quad y = a (1 - \theta^2) \theta + b \theta^2$$

Entre as cúbicas há uma classe de curvas que recebe o nome de *cúbicas circulares*. A sua equação geral é

$$(a\,x + b\,y)\,(x^2 + y^2) = P\,x^2 + Q\,x\,y + R\,y^2 + T\,x + U\,y + V$$

e corresponde-lhes uma assintota real de equação

$$a\,x + b\,y = \frac{P\,b^2 - Q\,a\,b + R\,a^2}{a^2 + b^2}$$

e outras duas imaginárias de coeficiente angular $+ i$ e $- i$.

Na equação destas cúbicas podemos fazer desaparecer b y adoptando para novo eixo das ordenadas uma paralela à assintota real ; nêsse novo sistema a equação será

$$(x^2 + y^2)\;x = P_1\;x^2 + Q_1\;x\;y + R_1\;y^2 + T_1\;x + U_1\;y + V_1$$

Mudando agora a origem das coordenadas para o ponto $(0, \frac{Q_1}{2})$, a equação geral das cúbicas circulares é, finalmente :

$$(x^2 + y^2)\;x = A\,x^2 + A'\,y^2 + 2\,C\,x + 2\,C'\,y + F$$

A rasão do nome, dado a esta classe de curvas, reside no facto de elas serem envolventes de círculos cujos centros se encontram em parábolas que são distintas de curva para curva.

Entre as cúbicas circulares interessam-nos ùnicamente as que são unicursais. Estas *cúbicas circulares unicursais* possuem como se sabe um ponto duplo e tomando-o para origem de coordenadas permite em todos os casos reduzir a equação da curva à forma :

$$x\,(x^2 + y^2) = P_2\,x^2 + Q_2\,x\,y + R_2\,y^2$$

Fazendo nesta equação

$$y = \theta\,x$$

vem fàcilmente

$$x = \frac{P_2 + Q_2\,\theta + R_2\,\theta^2}{1 + \theta^2} \qquad y = \theta\,\frac{P_2 + Q_2\,\theta + R_2\,\theta^2}{1 + \theta^2}$$

São exemplos de *cúbicas circulares unicursais* as curvas que em seguida se apresentam.

Cisoide de Diocles

Eutócio nos seus comentários às obras de Arquimedes atribue

a invenção desta curva a *Diocles* com o fim de resolver os célebres problemas de Delos e o da duplicação do cubo.

A equação cartesiana desta curva é

$$y^2 = \frac{x^3}{2\,a - x}$$

Pondo na equação da curva

$$x = t\,y$$

obtem-se

$$x = \frac{2\,a\,t}{(\text{sen}\,\alpha + t.\cos\alpha)\,(1 + t^2)} \qquad y = \frac{2\,a}{(\text{sen}\,\alpha + t.\cos\alpha)\,(1 + t^2)}$$

onde α é um ângulo tal que a equação da curva se possa pôr sob a forma

$$(x^2 + y^2)\,(x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha) = 2\,a\,y^2$$

Conchoide de Sluse

É uma curva de equação

$$a\,(x - a)\,(x^2 + y^2) = k^2\,x^2$$

que possue uma assintota real de equação $x = a$ e um ponto isolado na origem. Tem àlem disso dois pontos de inflexão.

Fazendo

$$y = \theta\,x$$

obtem-se

$$x = a + \frac{k^2}{a\,(1 + \theta^2)} \qquad y = a\,\theta + \frac{k^2\,\theta}{a\,(1 + \theta^2)}$$

As coordenadas dos pontos de inflexão

$$x = \frac{4\,a\,(a^2 + k^2)}{4\,a^2 + k^2} \qquad y = \pm\,\frac{4\,(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{4\,(a^2 + k^2)\,\sqrt{3}}$$

A eliminação de k entre estas coordenadas conduz a uma cisoide e portanto *o logar geométrico dos pontos de inflexão de tôdas as conchoides de Sluse que tenham a mesma assíntota e o mesmo ponto singular, é uma cisoide.*

Sluse atribue a Huyghens a determinação dos pontos de inflexão *Oeuvres de Huyghens*, t. IV pág. 292).

Trisectriz de Maclaurin.

Dá-se o nome de *trisectriz de Maclaurin* a uma curva considerada pela primeira vez por Maclaurin.

A sua equação é

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2)$$

É uma curva simétrica em relação ao eixo dos xx e possuindo uma assíntota real dada pela equação $x = -a$, e um ponto duplo na origem.

Apresenta dois pontos de abscissa

$$x = -a\sqrt{3}$$

sendo um máximo e outro mínimo, com as ordenadas

$$y = \pm a\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$$

Se na sua equação fizermos $y = \theta x$ vem

$$x = a.\frac{\theta^2 - 3}{1 + \theta^2} \quad y = a.\theta.\frac{\theta^2 - 3}{1 + \theta^2}$$

Outras cúbicas circulares como a *estrofoide*, são unicursais.

VII — Quárticas unicursais:

As quárticas ou curvas de quarta ordem, são em geral do género três e apresentam grande número de tangentes duplas. Podem existir três pontos duplos e também um máximo de

$$\frac{3}{2}(n - 2) = 3$$

pontos de reversão.

Os números de Plücker que correspondem às curvas de quarta ordem encontram-se no quadro seguinte:

$n = 4$

d	r	k	w	t	g
0	0	12	24	28	3
1	0	10	18	16	2
0	1	9	16	10	2
2	0	8	12	8	1
1	1	7	10	4	1
0	2	6	8	1	1
3	0	6	6	4	0
2	1	5	4	2	0
1	2	4	2	1	0
0	3	3	0	1	0

Não só estas curvas de quarta ordem como as de terceira apresentadas anteriormente, têem uma existência real, verificada pràticamente.

Surgem agora nestas curvas singularidades de ordem superior que, como sabemos, se substituem por um número conveniente de singularidades ordinárias.

Nos pontos duplos e pontos de reversão, esta equivalência está demonstrada; noutras singularidades de ordem superior, *Cramer* e *Cayley* ensinaram regras aplicáveis; porém não há nenhum estudo completo sôbre o assunto (Vêr *Halphen. Comptes Rendus* t. 78 e 80).

Para obter a equação das quárticas unicursais procede-se como vamos indicar.

Consideremos três pontos fixos P, Q e R e façamos passar por êles uma cónica. A equação dessa cónica possui dois parâmetros arbitrários h e k

$$u + h.\ v + k.\ w = 0$$

Consideremos agora uma função homogénea, do segundo grau, dos três polinómios em x e y, F (u, v, w).

Façamos momentâneamente

$$f(x, y) = F(u, v, w)$$

então teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y}$$

Tôdas estas derivadas parciais da função f se anulam para valores de x e y que anulam u, v e w.

Igualmente êsses valores de x e y anulam f.

Então a função f (x, y) é uma função que igualada a zero representa uma curva unicursal de quarta ordem, visto que é do quarto grau em x e y, e além disso admite só três pontos duplos, os pontos P, Q e R.

O quadro de Plücker para as curvas de quarta ordem mostra que *só são unicursais as quárticas com três pontos duplos.*

Vejamos agora como, depois de obtida a equação das curvas de quarta ordem unicursais, se obtêem as coordenadas do ponto genérico em função racional duma variável.

Atribuamos a F (u, v, w) a seguinte forma :

$$F\ (u,\ v,\ w) = (v + m.\ w)\ (v + n.\ w) + (a.\ u + b.\ v + c.\ w)\ u$$

onde a, b, c, m e n figuram como constantes.

Consideremos uma outra curva de equação

$$u = (v + m.\ w)\ \theta$$

que é de segunda ordem e que contém um parâmetro indeterminado θ.

Dos oito pontos de encontro das duas curvas anteriores, um só ponto é variável com θ.

Com efeito o sistema das duas curvas é equivalente a

$$u = 0 \quad v + m.\ w = 0$$

e das quatro soluções dêste último sistema, três são os pontos duplos e portanto sete pontos são independentes de θ.

Procuremos, finalmente, os valores de x e y, da oitava solução do sistema.

Em primeiro logar, das duas igualdades, seguintes

$$(v + m.\ w)\ (v + n.\ w) + (a.\ u + b.\ v + c.\ w)\ u = 0$$

$$u = (v + m.\ w)\ \theta$$

tira-se uma, linear em u, v, w :

$$v + n.\ w + (a.\ u + b.\ v + c.\ w)\ \theta = 0$$

Eliminando em seguida u e v, e fazendo

$$A = (m\ b - c)\ \theta^2 + (m - n)\ \theta$$

$$B = -\ m\ a\ \theta^2 - c\ \theta - n$$

$$C = a\ \theta^2 + b\ \theta + 1$$

obtemos as seguintes expressões :

$$w\ B - v\ C = 0 \quad w\ A - u\ C = 0$$

Consideremos agora o triângulo formado pelos pontos duplos P, Q e R e designemos por

$$P = 0 \quad Q = 0 \quad R = 0$$

as equações dos lados opostos respectivamente aos pontos P, Q e R. A equação da cónica será :

$$Q.\ R + h.\ P.\ R + k.\ P.\ Q = 0$$

visto que é do segundo grau, anula-se o seu primeiro membro

pela substituïção das coordenadas dos pontos P, Q e R e, além disso, tem dois parâmetros arbitrários.

Então será :

$$u = Q.\ R \quad v = P.\ R \quad w = P.\ Q$$

donde por ser

$$w\ B - v\ C = 0 \quad w\ A - u\ C = 0$$

vem

$$P = \frac{\lambda}{A} \quad Q = \frac{\lambda}{B} \quad R = \frac{\lambda}{C}$$

onde λ é um factor indeterminado.

Representando por (p, p') as coordenadas do ponto P e semelhantemente (q, q') (r, r') as de Q e R, podemos escrever

$$P = y\ (r - q) - x\ (r' - q') + q\ r' - r\ q' = \frac{\lambda}{A}$$

$$Q = y\ (p - r) - x\ (p' - r') + r\ p' - p\ r' = \frac{\lambda}{B}$$

$$R = y\ (q - p) - x\ (q' - p') + p\ q' - q\ p' = \frac{\lambda}{C}$$

Somando ordenadamente vem

$$p\ (q' - r') + q\ (r' - p') + r\ (p' - q') = \lambda\ (\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C})$$

Multiplicando em seguida a primeira por p, a segunda por q, a terceira por r e somando, vem

$$x \Big[\ p\ (q' - r') + q\ (r' - p') + r\ (p' - q')\ \Big] = \lambda\ (\frac{p}{A} + \frac{q}{B} + \frac{r}{C})$$

Fazendo outra vez o mesmo com p', q', r', teremos

$$y \Big[\ p'\ (q' - r') + q'\ (r' - p') + r'\ (p' - q')\ \Big] = \lambda\ (\frac{p'}{A} + \frac{q'}{B} + \frac{r'}{C})$$

Finalmente com facilidade obtemos dêstes resultados, as expressões procuradas

$$x = \frac{p\ B\ C + q\ C\ A + r\ A\ B}{B\ C + C\ A + A\ B} \quad y = \frac{p'\ B\ C + q'\ C\ A + r'\ A\ B}{B\ C + C\ A + A\ B}$$

Como A, B e C são racionais e do segundo grau em θ

teremos x e y em fracções racionais de θ cujos membros são do quarto grau.

