Métricas riemannianas em fibrados tangentes I

Évora, 30 Novembro 2016

R. Albuquerque

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

Uma variedade diferenciável de dimensão $m \in \mathbb{N}$ é dada por um espaço topológico M munido de um *atlas*, ou seja, um conjunto de cartas:

$$\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \quad \alpha \in \text{índices}\},$$

os U_α são abertos em M que formam cobertura de M $(\bigcup_\alpha U_\alpha = M)$,
os ϕ_α são homeomorfismos

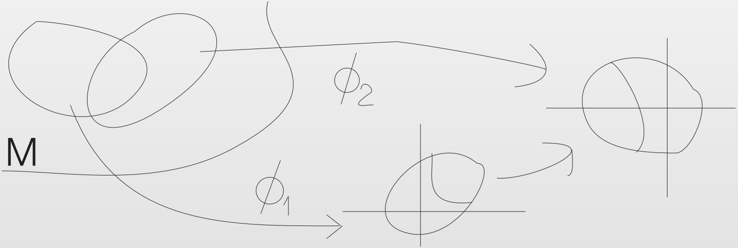
$$\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$$

tais que, sobre quaisquer dois abertos que se intersectam,

$$\phi_\alpha \circ {\phi_\beta}^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

temos um difeomorfismo (entre abertos de $\mathbb{R}^m$).

A classe de diferenciabilidade dos $\phi_\alpha \circ {\phi_\beta}^{-1}$ é a classe de diferenciabilidade de *M*. Em geral, consideramos variedades C^∞.



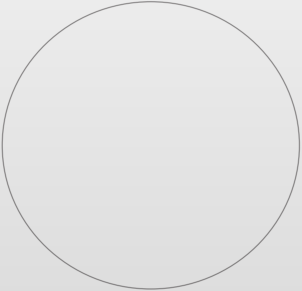
EXEMPLOS:

1) $\mathbb{R}^n$ ou qualquer aberto $U \subset \mathbb{R}^n$

2) Esferas

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

S^1:



$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

cartas: $U_{1,+} = \{x_1 > 0\}$, $U_{1,-} = \{x_1 < 0\}$, $U_{2,+} = \{x_2 > 0\}$, etc...

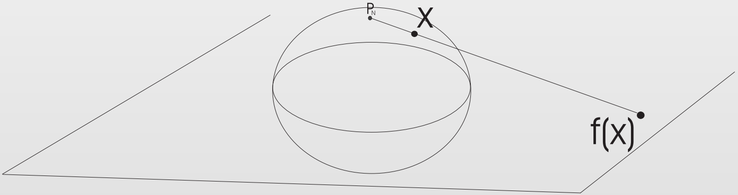
$\phi_{i,\pm} : U_{i,\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_{2,\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) \in B_1(0)$
${\phi_{1,\pm}}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (\pm\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}, y_1, \ldots, y_n)$

$\phi_{1,-} \circ {\phi_{1,+}}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n)$,
$\phi_{2,+} \circ {\phi_{1,-}}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2}, y_2, \ldots, y_n)$
todas as mudanças de carta são C^∞ nos abertos, etc.

Logotipo da ONU: projecção azimutal equidistante, de centro no Pólo Norte até 60^o

Número mínimo de cartas? É o segundo invariante topológico em $\mathbb{N}$ de uma variedade.

S^n pode ser coordenado com apenas duas cartas.
Por exemplo, a projecção estereográfica:



3) Variedades produto cartesiano: se M, N são variedades de dimensões m e m, então $M \times N$ é uma variedade de dim $m + n$:

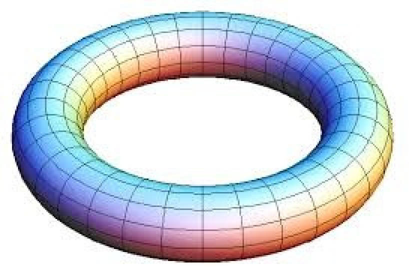
$$\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$$

4) Cilindro

$$S^n \times \mathbb{R}$$

(ou cone sem vértice...)