É fácil verificar analìticamente que qualquer dos pontos P, Q ou R, por exemplo P, é um ponto duplo. Com efeito formemos as diferenças $x - p$ e $y - p'$

Temos

$$x - p = A\,\frac{(q - r)\,C + (r - p)\,B}{B\,C + C\,A + A\,B}$$

$$y - p' = A\,\frac{(q' - p')\,C + (r' - p')\,B}{B\,C + C\,A + A\,B}$$

Destas expressões conclui-se que os dois valores de θ dados por $A = 0$ correspondem aos pontos de abscissa e ordenada respectivamente iguais a p e p'.

No caso de ser A do primeiro grau, uma das raízes θ será infinita.

Se A admite duas raízes iguais, será um quadrado perfeito e o ponto de coordenadas (p, p') será um ponto de reversão.

Representando portanto por A', B', C' três equações de primeiro grau em θ e fazendo

$$U = p\,B'^2\,C'^2 + q\,C'^2\,A'^2 + r\,A'^2\,B'^2$$

$$V = p'\,B'^2\,C'^2 + q'\,C'^2\,A'^2 + r'\,A'^2\,B'^2$$

$$W = B'^2\,C'^2 + C'^2\,A'^2 + A'^2\,B'^2$$

serão

$$x = \frac{U}{W} \qquad y = \frac{V}{W}$$

as coordenadas do ponto genérico duma curva com três pontos de reversão e portanto, unicursal.

Vamos dar, agora, alguns exemplos de quárticas unicursais.

Lemniscata elíptica.

A equação desta curva

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,y^2 + b^2\,x^2$$

mostra que ela é simétrica em relação aos dois eixos coordenados. Possue um ponto isolado na origem e não tem ramos infinitos.

Fazendo na sua equação

$$y = \theta\,x$$

e em seguida

$$\sqrt{a^2\,\theta^2 + b^2} = a\,\theta + z$$

encontramos

$$x = \frac{2\,(z^2 + b^2)\,a^2\,z}{z^4 + 2\,(2\,a^2 - b^2)\,z^2 + b^4} \qquad y = \frac{a\,(z^2 + b^2)\,(b^2 - z^2)}{z^4 + 2\,(2\,a^2 - b^2)\,z^2 + b^4}$$

possue quatro pontos de inflexão na circunferência de raio

$$\rho = \sqrt{\frac{3\,a^2\,b^2}{2\,(a^2 + b^2)}}$$

Lemniscata de Bernouilli.

Esta curva foi descoberta por *Jacob Bernouilli*, ao tratar de um problema sôbre os graves, proposto por *Leibnitz*.

A sua equação cartesiana é:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$$

Possue um ponto duplo na origem sendo as tangentes nêste ponto bissectrizes dos eixos coordenados.

Tem dois pontos máximos e dois mínimos correspondentes à circunferência de raio

$$\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Possue dois fócos no eixo dos x x e na circunferência anterior.

Fazendo na equação da curva

$$y = \theta\,x$$

e em seguida

$$\sqrt{1 - \theta^2} = (1 + \theta)\,z$$

acha-se imediatamente

$$x = a\,\frac{z^3 + z}{z^4 + 1} \qquad y = a\,\frac{z - z^3}{z^4 + 1}$$

Caracol de Pascal (limaçon).

Segundo *P. Tanery* esta curva não foi inventada pelo grande matemático e filósofo *Blaise Pascal*, mas sim por seu pai *Étienne*.

A equação desta curva pode ser

$$(x^2 + y^2 - a\,x)^2 = h^2\,(x^2 + y^2)$$

e tem um ponto duplo na origem dos eixos, em que os ângulos das tangentes com o eixo das abscissas são dadas por:

$$\pm \operatorname{arc\,cos} \frac{h}{a}$$

A *cardioide* é um caso particular do caracol de Pascal.

A *pedária* (logar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas por um ponto sôbre as tangentes duma curva) dum ponto qualquer, do plano duma circunferência, é um caracol de Pascal.

Por ter três pontos duplos esta curva é unicursal (dois dos pontos duplos são no infinito)

Admitindo que θ pode variar de 0° a 2π, e que h possui sempre o mesmo sinal podemos tomar para equação da curva

$$\rho = a.\ \cos\theta + h$$

Fazendo

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = t$$

teremos

$$x = \rho \cos\theta = \frac{h + a + (h - a)\,t^2}{(1 + t^2)^2} \qquad y = 2\,\frac{h + a + (h - a)\,t^2}{(1 + t^2)^2}\,t$$

Conchoide de Nicómedes

Proclo e *Pappo* atribuem a invenção desta curva a *Nicómedes* que com ela resolveu a trisecção do ângulo e o problema de Delos. A equação desta curva é

$$y^2 = \frac{x^2\,(h + a - x)\,(h - a + x)}{(x - a)^2}$$

É simétrica em relação ao eixo dos x x; tem um máximo e um mínimo, dois pontos de inflexão, um ponto duplo na origem, e uma assíntota

$$x = a$$

Supondo que se tem uma variável θ, que faz

$$-(x + h - a) = (x - h - a)\,\theta^2$$

obtemos

$$x = \frac{a - h + (a + h)\,\theta^2}{1 + \theta^2} \qquad y = \frac{2\,\theta\,\left[a - h + (a + h)\,\theta^2\right]}{\theta^4 - 1}$$

Parábola virtual.

A curva de equação cartesiana

$$(x^2 - b\,y)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$$

recebeu de *G. Saint-Vicent*, que a considerou em primeiro logar, o nome de parábola virtual.

Cramer considera-a na sua *Introduction a l'Analyse des lignes courbes* (Génova 1750, p. 451), dando-lhe o nome de *besace* (alforges).

É simétrica em relação ao eixo dos y y e tem um ponto duplo na origem.

Se fizermos

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} \quad \text{será} \quad y = \frac{b\,(\theta^2 - 1)^2 \pm 2\,a\,\theta\,(\theta^2 - 1)}{(\theta^2 + 1)^2}$$

Kreuzcurve (cruciforme).

A equação desta curva é

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

É composta de quatro ramos iguais simètricamente em relação aos dois eixos coordenados.

Admite duas assíntotas de equação

$$x = \pm a$$

e outras duas paralelas ao outro eixo

$$y = \pm b$$

Tem um ponto isolado na origem e dois pontos duplos.

Fazendo

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{y^2}} = \theta\left(1 - \frac{b}{y}\right)$$

vem

$$x = a\,\frac{\theta^2 - 1}{2\,\theta} \qquad y = \frac{b\,(\theta^2 + 1)}{\theta^2 - 1}$$

Com êstes exemplos terminamos, as noções apresentadas sôbre as curvas unicursais.

CAPÍTULO IV

Breves notícias sôbre curvas do género um

I — Curva adjunta.

No capítulo II encontra-se demonstrado um teorema cujo enunciado transcrevemos, para em seguida fazer sôbre êle considerações de diversas naturezas.

Uma curva de ordem n é cortada por uma curva de ordem m em m. n pontos que, se supõe, não coïncidem com os pontos duplos nem os pontos de reversão da curva proposta, de ordem n.

Se m $<$ n, há necessàriamente $\frac{m\,(m+3)}{2}$ pontos de intersecção dados, que determinam completamente a curva de ordem m. Então dissemos que era nêste caso

$$m.\,n - \frac{m\,(m+3)}{2}$$

o número de pontos determinados pelos pontos dados, e no caso de m $>$ n êsse número era

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

Ora quando m $=$ n $-$ 1 estes dois números confundem-se e o mesmo sucede para m $=$ n $-$ 2.

Quando fôr m $\geqq$ n $-$ 3 podemos admitir o número

$$\frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$$

sendo êste número independente da ordem m da curva secante, o que é notável

Quando, porém, a curva secante passa por pontos duplos ou de reversão da curva primitiva de ordem n estes números sofrem reduções.

Com efeito, os pontos duplos e de reversão da curva de ordem n devem contar-se uma única vez cada um, para efeitos

da determinação da curva secante ; mas temos de contá-los duas vezes como pontos de intersecção das duas curvas. Então se fôr δ o número de pontos duplos e de reversão da curva de ordem n devemos aumentar de δ o número de pontos de encontro dela com a secante, e conseqüentemente baixar da mesma quantidade o número de pontos de intersecção determinados pelos outros, visto que do número dêstes, δ são antecipadamente conhecidos.

Podemos então enunciar o seguinte importante teorema :

Entre os pontos de intersecção duma curva dada, de ordem n, *com uma curva de ordem* m, *obrigada a passar por* δ *pontos duplos (ou de reversão) da curva dada, o número de pontos determinados pelos outros será*

$$\text{para } m \geqq n-3 \qquad \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \delta$$

$$\text{» } \quad m < n-2 \qquad m.\,n - \frac{m\,(m+3)}{2} - \delta$$

Este teorema importantíssimo é, juntamente com o princípio da correspondência, de que falamos a seguir, ponto de partida para uma teoria sôbre sistemas de pontos sôbre uma curva, e a que Clebsh chama *a geometria sôbre uma curva algébrica.* O estudo dêstes sistemas de pontos é extraordinàriamente complicado, estudando-se então o caso restricto dos sistemas de pontos que são atravessados pelo que se chama *curva adjunta.*

Dá-se o nome de curva adjunta, a uma curva que passa uma vez por todos os pontos duplos e pontos de reversão da curva fixa, ou mais geralmente, se a curva fixa tem um ponto múltiplo de ordem i a adjunta passa por êle (i $-$ 1) vezes, não havendo em geral contactos entre os ramos das duas curvas.

Se supozermos ainda que em cada ponto múltiplo, a curva fixa, C_n, de ordem n, possue tangentes distintas, êstes pontos podem substituir-se por $\frac{1}{2}$ i (i $-$ 1) pontos duplos, de modo que o género pode representar-se por

$$g = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \sum_i \alpha_i\,\frac{i\,(i-1)}{2}$$

se, a curva C_n, admitir α_2 pontos duplos, α_3 pontos triplos e α_i pontos de ordem i.

Então no enunciado anterior devemos substituir δ por $\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i\,.\,i\,(i-1)$, o que dá um novo teorema que se enunciará do seguinte modo.

Entre os pontos de intersecção de uma curva adjunta de *ordem* m, *com a curva fixa* C_n, *não situados nos pontos singulares*,

1.° *para* $m > n - 3$, g *pontos, pelo máximo, são determinados pelos restantes.*

2.° *para* $m = n - 2 - r$, $g - 1 - \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$, *pelo máximo, são determinados pelos restantes.*

Os pontos restantes no primeiro caso são em número igual a

$$m \cdot n - \Sigma\alpha_i \cdot i(i - 1) - g = n\alpha + g - 2$$

onde

$$\alpha = m - (n - 3)$$

Os pontos restantes do segundo caso são evidentemente

$$\frac{1}{2} m (m + 3) - \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i \cdot i (i - 1)$$

Muitos outros teoremas, se apresentam, num estudo mais completo dêste assunto.

II — O conceito da correspondência de Chasles, generalisado.

É suficientemente conhecido o princípio da correspondência estabelecido e demonstrado por Chasles para os pontos da linha recta.

Esta generalisação do princípio de correspondência de que vamos agora dar noções rápidas, foi enunciada, mas sem demonstração por Cayley, numa nota a uma comunicação de Chasles, *Comptes Rendus,* t. LXII, e mais tarde o mesmo Cayley apresentou uma demonstração para um caso particular da aplicação dêsse princípio.

Brill demonstrou-o algèbricamente *(Mathem. Annalen* t. VI).

Lindemann demonstrou-o por meio das funções abelianas (*Journal de Crelle*, t 84).

Chasles, tinha-o, contudo, já aplicado para as curvas do género zero, como se nota, *Comptes Rendus*, t. LXII, e também no *Capítulo II* dêste livro.

Vamos definir êsse princípio da correspondência utilisando para isso a notação de Clebsh, nas suas lições sôbre a geometria (*Vorlesungen über Geometrie).*

Antes porém de entrar pròpriamente na generalisação do princípio de Chasles façamos umas considerações úteis para o seguimento do nosso estudo.

No parágrafo III do Capítulo II representámos uma rêde de curvas pela equação geral

$$C_1 + h\, C_2 + k\, C_3 = 0$$

onde C_1, C_2 e C_3 são as equações de três curvas de ordem n, e, h e k são dois parâmetros arbitrários.

Podemos contudo fazer

$$(1) \qquad C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_3 = 0$$

o que se obtém dando a h e k os valores

$$h = \frac{y_2}{y_1} \qquad k = \frac{y_3}{y_1}$$

A equação (1), desde que se tomem y_1, y_2, y_3 para coordenadas homogéneas dos pontos y dum plano, faz corresponder a cada ponto y, uma curva de ordem n.

Se

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0$$

fôrem três funções homogéneas de grau n, das três variáveis x_1, x_2, x_3, em vez de x, y, z como temos feito até aqui, também podemos considerá-las como curvas de ordem n, de pontos x, cujas coordenadas homogéneas no plano são x_1, x_2 e x_3.

Então num mesmo plano, têm sède, dois planos pontuais, um de pontos x e outro de pontos y.

A equação

$$C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_3 = 0$$

estabelece entre os pontos dêstes dois planos uma correspondência tal que a cada ponto y corresponde uma curva de ordem n de pontos x, e, recìprocamente, a cada ponto x faz corresponder uma recta de pontos y.

Mais geralmente, podemos considerar sistemas de curvas, representadas por uma equação homogénea, quer em relação aos x x, quer em relação aos y y, e de ordem m e n relativamente aos x x e aos y y.

Pela notação de Clebsh será

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0$$

Então a cada ponto y corresponde uma curva de ordem m, em x_1, x_2, x_3, de pontos x, e a cada ponto x, corresponde uma curva de ordem n, de pontos y.

Vamos agora demonstrar um teorema relativo a estes últimos sistemas de curvas.

Sejam dados dois sistemas de curvas

$$f\,(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \quad \varphi\,(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}) = 0$$

A cada ponto x do plano corresponde uma curva f de ordem n de pontos y e outra curva φ de ordem n', e portanto a cada ponto x correspondem

$$\alpha' = n.\ n'$$

pontos y, que são as intersecções das duas curvas.

Do mesmo modo a cada ponto y correspondem

$$\alpha = m.\ m'$$

pontos x.

Procuremos os pontos x que coïncidem com os seus correspondentes y.

Fazendo $x = y$, nas equações $f = 0$ e $\varphi = 0$ encontraremos os pontos procurados e que recebem o nome de *pontos de coïncidência*.

Como para

$$x = y$$

$f\,(x, y) = 0$ fica de grau $m + n$, e $\varphi\,(x, y) = 0$, do grau $m' + n'$. Temos podemos calcular o número de pontos de coïncidência,

$$(m + n)\,(m' + n') = m.\ m' + n.\ n' + m.\ n' + m.'\ n$$

$$= \alpha + \alpha' + \beta$$

onde se fez

$$\beta = m.\ n' + n.\ m'$$

Se x *percorrer uma recta o ponto* y *percorre uma curva de ordem* β.

Com efeito fazendo em $f = 0$ e $\varphi = 0$

$$x_i = z_i + \lambda\ t_i$$

e eliminando em seguida λ obtem-se uma curva de ordem

$$m\ n' + n\ m'.$$

Evidentemente que se y percorre uma recta o ponto x descreverá uma curva, também de ordem β. O teorema portanto é recíproco.

Postas estas considerações, vamos agora enunciar o *princípio da correspondência de Chasles* para os pontos de uma curva.

Seja

$$f\,(x) = 0$$

equação homogénea duma curva C_n, às três variáveis x_1, x_2 e x_3, curva esta que suporemos da ordem n e do género g. Admitimos por enquanto que a curva C_n não tem, pontos duplos nem pontos de reversão.

Consideremos agora um sistema de curvas

$$\varphi\,(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0$$

tal que a cada ponto x do plano pontual de pontos x, corresponde uma curva de ordem s de pontos y, e a cada ponto y corresponde igualmente uma curva de ordem r.

Imediatamente entre os pontos x e y satisfazendo à equação da curva C_n, e portanto

$$f\,(x) = 0 \quad f\,(y) = 0$$

fica estabelecida uma correspondência.

Com efeito a um ponto x da curva correspondem

$$b = s.\ n$$

pontos y também pertencentes à curva e que são os pontos de intersecção da curva

$$f\,(y) = 0$$

de ordem n com a que resulta de φ substituindo x_1, x_2, x_3 pelas coordenadas do ponto x, considerado. Esta última curva é de ordem s.

Do mesmo modo a cada ponto y da curva, isto é,

$$f\,(y) = 0$$

correspondem

$$a = n.\ r$$

pontos x, também situados sôbre C_n.

A curva de ordem $r + s$, e cuja equação é :

$$\varphi\,(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0$$

corta a curva C_n em :

$$(r + s)\ n = a + b$$

pontos, para os quais um dos pontos x que corresponde a y, cai sôbre y, ou recìprocamente.

A estes

$$a + b$$

pontos, deu-se o nome de *pontos de coïncidência* da correspondência definida por φ, e esta correspondência costuma representar-se pelo símbolo.

$$(a, b)$$

As considerações anteriores, deixam de ser exactas se entre os pontos de intersecção das curvas correspondentes a y, um ou mais, por exemplo μ pontos, coïncidem com o próprio x, e se entre os pontos de intersecção das curvas correspondentes a y, δ coïncidem com o próprio y.

Isto pode suceder, por exemplo, quando para um ponto x a curva respectiva tem, com $f = 0$, e no ponto x, um contacto de ordem $\mu - 1$.

Diz-se, neste caso, e em casos semelhantes, que a curva tem com f *um ponto de intersecção de valor* μ.

Para μ e δ, tudo se passa da mesma maneira, e até mesmo *Os números* μ *e* δ *são iguais.*

Imaginemos, com efeito, que na equação

$$\varphi\ (x, y) = 0$$

eliminamos uma das coordenadas x_i, por exemplo x_3, por meio de

$$f\ (x) = 0.$$

Feita a eliminação o factor

$$x_1\ y_2 - x_2\ y_1$$

deve encontrar-se μ vezes, visto que para $x_i = y_i$, êle se anula μ vezes.

Se em seguida, se elimina y_3 por meio de

$$f\ (y) = 0$$

a resultante contém o factor considerado

$$n.\ \mu$$

vezes.

Deve contudo obter-se o mesmo resultado se eliminássemos primeiro y_3 e em seguida x_3, e como em tal caso o factor figura

$$n.\ \delta$$

vezes, será

$$\mu = \delta$$

c. q. d.

Uma correspondência como a que acabámos de definir, possuindo em x um ponto de valor μ, representa-se simbòlicamente por

$$(a - \mu,\ b - \mu)_\mu$$

ou por

$$(\alpha,\ \beta)_\mu$$

onde se fez portanto

$$\alpha = a - \mu \quad \beta = b - \mu$$

Vamos agora tratar de procurar o número de pares de pontos x e y pertencentes à curva primitiva C_n, que satisfazem simultâneamente a duas correspondências

$$(a, b) \quad (a', b')$$

Reparemos que em ambas as correspondências se tem $\mu = 0$. Sejam então

$$\varphi\left(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}\right) = 0 \quad \varphi'\left(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}\right) = 0$$

as equações das correspondências.

A cada ponto y do plano correspondem r. r' pontos x de intersecção das curvas $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$; do mesmo modo a cada ponto x, estão ligados, s. s' pontos y.

Se y se move sôbre uma recta, os r. r' pontos correspondentes x, percorrem, como já demonstrámos, uma curva de ordem, r. s' + s. r'.

Então se y percorre a curva $f = 0$, os mesmos pontos percorrem uma curva de ordem

$$n\ (r.\ s' + r'.\ s)$$

Cada ponto de intersecção desta curva com f, dará, com um ponto y situado em f, um par de pontos, procurado. O número de pares de pontos que satisfazem ao mesmo tempo às duas correspondências

$$(a, b) \text{ e } (a', b')$$

são então em número igual a

$$n^2\ (r.\ s' + s.\ r') = a.\ b' + b.\ a'$$

Suponhamos agora que se tinham as duas correspondências seguintes

$$(a, b) \text{ e } (a' - \mu',\ b' - \mu')_{\mu'}$$

O número

$$a.\ b' + b.\ a'$$

deve sofrer uma redução. Com efeito, $\varphi' = 0$ possui um ponto de valor μ', então um par composto de dois pontos visinhos (x, y) satisfaz simultâneamente à correspandência φ, aos a + b pontos de f, onde se dão as coïncidências de φ, e μ' vezes em cada um dêstes pontos.

Para achar o número de pares *separados* que satisfazem ao mesmo tempo às duas correspondências temos que subtraír, portanto, $\mu'(a+b)$ de modo que :

O número de pares separados, de pontos que satisfazem simultâneamente às duas correspondências

$$(a, b) \text{ e } (a'-\mu', b'-\mu')_{\mu'}$$

é igual a

$$a(b'-\mu')+b(a'-\mu')$$

Consideremos agora, finalmente, duas correspondências

$$(a-\mu, b-\mu)_{\mu} \text{ e } (a'-\mu', b'-\mu')_{\mu'}$$

e procuremos resolver o mesmo problema.