5) Toro: $S^n \times S^m$



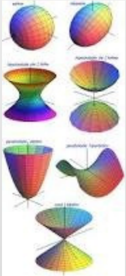
N.B.: $S^1 \times S^1 \neq S^2$.

6) Construção de variedades por imagem recíproca.
Suponhamos $F : D \subset \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ com valor regular $a \in \mathbb{R}$, isto é, $\nabla F_{|x} \neq 0, \ \forall x \in \mathcal{S}$. Então

$$\mathcal{S} := F^{-1}(a) = \{x \in D : \ F(x) = a\}$$

é uma variedade de dimensão m.

É o caso das variedades algébricas regulares ou zeros de polinómios regulares... por exemplo, as quádricas.



7) Construção de variedades por colagem.

É dada uma família $\{U_i\}$ de abertos de $\mathbb{R}^n$ e, para cada i, uma família de subconjuntos abertos $U_{ij} \subset U_i$ e homeomorfismos $f_{ij} : U_{ji} \to U_{ij}$ tais que:

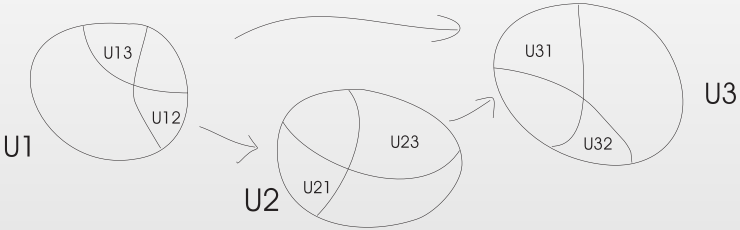
$$f_{ij}{}^{-1} = f_{ji}, \qquad f_{ij}(U_{ji} \cap U_{jk}) = U_{ij} \cap U_{ik}, \qquad f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}.$$

Agora constrói-se relação de equivalência:

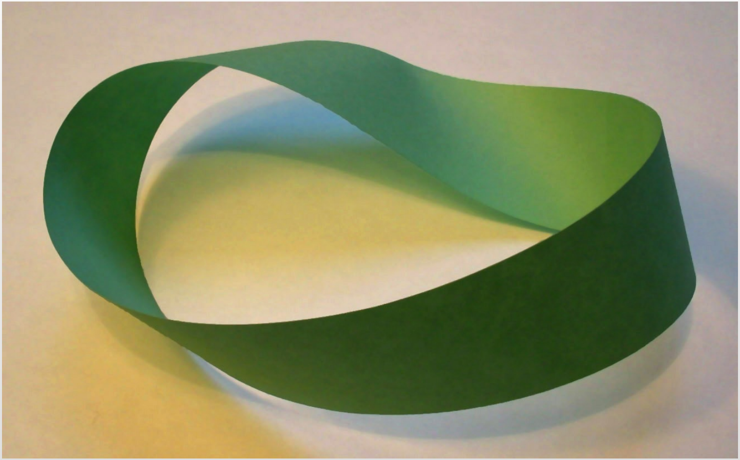
$$x \sim y \qquad \text{se} \qquad x \in U_{ij},\ y \in U_{ji},\ f_{ji}(x) = y$$

e logo a variedade colagem

$$M = \frac{\bigsqcup_i U_i}{\sim}.$$


U13
U12
U1
U2
U21
U23
U31
U32
U3

Banda de Möbius



8) Variedades quociente.

Dada uma variedade M e uma acção $M \times Z \longrightarrow M$ de um grupo discreto,

$$x \cdot 1 = x, \qquad (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2), \qquad \forall x \in M,\ g_1, g_2 \in Z.$$

Podemos formar nova variedade M/Z com a topologia quociente.

Por exemplo, o espaço projectivo:

$$\mathbb{RP}^n = \{\text{rectas vectoriais de } \mathbb{R}^{n+1}\} = S^n/\mathbb{Z}_2.$$

(exemplo de uma variedade não orientável quando n é par.
Pode-se obter $\mathbb{RP}^2$ como colagem de uma banda de Möbius com um disco D pelas arestas)

Como fazer análise e geometria sobre as variedades?, medir o quê?, deformar ou descobrir a topologia em que termos?, classificar, como?