Para isso, na equação da primeira correspondência

$$\varphi(x, y)=0$$

alteramos os coeficientes, dando a cada um dêles, acréscimos muito pequenos. A correspondência ficou *modificada*, numa outra

$$\pi(a, b)_0$$

que não possui em x um ponto de valor múltiplo, mas que dá para um ponto x, da curva C_n, μ pontos também da curva, e visinhos dêle, o mesmo sucedendo para os pontos y.

Pelo teorema anterior as duas correspondências

$$\pi \text{ e } \varphi'$$

são satisfeitas por pares de pontos em número dado por

$$a\,b'+b\,a'-\mu'(a+b)$$

Porém entre estes pares há os que se compõem de dois pontos (x, y) muito visinhos, e que ao fazermos tender para zero os acréscimos dados aos coeficientes de φ, virão a coïncidir, originando novas reduções. Vamos então ver quantos são êsses novos pares.

Para isso, consideremos um dos pontos de coïncidência da correspondência φ', isto é, um ponto onde se encontram reünidos $\mu'+1$ pontos $x=y$ de φ'.

Quando o ponto x se aproxima dêsse ponto, o ponto y, que deve com êle coïncidir, permanece na visinhança de x, confunde-se com x no ponto de coïncidência e afasta-se finalmente, à medida que x se afasta.

Então se x percorrer as visinhanças de um qualquer ponto

de coïncidência de φ', o ponto y percorre todos os pontos da curva f que são visinhos de x. Entre estes pontos visinhos de x estão compreendidos todos os μ pontos que foram originados pelo ponto de valor μ, de φ.

Podemos então já afirmar que, se forem C' os pontos de coïncidência de φ', restam-nos os pares separados

$$a.\,b'+a'.\,b-\mu'(a+b)-\mu.\,C'$$

que satisfazem simultâneamente, a φ e a φ'.

Como a deformação podia ter sido dada, antes, a φ', teríamos uma fórmula idêntica

$$a'.\,b+a.\,b'-\mu(a'+b')-\mu'.\,C$$

onde C, é o número de pontos de coïncidência da correspondência φ.

Por comparação teremos

$$\frac{C-(a-\mu)-(b-\mu)}{\mu}=\frac{C'-(a'-\mu')-(b'-\mu')}{\mu'}$$

Este cociente que tem a mesma forma para as duas correspondências deve ser independente da natureza da correspondência considerada.

Então poderemos determinar o seu valor com uma correspondência onde C seja conhecido, prèviamente, por outra ordem de idéas.

Consideremos a correspondência entre o ponto de contacto y duma tangente de C_n, e os outros pontos de intersecção x, da tangente com C_n, que, sabemos, são em número $(n-2)$.

Para esta correspondência o número de coincidências é dado pelo número de pontos de inflexão de C_n.

Temos, também, neste caso

$$a=n \quad b=n(n-1) \quad \mu=2$$

Então o cociente tem o valor

$$(n-1)(n-2)=2\,g$$

Da fracção considerada tira-se imediatamente

$$C=(\alpha-\mu)+(b-\mu)+2\,g\,\mu$$

e finalmente vem, para número de pares separados que satisfazem simultâneamente a φ e a φ'.

$$(\varphi\,\varphi')=(a-\mu)(b'-\mu')+(b-\mu)(a'-\mu')-2\,g\,\mu\,\mu'$$

Fazendo nesta expressão

$$(a - \mu) = \alpha \quad (a' - \mu') = \alpha'$$

$$(b - \mu) = \beta \quad (b' - \mu') = \beta'$$

podemos enunciar o importante e geral, teorema que rege as correspondências :

O número de pontos de coincidência duma correspondência $\varphi(\alpha, \beta)\mu$, *sôbre uma curva de género* g, *é*

$$C = \alpha + \beta + 2\,g\,\mu$$

e o número de pares de pontos (x, y) *satisfazendo simultâneamente às duas correspondências* $\varphi(\alpha, \beta)_{\mu}$ e $\varphi'(\alpha', \beta')_{\mu'}$, *é*

$$(\varphi\,\varphi') = \alpha.\,\beta' + \beta.\,\alpha' - 2\,g\,\mu\,\mu'.$$

Como aplicação importante das fórmulas de correspondência deduzidas, vejamos qual será a relação entre o género g duma curva C e o género g' duma curva C', se entre os pontos das duas curvas houver uma correspondência tal, que a um ponto P de C, correspondem x' pontos P' de C', e a um ponto P' de C', correspondem x pontos P de C.

Este problema foi desenvolvidamente tratado por Zeuthon em *Mathem. Annalen,* t. III, p. 150.

Designemos por y e y', o número de coincidências de dois pontos que correspondem respectivamente sôbre C e C', ao mesmo ponto da outra curva, sem contar as coincidências que advêem dos pontos duplos das curvas.

Suponhamos que, correspondendo a um ponto P, dois pontos coincidem em P', e que recìprocamente dois dos pontos correspondendo a P', se confundem em P, sucedendo isto z vezes em cada curva.

Temos assim para determinar y e z, a correspondência

$$\left[x'(x-1)\,,\;x'(x-1)\right]_{x'}$$

Com efeito, a cada ponto P de C, correspondem x' pontos P' de C', e a cada um dêstes pontos P' correspondem x pontos Q de C, dos quais um se confunde com P, o que faz ao todo x' pontos.

Tal correspondência tem para pontos de coincidência o número

$$y + 2\,z = 2\,x'(x-1) + 2\,x'\,g$$

e também

$$y' + 2\,z = 2\,x\,(x'-1) + 2\,x\,g'$$

e por subtracção

$$y - y' = 2\,x'(g-1) - 2\,x\,(g'-1)$$

resultado importante que permite enunciar :

Entre duas curvas tais, que a um elemento da primeira correspondem x *elementos da segunda, e a um elemento da segunda* x' *elementos da primeira, uma de género* g, *outra de género* g', *e que teem respectivamente* y *e* y' *pontos de coincidência, existe a relação.*

$$y - y' = 2\,x'(g-1) - 2\,x\,(g'-1)$$

Um caso importante de correspondência entre os pontos de duas curvas é o da *determinação única* ou também chamada correspondência *ponto por ponto* ou ainda correspondência *unívoca e recíproca* ou *biunívoca*.

Diz-se que duas curvas se correspondem ponto por ponto quando :

— a todo o ponto da primeira corresponde um só ponto da segunda.

— a todo o ponto da segunda corresponde um só ponto da primeira.

Abandonemos, para êste caso simples, a notação de Clebsh e tomemos, pois, para equações das curvas as seguintes

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \psi(\xi, \eta) = 0$$

Para uma correspondência como a que definimos, é necessário que as coordenadas x e y dos pontos da primeira curva se exprimam racionalmente em função das coordenadas ξ e η dos pontos da segunda. Temos então :

$$x = \Phi(\xi, \eta) \quad y = \Theta(\xi, \eta)$$

Para a correspondência ser recíproca temos que ter necessàriamente as relações

$$\xi = F_1(x, y) \quad \eta = F_2(x, y)\,.$$

onde a unicidade da correspondência, obriga que F_1 e F_2 sejam funções racionais.

Para completarmos êste assunto, vejamos qual a relação entre os géneros de duas curvas que se correspondem ponto por ponto. Para isso basta fazer, no enunciado do último teorema demonstrado

$$x = x' = 1$$

donde

$$y = y' = 0$$

Então da fórmula

$$y - y' = 2\, x' (g - 1) - 2\, x\, (g' - 1)$$

conclue-se que é

$$g = g'$$

Este resultado resume-se no seguinte enunciado.

Duas curvas que se correspondem ponto por ponto são do mesmo género.

É êste um teorema importante que mais tarde utilisaremos.

Se na mesma fórmula fizermos

$$x' = 1$$

donde

$$y' = 0$$

e fizermos, também, por hipótese

$$g = g'$$

virá o seguinte teorema que enunciamos imediatamente:

Se duas curvas do mesmo género, $g > 1$, *admitem uma correspondência tal que, a um ponto da primeira corresponde um ponto da segunda, esta correspondência, é recíproca.*

Com efeito, fazendo as substituições indicadas acha-se para $g > 1$.

$$x = 1$$

Consulte-se sôbre êste assunto a demonstração de Weber *J. Crelle* t. III pág. 345).

III — **Toda a curva de género um, admite uma correspondência unívoca, com uma cúbica.**

Demonstraremos primeiro que uma curva de género um corresponde ponto por ponto com uma outra curva. Em seguida demonstraremos que esta última curva é uma cúbica.

Seja então uma curva C_n, qualquer, do género um e de equação $f(x, y) = 0$, de grau n.

Por hipótese o género da curva é um, e então teremos

$$d + r = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 1$$

Consideremos agora as curvas adjuntas de ordem $n - 2$, C_{n-2}. A equação geral destas curvas contêm um número de coeficientes igual a

$$\frac{1}{2}(n - 1)\, n - \left[\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 1\right] = n$$

Façamos agora passar estas curvas adjuntas por mais $n - 3$ pontos de C_n, escolhidos arbitràriamente.

Então, na equação destas curvas, restam por determinar

$$n - (n - 3) = 3$$

parâmetros, e essa equação será da forma

$$h\, f_1(x, y) + k\, f_2(x, y) + l\, f_3(x, y) = 0$$

Procuremos agora os pontos de intersecção destas curvas adjuntas, com a proposta C_n.

Em primeiro logar, as adjuntas são de ordem $n - 2$ e a proposta de ordem n. Portanto $n (n - 2)$ pontos de encontro.

Em segundo logar, dos $n (n - 2)$ pontos de intersecção são conhecidos:

$2\left[\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 1\right]$ nos pontos duplos

$n - 3$ nos pontos simples de C_n, escolhidos.

Então as curvas adjuntas cortam C_n, em

$$n(n - 2) - 2\left[\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 1\right] - n + 3 = 3$$

pontos variáveis.

Façamos agora corresponder a cada ponto x, y um ponto de coordenadas ξ, η definidas por

$$\xi = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \qquad \eta = \frac{f_3(x, y)}{f_1(x, y)}$$

Se (x, y) percorrer tôda a curva C_n, (ξ, η) descreve uma curva **K** que corresponde, ponto por ponto, com C_n.

Com efeito a cada ponto (x, y) corresponde um único ponto (ξ, η). Resta demonstrar que, inversamente, a cada ponto (ξ, η) corresponde um, e só um ponto (x, y).

Vamos demonstrá-lo por absurdo.

Suponhamos que a cada ponto (ξ_0, η_0) da curva **K** correspondem, pelo menos, dois pontos de C_n cujas coordenadas (a, b) (a', b') seriam dadas por

$$\xi_0 = \frac{f_2(a, b)}{f_1(a, b)} = \frac{f_2(a', b')}{f_1(a', b')} \qquad \eta_0 = \frac{f_3(a, b)}{f_1(a, b)} = \frac{f_3(a', b')}{f_1(a', b')}$$

Mas então teriamos

$$\frac{f_1(a', b')}{f_1(a, b)} = \frac{f_2(a', b')}{f_2(a, b)} = \frac{f_3(a', b')}{f_3(a, b)}$$

Estas relações mostram que tôdas as curvas adjuntas de equação

$$h\, f_1(x, y) + k\, f_2(x, y) + l\, f_3(x, y) = 0$$

que passassem pelo ponto (a, b) da proposta passariam também por outro ponto (a', b') da proposta. Então elas cortariam C_n em

$$3 - 2 = 1$$

ponto móvel e como as suas equações conteriam então, só um parâmetro arbitrário os pontos (x, y) da proposta, tinham as coordenadas expressas racionalmente, em função dêsse parâmetro.

A proposta, contràriamente à hipótese, era do género zero.

Este absurdo veio de se supor que a um ponto da curva **K** correspondem mais do que um de C_n.

Então a curva **K** e a curva C_n correspondem-se ponto por ponto, como queríamos demonstrar.

Resta-nos provar agora que a curva **K** é uma curva de terceira ordem.

Para isso cortemos a curva **K** pela recta

$$h + k\,\xi + l\,\eta = 0$$

A cada ponto (ξ, η) comum à recta e à curva **K** corresponde um, e um só ponto, dos que são comuns à curva proposta C_n e às adjuntas

$$h\, f_1(x, y) + k\, f_2(x, y) + l\, f_3(x, y) = 0$$

Então a ordem da curva **K** é dada pelo número de pontos móveis, que a curva C_n, tem com as adjuntas. A curva **K** é pois de terceira ordem

c. q. d.

Para um estudo mais profundo das curvas de género um, pode fazer-se a leitura duma memória de Cayley nas *Comptes Rendus* t. LXII pág. 586 e das obras aí apontadas por êste ilustre geómetra.

SEGUNDA PARTE

Complementos de cálculo integral

CAPÍTULO V

Generalidades sôbre funções

I — Definições.

As funções dividem-se em duas grandes categorias; *algébricas* e *transcendentes*.

No sentido mais geral, diz-se que uma grandeza y é função algébrica de x, quando ela satisfaz a uma equação

$$F(x, y) = 0$$

racional em relação à incógnita y, e à variável independente x, que aparece nos coeficientes de y.

São funções transcendentes as que, como log x, cos x, sen x, e infinitas outras, não cabem na definição anterior.

Quando a equação F (x, y) = 0, é do primeiro grau em y, ela dá para y, ou um polinómio inteiro da variável independente x, ou um cociente de polinómios.

É o caso das funções *inteiras* ou *fraccionárias* constituindo o seu conjunto as *funções racionais*.

O estudo das funções racionais é feito detalhadamente na Álgebra.

Quando a equação F (x, y) = 0 fôr do grau dois ou superior relativamente a y, ela define uma *função irracional de x*.

Nos parágrafos seguintes relembram-se certas noções importantes e que são imprescindíveis para o seguimento dos estudos que encetámos.

Voltemos então às funções estudadas na álgebra para registar na sua teoria os factos mais importantes.

II — Funções racionais.

O facto mais importante observado, no estudo destas funções é a sua decomposição em *fracções simples*.

Sejam F (x) e F_1 (x) os dois polinómios inteiros de graus m e n, respectivamente. Se fôr

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-\rho)^{\lambda}$$

e sendo como se sabe

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m > n$$

a decomposição em fracções simples é dada por

$$y = \frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \dots \quad \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}$$

$$+ \frac{B_0}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \dots \quad \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta}}$$

$$+ \dots \qquad \dots +$$

$$+ \frac{L_0}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \dots \quad \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)^{\lambda}}$$

Para determinar os coeficientes da parte do desenvolvimento relativa às raízes $x-a$ procede-se do seguinte modo: na expressão

$$y = f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}$$

faz-se $x = a + h$ e vem:

$$f(a+h) = \frac{F_1(a+h)}{F(a+h)}$$

Depois de efectuada a divisão segundo as regras da álgebra obtem-se

$$f(a+h) = \frac{A_0}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{h^p} + \frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

onde

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a) + \dots$$

sendo

$$\varphi(a) \neq 0$$

Então mudando $a + h$ em x vem

$$f(x) = \frac{A_0}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(x-a)^p} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

Sôbre a fracção

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

procede-se de igual modo no que diz respeito a uma das restantes raízes.

Este desenvolvimento tem uma importância fundamental no cálculo integral quando se pretender integrar uma fracção racional. Obtem-se então aí uma parte transcendente e uma parte racional.

Uma outra aplicação curiosa desta decomposição consiste na determinação rápida da derivada de ordem n duma fracção racional.

Tomemos para exemplo a função

$$f(x) = \frac{A\,x + B}{x^2 - a^2}$$

e procuremos a sua derivada de ordem n. Para isso basta fazer

$$f(x) = \frac{1}{2\,a}\left[\frac{A\,a + B}{x-a} + \frac{A\,a - B}{x+a}\right]$$

para se obter com a máxima facilidade

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!\,(-1)^n}{2\,a}\left[\frac{A\,a + B}{(x-a)^{n+1}} + \frac{A\,a - B}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

Como resultado importante temos o seguinte: façamos

$$a = \sqrt{-1} \quad A = 0 \quad B = 1$$

virá

$$\frac{f^n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}} + \frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}}\right]$$

se agora tomarmos $x = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, temos

$$\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)^{n+1}} =$$

$$= \operatorname{sen}^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi + i\operatorname{sen}(n+1)\varphi\right]$$

e também

$$\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)^{n+1}} =$$

$$= \operatorname{sen}^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi - i\operatorname{sen}(n+1)\varphi\right]$$

Então vem conseqüentemente

$$\frac{f^n(x)}{n!} = (-1)^n \operatorname{sen}^{n+1} \varphi . \operatorname{sen}(n+1)\varphi$$

Notando agora que é também

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

conseguiu-se com grande facilidade a derivada de ordem $(n+1)$ da função $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Este resultado vem em J. Bertrand — *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, pág. 143.

III — **Funções algébricas, não racionais.**

O estudo das funções algébricas não racionais é feito, supondo-as raízes da equação

$$F(x, y) = 0$$

e conduz a resultados que ligam entre si a álgebra e o cálculo integral.

Seja

$$F(x) = 0$$

uma equação de grau n. Designando por $f(x)$ uma função racional qualquer, e pondo na equação

$$y = f(x)$$

obteremos uma nova equação de grau n, em y.

Com efeito, sejam a b... l as n raízes da equação $F(x) = 0$; as raízes da equação transformada serão evidentemente

$$f(a)\; f(b) \ldots f(l)$$

e são também em número total de n visto que por hipótese $f(x)$ é racional.

Esta particularidade que se acabou de demonstrar permite agrupar tôdas as equações em classes visto que, estudada uma dada equação se encontram estudadas tôdas as suas transformadas. Evidentemente que, se $F(x) = 0$ tiver coeficientes inteiros, e se os polinómios numerador e denominador de $f(x)$ também os tiverem, a transformada não só será do mesmo grau da proposta como também, terá os seus coeficientes, inteiros.

O desenvolvimento da idéa anterior pertence à Aritmética superior e serve de base à *Teoria das formas*.

Também para as equações a duas variaveis existe um critério semelhante, mas extraordinàriamente mais complicado.

Esse critério estabelecido por Riemann na sua *Théorie des fonctions abéliennes*, permite, também, dividir estas equações em classes.

Sem demonstração essa divisão consiste no seguinte :

Duas equações

$$F(x, y) = 0 \quad F_1(u, v) = 0$$

pertencem a uma mesma classe, logo que se possa passar da primeira para a segunda pondo

$$u = f(x, y) \quad v = f_1(x, y) = 0$$

onde f e f_1 são funções *racionais* de x e y e tais que se possa inversamente exprimir x e y em funções racionais de u e v.

Demonstremos agora uma proposição muito importante para a continuação dêstes estudos.

Tôda a função racional $f(x)$ *duma raiz, duma equação do grau* n, $F(x) = 0$, *reduz-se sempre à forma dum polinómio do grau* $n - 1$, *ou menor*

Suponhamos então que $f(x)$ é simplesmente uma função inteira e portanto

$$f(x) = A x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots$$

e dividamos êste polinómio por $F(x)$; obteremos a igualdade

$$f(x) = F(x) . Q + R$$

Desta igualdade conclue-se que para tôdas as raízes de $F(x) = 0$ se terá

$$f(x) = R$$

Mas o resto R é um polinómio de grau igual ou menor que $n - 1$, porque o grau do divisor é n.

Consideremos agora o caso de

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

Para que se verifique ainda o enunciado, trata-se portanto de ver se se poderão determinar os coeficientes $B_0\; B_1 \ldots$ de $f(x)$ com a forma

$$f(x) = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

Fixemos que êstes coeficientes são em número igual a n.
Sejam agora $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$, também em número igual a n, as raízes de $F(x) = 0$ que por hipótese é de grau n.
Então ter-se-há

$$B_0\, a_1^n + B_1\, a_1^{n-1} + B_2\, a_1^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = f(a_1)$$

$$B_0\, a_2^n + B_1\, a_2^{n-1} + B_2\, a_2^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = f(a_2)$$

. . . .

$$B_0\, a_n^n + B_1\, a_n^{n-1} + B_2\, a_n^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = f(a_n)$$

Ora estas equações nem são impossíveis nem indeterminadas. Com efeito a regra de Cramer dá para as incógnitas valores cujo denominador comum é o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} a_1^n\, a_1^{n-1} & \ldots & a_1 & 1 \\ a_2^n\, a_2^{n-1} & \ldots & a_2 & 1 \\ a_3^n\, a_3^{n-1} & \ldots & a_3 & 1 \\ a_n^n\, a_n^{n-1} & \ldots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

que, em valor absoluto, não varia com permutações das raízes $a_1\ a_2 \ldots a_n$, e só se anularia em caso de raízes iguais.
Excluindo êste caso, os coeficientes $B_0\ B_1 \ldots$ são funções simétricas das raízes de $F(x) = 0$ e exprimem-se portanto racionalmente em função dos coeficientes da proposta.
Então $f(x)$ é reductìvel ao grau $n - 1$.
No caso de raizes iguais, baixariamos o grau de $f(x)$ até êsse grau ficar igual à ordem do determinante de Vandermonde formado com as raízes simples, e uma de cada raíz múltipla.

c. q. d.