Fazer geometria invariante das cartas (como aliás a geometria euclidiana faz).

Colocamos as cartas todas em cima da mesa...
Construimos o espaço tangente, que é uma nova variedade.

Seja M uma variedade de dimensão m. Seja $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ um atlas qualquer de M.
Podemos até tomar o *universo* das cartas de M...

Então o **espaço tangente** de M é definido por

$$TM = \frac{\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^m}{\sim}$$

com a relação

$$(x, v) \sim (x', v') \qquad \text{se}$$

$$x = x' \in U_\alpha \cap U_{\alpha'}, \quad \mathrm{d}(\phi_{\alpha'} \circ {\phi_\alpha}^{-1})_{\phi_\alpha(x)}(v) = v'$$

Tem uma projecção natural sobre M

$$\pi : TM \longrightarrow M, \qquad \pi([x,u]) = x.$$

Como se torna um instrumento de análise diferencial?

Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é **diferenciável** sobre M se para algum atlas $f \circ {\phi_\alpha}^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no sentido real.

Então

$$\mathrm{d}f : TM \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{d}f(x)([x,u]) = \mathrm{d}(f \circ {\phi_\alpha}^{-1})_{\phi_\alpha(x)}(u)$$

não depende da escolha da carta.

Também se vê que $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$, onde os T_xM são espaços vectoriais de dimensão m.

Note-se que TM tem dimensão $2m$ e por isso olhamos para a topologia de forma não habitual, por exemplo,

$$TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}.$$

Em geral,

$$TS^n = \{(x, v) : \; x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1, \; v \in \mathbb{R}^{n+1}, \; \langle x, v \rangle = 0\}$$

Campos vectoriais C^∞ são dados por *secções* do fibrado tangente: funções

$$X : M \longrightarrow TM,$$

tais que

$$\pi \circ X = 1_M \qquad \text{ou seja} \qquad X_x \in T_x M, \ \forall x \in M,$$

e $X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é função C^∞, para qualquer função $\mathrm{C}^\infty_M(\mathbb{R})$.

$$X(f)_x := \mathrm{d}f_x(X_x).$$

Os campos vectorias ficam determinados pela forma como actuam nas funções escalares, por exemplo, sobre as componentes das cartas.
Formam uma álgebra de Lie $\mathfrak{X}_M$.
Podem-se claramente somar e multiplicar por funções escalares: $(X+Y)_x = X_x + Y_x$, $fX_x = f_x X_x$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}_M$ e $f \in \mathrm{C}^\infty_M(\mathbb{R})$.

Álgebra de Lie com o produto anti-simétrico: $[X, Y] \in \mathfrak{X}_M$, definido por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Com efeito,

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

A par do fibrado tangente, temos o **fibrado cotangente**:

$$\pi : T^*M \longrightarrow M$$

$$T_x^*M = (T_xM)^* = \{\lambda : T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R}\text{-linear}\}$$

Para cada carta $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ temos secções locais, i.e. apenas sobre o domínio da carta, respectivamente campo de referenciais e de co-referenciais

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = [x, e_i], \qquad \mathrm{d}x^j \text{ dado por } \mathrm{d}x^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j$$

Uns são contravariantes, outros covariantes: se $(V, y^1, \ldots, y^m)$ é outra carta, então em $U \cap V$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}, \qquad \mathrm{d}x^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \mathrm{d}y^k.$$

Quando derivamos uma função *suave* entre variedades $\psi : M \longrightarrow N$ obtemos

$$\mathrm{d}\psi_x : T_x M \longrightarrow T_{\psi(x)} N \quad x \in M$$

$$(\mathrm{d}\psi(X))(f)_{\psi(x)} = \mathrm{d}(f \circ \psi)_x(X_x), \ \forall f \in \mathrm{C}^\infty_N.$$

Temos então bem definida função suave

$$\mathrm{d}\psi : TM \longrightarrow TN$$

...