Em virtude do teorema anterior, tôda a função racional $f(x, y)$ da variável independente x e de uma raíz da equação do grau n, $F(x, y) = 0$ é sempre reductível à forma

$$f(x, y) = A_1\, y^{n-1} + A_2\, y^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\, y + A_n$$

cujos coeficientes são racionais em x.

Não é contudo esta a forma que foi empregada em primeiro logar por *Abel* e que figura nos trabalhos de *Riemann*, *Clebsh* e *Gordan*, sôbre intregração das diferenciais algébricas.

Dividamos e multipliquemos a expressão anterior por $F'_y(x, y)$, obteremos :

$$f(x, y) = \frac{(A_1\, y^{n-1} + A_2\, y^{n-2} + \ldots + A_n)\, F'_y(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Efectuando o numerador, o teorema anterior permite reduzi-lo a uma função do grau $n - 1$ em y e de coeficientes racionais em x. Então

$$f(x, y) = \frac{G\, y^{n-1} + H\, y^{n-2} + \ldots}{F'_y(x, y)}$$

tal é a forma importante a que desejavamos chegar e que também Briot e Bouquet utilisam na *Théorie des fonctions abeliennes*.

Aplicando o que se disse ao caso simples

$$y^2 = X$$

onde X representa um polimónio inteiro em x, virá

$$f(x, y) = \frac{G\sqrt{X} + H}{\sqrt{X}} = G + \frac{H}{\sqrt{X}}$$

Reparemos que sendo a função H, uma função racional podemos decompô-la como se segue

$$H(x) = \Sigma\, a_k\, x^k + \frac{A_i}{(x - \alpha)^i}$$

e então teremos, em última análise, a parte irracional de $f(x, y)$ decomposta em elementos das duas naturezas

$$\frac{a_k\, x^k}{\sqrt{X}}, \quad \frac{A_i}{(x - \alpha)^i \sqrt{X}}$$

resultado que utilisaremos dentro em pouco.
Demonstremos agora esta proposição final :
Se o polinómio X é do grau par 2 m, podemos com uma substituição racional, reduzi-lo ao grau 2 m — 1.
Com efeito seja a_1 uma das raizes de X ; temos

$$\sqrt{X} = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2m})}$$

Mas como fàcilmente se vê

$$X = (x - a_1)^{2m} \left(\frac{x - a_2}{x - a_1}\right) \left(\frac{x - a_3}{x - a_1}\right) \ldots \left(\frac{x - a_{2m}}{x - a_1}\right)$$

Fazendo a substituição

$$\frac{x - a_2}{x - a_1} = t$$

donde se tira

$$x = \frac{a_2 - a_1 t}{1 - t}$$

um cálculo fácil conduz a

$$\sqrt{X} = \frac{a_2 - a_1}{(1 - t)^m}$$

$$\sqrt{t \left[a_2 - a_3 - (a_1 - a_3)\, t \right] \ldots \left[a_2 - a_{2m} - (a_1 - a_2{}^m)\, t \right]}$$

e designando por T o novo radicando que é do grau 2 m — 1 em t, podémos dar à função

$$f(x, y)$$

a forma

$$f\left(\frac{a_2 - a_1 t}{1 - t}, \frac{a_2 - a_1}{(1 - t)^m} \sqrt{T}\right)$$

ou simplesmente

$$\varphi(t, \sqrt{T})$$

sendo φ uma função racional da variável t e do radical de um polinómio do grau 2 m — 1, como haviamos enunciado.

CAPÍTULO VI

Complementos de Cálculo Integral

I — Sôbre o $\int f(x, \sqrt{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n})\, dx$

Depois das noções preparatórias do capítulo anterior consideremos o integral duma função

$$f(x, y)$$

em que y está relacionado com x pela expressão

$$y^2 = X = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Foi já estudado o modo de reduzir a função f à forma clássica

$$f(x, y) = G + \frac{H}{\sqrt{X}}$$

onde G e H eram funções racionais da variável x. Viu-se ainda mais, que uma decomposição de H (x) em fracções simples conduziria a função f (x, y) a uma soma de fracções da forma

$$\frac{a_k x^k}{\sqrt{X}} \qquad \frac{A_i}{(x - \alpha)^i \sqrt{X}}$$

de modo que nos interessam ùnicamente os integrais

$$I_n = \int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}} \qquad J_n = \int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{X}}$$

Tratemos de cada um em separado. Consideremos em primeiro logar o integral

$$I_n = \int x^n \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

Para reduzirmos êste integral a integrais mais simples partamos da igualdade

$$(x^p \sqrt{X})' = p . x^{p-1} \sqrt{X} + \frac{1}{2} x^p \frac{X'}{\sqrt{X}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x^p X' + p \, x^{p-1} X}{\sqrt{X}}$$

onde, por sua natureza, p é inteiro positivo, ou nulo.

Então se fôr n o grau do polinómio X, o numerador da fracção anterior é um polinómio inteiro do grau $n + p - 1$.

Fàcilmente se demonstra que o coeficiente de x^{n+p-1} nunca pode ser nulo.

Com efeito sendo

$$X = a_0 \, x^n + \ldots$$

vem

$$\frac{1}{2} x^p X' + p \, x^{p-1} X = a_0 \left(\frac{1}{2} n + p\right) x^{n+p-1} + \ldots$$

e será sempre

$$n > 0 \qquad p \geqq 0$$

Então poderemos pôr sempre

$$(x^p \sqrt{X})' = A \frac{x^{n+p-1}}{\sqrt{X}} + B \frac{x^{n+p-2}}{\sqrt{X}} + \ldots + L \frac{1}{\sqrt{X}}$$

Se intregarmos ambos os membros como conduzidos a

$$x^p \sqrt{X} = A . I_{n+p-1} + B . I_{n+p-2} + \ldots + L . I_0$$

Esta expressão dá o valor de I_n em função de integrais mais simples o que permite concluir

Cada integral I_n, *reduz-se a* $n-1$ *outros integrais* $I_0 I_1 \ldots I_{n-2}$

Com efeito para

$$p = 0, 1, 2 \ldots$$

obtem-se os valores de

$$I_{n-1} \quad I_n \quad I_{n+1} \ldots$$

em função dos integrais

$$I_{n-2} \quad I_{n-3} \ldots I_1 \; I_0$$

Consideremos agora o integral

$$J_n = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{X}} ;$$

para o reduzirmos a integrais mais simples vamos partir da igualdade

$$\left(\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p}\right)' = \frac{1}{2} \frac{X'}{(x-\alpha)^p \sqrt{X}} - p \frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{2}(x-\alpha) X' - p X}{(x-\alpha)^{p+1} \sqrt{X}}$$

onde p é um inteiro positivo, ou quando pouco, nulo.

Continuando a considerar como até aqui X, um polinómio de grau n, o numerador da fracção é um polinómio

$$\varphi(x)$$

do grau n em x e podemos sempre desenvolvê-lo como segue

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x-\alpha) + \ldots + \frac{\varphi^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

É fácil de ver que $\varphi(\alpha)$ não é nulo quando fôr

$$X(\alpha) \neq 0$$

visto que

$$\varphi(\alpha) = -p \, X(\alpha)$$

Afastemos então a hipótese de α ser raíz de X, para a considerar mais tarde.

Se portanto α não anular X teremos

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p}\right]' = \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^{p+1} \sqrt{X}} + \frac{\varphi'(\alpha)}{(x-\alpha)^p \sqrt{X}} + \ldots + \frac{\psi(x)}{\sqrt{X}}$$

onde designámos por $\psi(x)$ um polinómio inteiro em x que existirá ùnicamente quando fôr

$$n \geqq p + 1$$

Integrando ambos os membros teremos

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p} = \varphi(\alpha) \, J_{p+1} + \varphi'(\alpha) \, J_p + \ldots$$

Esta expressão, para os diferentes valores de p, reduz os integrais J_n a integrais dos tipos J_1 e I_n, já anteriormente considerados.

Podemos então resumir :

Se α *não fôr raiz do polinómio* X, *os integrais* J_n *podem reduzir-se ao integral* J_1 *e aos integrais* I_n .

Resta-nos considerar o caso de α ser uma raíz de X. Neste caso, viu-se que era

$$\varphi(\alpha) = 0$$

mas sendo

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} X' + \frac{1}{2}(x-\alpha) X'' - p X'$$

teremos

$$\varphi'(\alpha) = \left(\frac{1}{2} - p\right) X'(\alpha)$$

Então se α fôr raíz simples de X, $\varphi'(\alpha)$ será sempre diferente de zero.

Mas é sempre possível reduzir X à forma

$$X = a_0 (x-\alpha)(x-\beta)\ldots$$

admitindo só raízes simples ; e podemos então considerar

$$\varphi'(\alpha) \neq 0$$

Com esta condição teremos :

$$\left[\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p}\right]' = \frac{\varphi'(\alpha)}{(x-\alpha)^p \sqrt{X}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi''(\alpha)}{(x-\alpha)^{p-1}\sqrt{X}} + \ldots$$

e finalmente integrando :

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-\alpha)^p} = \varphi'(\alpha) J_p + \ldots$$

onde os termos seguintes contêm só integrais J de índice menor que p.

Do mesmo modo para

$$h \geq p + 1$$

haverá integrais I_n. Para os sucessivos valores de p todos os integrais J se reduzem a integrais I_n.

Concluindo, vem o seguinte enunciado :

Se α fôr raiz de X (x) *os integrais* J_n *reduzem-se a integrais* I_n.

Aos integrais

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx$$

cuja redução fica agora estudada, deu-se o nome de *integrais hiperelípticos*.

II — Sôbre o $\int f(x, \sqrt{a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e})\, dx$

Quando o polinómio X fôr do quarto ou terceiro grau, os integrais, em estudo, tomam o nome de *integrais elípticos*.

A razão dêste nome reside no facto de o arco duma elipse se exprimir por um dêstes integrais.

Com efeito, consideremos a elipse de equação

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

e portanto

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \cdot dx$$

e fazendo

$$a^2 - b^2 = a^2 \cdot e^2$$

teremos finalmente

$$s = \int \frac{a^2 - e^2 x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - e^2 x^2)}} \cdot dx$$

que é com efeito do tipo que vamos estudar.

Estes integrais reduzem-se a outros, onde X é do terceiro grau, por meio da substituïção racional indicada no fim do quinto capítulo.

A importância prática dos integrais elípticos, leva-nos a tratar particularmente esta substituïção.

Consideremos então o

$$\int f(x, \sqrt{a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e})\, dx.$$

Seja α uma raiz real do polinómio X. Teremos

$$X = (x - \alpha)(l x^3 + m x^2 + n x + p)$$

Como o integral a estudar se reduz à forma

$$G(x) + \frac{H(x)}{\sqrt{X}}$$

interessa-nos ùnicamente o integral

$$\int \frac{H(x)}{\sqrt{X}}\, d\,x$$

onde faremos a substituïção

$$y = \frac{1}{x - \alpha}$$

donde

$$x = \frac{\alpha y + 1}{y} \qquad d\,x = -\frac{d\,y}{y^2}$$

o que nos conduz a

$$\sqrt{X} = (x - \alpha)\sqrt{\frac{l\,x^3 + m\,x^2 + n\,x + p}{x - \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{y^2}\sqrt{l\,(\alpha y + 1)^3 + m\,y\,(\alpha y + 1)^2 + n\,y^2\,(\alpha y + 1) + p\,y^3}$$

e então teremos finalmente

$$\int \frac{H(x)}{\sqrt{X}}\, d\,x = -\int \frac{H\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right) d\,y}{\sqrt{l\,(\alpha y + 1)^3 + \dots + p\,y^3}}$$

e a reducção encontra-se efectuada.

Suponhamos o polinómio X decomposto num producto de dois factores reais do segundo grau o que é sempre possível se os coeficientes de X forem reais; teremos

$$X = (a\,x^2 + 2\,b\,x + c)\,(m\,x^2 + 2\,n\,x + p)$$

Fazendo nesta expressão

$$x = \frac{\alpha\,y + \beta}{y + 1}$$

e portanto no integral

$$d\,x = \frac{\alpha - \beta}{(y + 1)^2}\cdot dy$$

teremos

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(y + 1)^2}$$

$$\sqrt{\left[a\,(\alpha\,y + \beta)^2 + 2\,b\,(y + 1)\,(\alpha\,y + \beta) + c\,(y + 1)^2\,(\alpha\,y + \beta)\right]}$$

$$\sqrt{\left[m\,(\alpha\,y + \beta)^2 + \dots\right]}$$

e anulando os coeficientes de y, determinamos α e β de modo a transformar X num *polinómio biquadrado.* Nesta ordem de idéas, temos:

$$\begin{cases} a.\ \alpha\,\beta + b\,(\alpha + \beta) + c = 0 \\ m.\ \alpha\,\beta + n\,(\alpha + \beta) + p = 0 \end{cases}$$

donde

$$\alpha\,\beta = \frac{b\,p - c\,n}{a\,n - b\,m} \qquad \alpha + \beta = \frac{c\,m - a\,p}{a\,n - b\,m}$$

Uma equação de segundo grau completa o cálculo.

Vejamos quais as condições para que α e β sejam reais e distintos.

Para isso é necessário e suficiente que se tenha

$$(1) \quad (c\,m - a\,p)^2 - 4\,(b\,p - c\,n)\,(a\,n - b\,m) > 0$$

Mas o primeiro membro desta desigualdade, igualado a zero traduz a condição para o sistema

$$\begin{cases} a\,x^2 + 2\,b\,x + c = 0 \\ m\,x^2 + 2\,n\,x + p = 0 \end{cases}$$

admitir uma raíz comum.

Por outro lado a teoria da eliminação diz-nos ainda que é

$$(2) \quad (c\,m - a\,p)^2 - 4\,(b\,p - c\,n)\,(a\,n - b\,m) =$$

$$= a^2\,m^2\,(\lambda - \lambda')\,(\lambda - \mu')\,(\mu - \mu')\,(\mu - \lambda')$$

onde se representaram por

$$\lambda \text{ e } \mu$$

as raízes da primeira equação do sistema e

$$\lambda' \text{ e } \mu'$$

as da segunda.

Se as quatro raízes forem reais, a expressão (2) mostra que (1) se verificará quando

$$\lambda \text{ e } \mu$$

fôrem as duas maiores raizes.

No caso de um dos pares μ e λ ou μ' e λ' ser imaginário, (2) reduz-se ao produto de dois imaginários conjugados. Igualmente assim sucede quando todas as quatro raizes fôrem imaginárias. Podemos então concluir que se um dos trinómios da decomposição de X admitir para raizes as duas maiores das quatro raizes de X a condição (1) verifica-se sempre.

Para vermos completamente a redução de X à forma biquadrada consideremos o caso de

$$a\,n - b\,m = 0$$

Em tal hipótese podemos escrever

$$X = \frac{m}{a}\left(a\,x^2 + 2\,b\,x + c\right)\left(a\,x^2 + 2\,b\,x + \frac{p\,a}{m}\right)$$

e fazer em seguida

$$x = y - \frac{b}{a}$$

para termos

$$X = m\,a\left(y^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(y^2 + \frac{p}{m} - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

que é biquadrado.

Posto isto, vejamos como se passa da forma biquadrada para o terceiro grau

Seja então o

$$\int\left[G\,(x) + \frac{H\,(x)}{\sqrt{X}}\right] dx$$

onde X possui a forma

$$X = m\,x^4 + n\,x^2 + p$$

e onde H (x) pode ser uma função inteira ou fraccionária.

Suponhamos, caso mais geral, que H (x) é uma fracção racional igual ao cociente de P por Q.

Pondo de parte a função G (x), racional, e que se sabe integrar, temos

$$\int \frac{P\,(x)\;dx}{Q\,(x)\,\sqrt{m\,x^4 + n\,x^2 + p}}$$

Multipliquemos ambos os membros por

$$Q\,(-x)$$

para que, no denominador, nos apareça o producto de Q (x). por Q (— x), isto é, um polinómio par em x, que designamos por K (x^2).

No numerador efectuado o producto P (x). Q (— x) resulta um polinómio qualquer a que daremos a forma

$$R\,(x^2) + x\,.\,S\,(x^2)$$

Então o integral em estudo toma a forma :

$$\int \frac{R\,(x^2) + x\,.\,S\,(x^2)}{K\,(x^2)\,\sqrt{m\,.\,x^4 + n\,.\,x^2 + p}}\,.\,dx$$

fazendo agora

$$x^2 = y \qquad x\,.\,dx = \frac{1}{2}\,dy \qquad dx = \frac{1}{2}\,\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

vem :

$$\int \frac{H(x)}{\sqrt{X}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{R\,(y)\,dy}{K(y)\sqrt{y\,(m\,y^2 + n\,y + p)}} + \\ + \frac{1}{2}\int \frac{S\,(y)\;dy}{K(y)\sqrt{m\,.\,y^2 + n\,.\,y + p}}$$

como pretendíamos achar.

III — **Sôbre o** $\int f\left(x\,,\sqrt{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}\right) dx$

Estes integrais reduzem-se com a aplicação da teoria exposta no parágrafo I dêste capítulo, e concluimos que a redução dêstes integrais conduz a certo número de integrais resolúveis por meio das funções elementares, e ainda as três novas funções transcendentes

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \qquad I_1 = \int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{X}} \qquad J_1 = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{X}}$$

Estas três novas transcendentes são, respectivamente, chamadas *integrais elípticos de primeira, segunda e terceira espécies.*

O cálculo dêstes integrais, deu origem à teoria das funções elípticas, de que os integrais elípticos são as funções inversas.

IV — **Sôbre o** $\int f\left(x, \sqrt{a x^2 + b x + c}\right) dx$

Podemos aplicar a êste integral a substituição racional de que se fala no final do capítulo anterior.

Fazendo como aí se indica :

$$X = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x-\alpha)^2 \frac{(x-\beta)}{(x-\alpha)}$$

vem

$$\sqrt{X} = (x-\alpha)\sqrt{a.\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

e fazendo

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = t$$

vem

$$x = \frac{\beta - \alpha t}{1-t}$$

e supondo

$$\beta - \alpha \neq 0$$

vem

$$d\,x = \frac{\alpha-\beta}{(1-t)^2}\,d\,t$$

Então teremos finalmente

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx = \int f\left(\frac{\alpha-\beta t}{1-t}, \frac{\alpha-\beta}{1-t}\cdot\sqrt{a\,t}\right)\cdot\frac{\alpha-\beta}{(1-t)^2}\,d\,t$$

ou finalmente

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx = \int F(t)\,d\,t$$

sendo êste integral resolúvel por intermédio das funções elementares, visto que por F (t) representámos uma função evidentemente integrável apesar de não ser racional.

Vamos, no entanto, encarar a resolução completa dêste integral, utilisando o que se expôz, sôbre curvas unicursais, na primeira parte dêste estudo.

Seja f (x, y) uma função racional da variável independente x, e da função y, de x definida pela relação

$$y^2 = a\,x^2 + b\,x + c$$

O integral

$$\int f(x,y)\,d\,x$$

diz respeito a uma curva unicursal, porque

$$y^2 - a\,x^2 - b\,x - c = 0$$

é uma cónica.

Viu-se, então, no capítulo III, em geral, e no parágrafo V dêsse capítulo, que diz respeito a cónicas, que era possível representar as coordenadas x e y de um ponto genérico da curva em função de uma variável θ.

Então sendo

$$x = \varphi(\theta) \qquad x = \psi(\theta)$$

temos sucessivamente

$$\int f(x, y)\,d\,x = \int f\left[\varphi(\theta), \psi(\theta)\right]\varphi'(\theta)\,d\,\theta$$

$$= \int F(\theta)\,.\,d\,\theta$$

onde F representa uma função racional.

Para um estudo mais pormenorisado das substituições a fazer com o fim de racionalisar a expressão que se pretende integrar, consideremos três casos.

1.º caso

Pretendemos integrar

$$(1) \quad \int f(x, y)\,dx$$

onde é

$$y^2 - a\,x^2 - b\,x - c = 0$$

sendo esta cónica uma *hipérbole*.