Em particular, se diferenciarmos um campo vectorial $X : M \longrightarrow TM$, temos

$$\mathrm{d}X : TM \longrightarrow T(TM).$$

Uma generalização de fibrado tangente. Dizemos que $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vectorial real sobre M de ranque k se

i. E, M são variedades de dim $m+k$ e m, respectivamente

ii. M admite cobertura por abertos U_α e *trivializações*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

$$p_1 \circ \phi_\alpha(e) = \pi(e), \ \forall e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

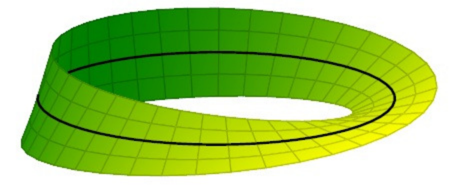
iii. $E_x = \pi^{-1}(x)$ tem estrutura de espaço vectorial tal que

$$p_2 \circ \phi_\alpha : E_x \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo $\mathbb{R}$-linear.

Exemplos:

1) $TM,\ T^*M \longrightarrow M$ são fibrados vectoriais de ranque m.



2) fibrado de Möbius

3) **soma directa**: se $E, F \longrightarrow M$ são fibrados vectorias sobre M de ranque k, l. Então

$$E \oplus F \longrightarrow M$$

é fibrado vectorial de ranque $k + l$: $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$.

4) **produto tensorial** $E \otimes F \longrightarrow M$, de ranque kl

5) **produto exterior** $E \wedge F$ de ranque $kl/2$

$$E \wedge F\ _x = E_x \wedge F_x = \{e \wedge f :\ e \in E,\ f \in F\}$$

$e \wedge f = e \otimes f - f \otimes e.$

O espaço das formas diferenciais de grau p é o espaço das secções de $\Lambda^p T^* M \longrightarrow M$, ou seja,

$$\Omega^p_M = \{\alpha : \ \alpha_x \in \Lambda^p T^*_x M\}$$

Importância vem de existência de operador diferencial:

$$\mathrm{d} : \Omega^p_M \longrightarrow \Omega^{p+1}_M$$

$$\mathrm{d}(f \, \mathrm{d}x^i_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

Donde resulta $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$...

Como derivar secções de um fibrado vectorial?

$$\text{se } s : M \longrightarrow E, \quad \text{então } \mathrm{d}s : TM \longrightarrow TE.$$

Então precisamos de <u>conexão</u>

$$\nabla : \Omega^0_M(E) \longrightarrow \Omega^0_M(T^*M \otimes E)$$

operador diferencial local (comuta com restrições) que verifica *regra de Leibniz*:

$$\nabla_{fX+Y}\xi = f\nabla_X\xi + \nabla_Y\xi, \qquad \nabla_X(\xi+\eta) = \nabla_X\xi + \nabla_X\eta$$

$$\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi = \mathrm{d}f(X)\,\xi + f\nabla_X\xi.$$

N.B.: $\Omega^p_M(E) = \{$secções de $\Lambda^p T^*M \otimes E\}$.

Para qualquer conexão ∇, obtemos tensor de curvatura $R^\nabla \in \Omega^2_M(E)$

$$R^\nabla(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

Com efeito, agora

$$R^\nabla(X,Y)(f\xi) = R^\nabla(X,fY)\xi = R^\nabla(fX,Y)\xi = fR^\nabla(X,Y)\xi$$

(dem.: ver primeiro $[X,fY] = f[X,Y] - X(f)Y$).

Uma variedade riemanniana é uma variedade M munida de um tensor $g \in \mathrm{C}^\infty_M(\mathrm{Sym}^2 T^*M)$, ou seja, uma métrica

$$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

bilinear, simétrica, definida positiva e, numa carta (logo em todas), as funções

$$g_{ij} = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

são C^∞.

Tulio Levi-Civita encontrou a conexão de Levi-Civita, dada (M, g).

Teorema

Existe sempre uma conexão em M (ou seja, no fibrado tangente de M) que faz

- $\nabla g = 0$
- ∇ *tem torsão nula, isto é,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

As curvas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tais que

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

chamam-se geodésicas. Extremos de $\int_I \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} \mathrm{d}t$.