Nesta hipótese, será

$$B^2 - A\,C = -\,a$$

e portanto o integral (1) será da forma

$$\int f\left(x, \sqrt{-\,a\,x^2 + b\,x + c}\right)dx$$

É fácil de ver que a hipérbole considerada tem centro no ponto de coordenadas.

$$\left(\frac{b}{2\,a}, 0\right)$$

O eixo transverso, coincide com o eixo dos X X.
A cónica tem as duas assíntotas de equações.

$$y = \pm \sqrt{-a}\left(x - \frac{b}{2\,a}\right)$$

Finalmente um dos ramos da hipérbole corta o eixo das ordenadas nos pontos

$$(0, \pm\sqrt{c})$$

Evidentemente que as rectas de um feixe impróprio cuja direcção é paralela a uma qualquer das assíntotas, cortam a cónica num só ponto.
A equação geral das rectas dêste feixe será

$$y = \pm\sqrt{-a}.\,x + \theta$$

e portanto seguindo esta substituição teríamos

$$\sqrt{-a\,x^2 + b\,x + c} = \pm\sqrt{-a}.\,x + \theta$$

donde

$$x = \frac{\theta^2 - c}{b \mp 2\sqrt{-a}\,\theta} \qquad y = \pm\sqrt{-a}\,\frac{\theta^2 - c}{b \mp 2\sqrt{-a}.\,\theta} + \theta$$

Poderemos também, considerar um feixe próprio de rectas passando tôdas por um ponto fixo da curva, por exemplo, o ponto em que a curva corta o eixo das ordenadas

$$(0, \pm\sqrt{c})$$

Uma qualquer recta do feixe pode ter a equação

$$y \pm \sqrt{c} = \theta\,x$$

e portanto virão para as coordenadas do ponto móvel

$$\sqrt{-a\,x^2 + b\,x + c} = \theta\,x \mp \sqrt{c}$$

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}.\,\theta}{a + \theta^2} \qquad y = \frac{\pm 2\sqrt{c}.\,\theta}{a + \theta^2}.\,\theta \mp \sqrt{c}$$

2.º caso

Pretendemos integrar

$$\int f\,(x, y)\,dx$$

onde

$$y^2 - a\,x^2 - b\,x - c = 0$$

é a equação duma elipse. Será então

$$B^2 - A\;C = -\,a$$

o que faz com que aquêle integral seja da forma

$$\int f\,(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})\,dx$$

A elipse considerada tem o seu centro no ponto

$$\left(-\frac{b}{2\,a}, 0\right)$$

Corta o eixo das ordenadas nos pontos

$$(0, \pm\sqrt{c})$$

e o eixo das abscissas nos pontos

$$\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 + a\,c}}{2\,a}, 0\right)$$

Designemos por α e β as abscissas dêstes dois últimos pontos.
Um feixe com séde num ponto fixo da curva, por exemplo, um dos pontos em que a curva corta o eixo dos X X, terá rectas de equação

$$y = \theta\,(x - \alpha)$$

ou

$$y = \theta\,(x - \beta)$$

Então virá sucessivamente

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \theta\,(x - \alpha)$$

e portanto

$$x = \frac{\beta - \alpha.\,\theta^2}{1 - \theta^2} \qquad y = \theta\left(\frac{\beta - \alpha\,\theta^2}{1 - \theta^2} - \alpha\right)$$

Tomando para centro do feixe um dos pontos

$$(0, \pm \sqrt{c})$$

a equação das rectas era

$$y \mp \sqrt{c} = \theta\, x$$

e

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}\,.\,\theta - b}{a - \theta^2} \quad y = \frac{\pm 2\sqrt{c}\,.\,\theta - b}{a - \theta^2}\,.\,\theta \pm \sqrt{c}$$

3.º caso

Seja finalmente o

$$\int f\,(x, y)\, dx$$

relativo à parábola de equação

$$y^2 = b\,x + c$$

Nesta hipótese, x é uma função racional de y e portanto

$$\int f\,(x, \sqrt{b\,x + c})\, dx = \int f\left(\frac{y^2 - c}{b}, y\right)\frac{2\,y}{b}\, dy$$

Contudo, se repararmos que a parábola, admite o eixo dos X X, para eixo de simetria, que corta o eixo dos Y Y, nos pontos

$$(0, \pm \sqrt{c})$$

e que tem o seu vértice no ponto

$$\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$$

poderemos cortar a cónica por rectas com séde num ponto fixo.

Tomando, para séde do feixe, o ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$$

temos para equação geral das rectas do feixe

$$y = \theta\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

donde

$$\sqrt{b\,x + c} = \theta\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

e portanto

$$x = -\frac{c}{b\,\theta^2} \quad y = \left(\frac{c}{b} - \frac{c}{b\,.\,\theta^2}\right)\theta$$

Poderíamos ter escolhido, bem como nos casos anteriormente estudados, outro qualquer ponto da cónica para séde dos feixes de rectas.

Complicar-se-hiam inùtilmente os cálculos.

V — **Integrais abelianos.**

Seja g, o género duma curva algébrica de equação

$$F\,(x, y) = 0$$

Chama-se *integral abeliana de género g*, relativo á curva algébrica considerada, a todo o integral da forma

$$\int f\,(x, y)\, dx$$

onde f é uma função racional de x e y, estando y relacionado com x pela equação

$$F\,(x, y) = 0$$

da curva, a que o integral abeliano diz respeito.

No parágrafo anterior vimos alguns integrais relativos às cónicas e podemos afirmar que

Todo o integral abeliano do género zero, se resolve por meio das funções elementares.

Como exemplo de um integral abeliano de género zero relativo a uma cúbica apresentamos um, que nos parece bastante eloqüente.

Mostra êste integral bem claramente a vantagem extraordinária dêstes estudos que fizemos.

Seja com efeito o integral

$$I = \int \frac{d\,x}{x\left[\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3 + x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3 + x^6}}\right]}$$

relativo à cúbica de equação

$$y^3 - 2\,x^3 + 3\,x\,y = 0$$

visto que resolvendo esta equação se obtem

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3 + x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3 + x^6}}$$

A cúbica considerada é uma unicursal por que possui um ponto duplo na origem

Fazendo então

$$x = \frac{3\,\theta}{2 - \theta^3} \qquad y = \frac{3\,\theta^2}{2 - \theta^3}$$

virá

$$I = \frac{2}{3} \int \left(1 + \frac{1}{\theta^3}\right) d\,\theta$$

e portanto

$$I = \frac{2}{3}\left(\theta - \frac{1}{2\,\theta^2}\right) + C$$

onde se poria em seguida

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{x^3 + 1}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{x^3 + 1}}\right)$$

VI — **Integrais abelianos de género um**

Para reduzir estes integrais, utilisaremos o que se diz no capítulo IV, especialmente no segundo e terceiro parágrafos, e também o teorema que demonstramos em seguida :

Se duas curvas se correspondem ponto por ponto, qualquer integral abeliano pertencente a uma, transforma-se num integral abeliano pertencente à outra.

Consideremos então, como no parágrafo II do capítulo IV, duas curvas, correspondendo-se ponto por ponto, e de equações

$$\varphi\,(x,\,y) = 0 \qquad \psi\,(\xi,\,\eta) = 0$$

Seja

$$\int f\,(x,\,y)\,dx$$

o integral abeliano pertencente à primeira curva. Fazendo a transformação racional

$$x = \Phi\,(\xi,\,\eta) \qquad y = \theta\,(\xi,\,\eta)$$

teremos

$$dx = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\xi}\,d\,\xi + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\eta}\,d\,\eta$$

Diferenciando a equação da segunda curva teremos

$$0 = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,\xi}\,d\,\xi + \frac{\partial\,\psi}{\partial\,\eta}\,d\,\eta$$

Eliminando $d\,\eta$ entre estas duas expressões vem

$$d\,x = \frac{\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\xi} \cdot \dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\eta} - \dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\eta} \cdot \dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\xi}}{\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\eta}}\,d\,\xi$$

Feita a mudança de variáveis no integral considerado somos conduzidos a

$$\int F\,(\xi\,,\eta)\,d\,\xi$$

onde F é uma função racional de ξ e η, estando η relacionado com ξ por intermédio de

$$\psi\,(\xi\,,\eta) = 0$$

equação da segunda curva. Então êste novo integral abeliano pertence à segunda curva.

c. q. d.

No capítulo IV, parágrafo III viu-se que *toda a curva de género um corresponde, ponto por ponto, com uma cúbica.*

No mesmo capítulo, no final do parágrafo segundo demonstrou-se também que *duas curvas, correspondendo-se ponto por ponto, são do mesmo género.*

Finalmente o teorema do começo do presente parágrafo limita o nosso estudo aos integrais abelianos relativos a uma cúbica sem ponto duplo.

Consideremos então uma cúbica de género um, e portanto sem pontos duplos, e seja, tomando a origem num ponto da curva

$$A\,x^3 + 3\,B\,x^2\,y + 3\,C\,x\,y^2 + D\,y^3 +$$
$$+ a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + \alpha\,x + \beta\,y = 0$$

a equação da curva.

Consideremos, com séde na origem, um feixe de rectas cuja equação geral é

$$y = t\,x$$

Eliminando y entre esta e a equação da curva e dividindo ambos os membros do resultado por x, vem

$$x^2(A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3) + x(a + 2bt + ct^2) + \alpha + \beta t = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau vem

$$x = \textit{função racional de } t \textit{ e } \sqrt{T}$$

onde T é um polinómio do quarto grau em t, não podendo o seu grau ser, de modo algum, inferior a três.

A diferencial de x é evidentemente uma função racional de t e $\sqrt{T}$. Como também se tem

$$y = t\,x$$

o mesmo sucede com y.

Se

$$\int f(x, y)\,dx$$

é o integral abeliano relativo à cúbica considerada, depois de se efectuarem as substituïções indicadas, acha-se

$$\int f\left[\varphi(t, \sqrt{T}),\ t \,.\, \varphi(t, \sqrt{T})\right] \varphi'(t, \sqrt{T})\,dt$$

ou finalmente

$$\int F(t, \sqrt{T})\,dt$$

onde F é uma função racional de t e do radical dum polinómio de terceiro ou quarto grau em t.

Este último integral é elíptico o que permite enunciar:

Todo o integral abeliano do género um é reductível a um integral elíptico.

Podemos também, do que ficou dito, deduzir que:

As coordenadas dum ponto duma curva do género um, podem exprimir-se, racionalmente, em função dum parâmetro t *e da raiz quadrada dum polinómio do quarto grau em* t.

ÍNDICE

PRIMEIRA PARTE

GEOMETRIA

CAPÍTULO I

Pág.

Teoria geral das Curvas algébricas 5

Equação do grau n. Teoria do Centro. Linhas diametrais; diâmetros. Tangente, normal e contacto das curvas. Polares dum ponto. Polares de uma recta. Assintotas. Pontos singulares nas curvas algébricas. Pontos múltiplos e tangentes múltiplas. Comportamento das polares e hessiana nos pontos duplos. Fórmulas de Plücker. Género duma curva algébrica.

CAPÍTULO II

Teoremas gerais sôbre curvas algébricas. Feixes e rêdes de curvas 35

Teoremas. Feixes de curvas. Rêdes de curvas.

CAPÍTULO III

As curvas de género zero. Unicursais 43

Definição. Propriedade fundamental. Determinação das coordenadas do ponto genérico da curva em função racional de uma variável θ. Singularidades ordinárias nas unicursais. Unicursais de segunda ordem. Unicursais de terceira ordem. Quárticas unicursais.

CAPÍTULO IV

Breves notícias sôbre as curvas de género um . . . 64

Curva adjunta. O conceito da correspondência de Chasles, generalisado. Toda a curva de género um admite uma correspondencia unívoca com uma cúbica.

SEGUNDA PARTE

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO V

Pág.

Generalidades sôbre funções 79

Definições. Funções racionais. Funções algébricas não racionais.

CAPÍTULO VI

Complementos de Cálculo Integral 87

Integrais hiperelípticos. Integrais elípticos. Integrais abelianos. Integrais abelianos de género um.