



FACULDADE · DE · CIÊNCIAS | UNIVERSIDADE · DE · LISBOA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dezembro de 2003

# Alguns Problemas Clássicos de Geometria Projectiva

Pedro Correia Gonçalves Macias Marques  
Licenciado em Matemática

Orientadora: Professora Doutora Margarida Mendes Lopes



# Agradecimento

Este trabalho foi possível graças ao paciente apoio e constante estímulo por parte da minha orientadora, a professora Margarida Mendes Lopes. O meu obrigado.

---

## Resumo

Neste trabalho são apresentados alguns problemas clássicos de geometria projectiva e as suas resoluções, recorrendo ao cálculo de Schubert e a argumentos geométricos mais clássicos. Entre os problemas abordados estão o de encontrar o número de rectas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam quatro rectas dadas, o de encontrar o número de rectas de  $\mathbb{P}^4$  que intersectam seis planos dados e o de encontrar e descrever a configuração das rectas contidas numa superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$ . É feita também a descrição de uma superfície de Kummer, que é construída a partir da intersecção da variedade de Grassmann  $G_{1,3}$  das rectas de  $\mathbb{P}^3$  com uma hipersuperfície quádrlica de  $\mathbb{P}^5$ .

**Palavras-chave:** geometria projectiva, grassmanniano, rectas em  $\mathbb{P}^3$ , cálculo de Schubert, superfície cúbica.



## Abstract

This dissertation presents some classical problems in projective geometry and their resolutions, in which are used results of Schubert calculus and more classical geometrical arguments. Among these problems are the one of finding the number of lines in  $\mathbb{P}^3$  intersecting four given lines, the one of finding the number of lines in  $\mathbb{P}^4$  intersecting six given planes, and the one of finding the number of lines lying on a cubic surface in  $\mathbb{P}^3$  and describing their configuration. It also presents the description of a Kummer surface, whose construction is based on the intersection of the Grassmann manifold  $G_{1,3}$  of lines in  $\mathbb{P}^3$  and a quadric hypersurface in  $\mathbb{P}^5$ .

**Key-words:** projective geometry, grassmannian, lines in  $\mathbb{P}^3$ , Schubert calculus, cubic surface.





# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Grassmannianos</b>	<b>5</b>
1.1 Primeiras definições . . . . .	5
1.2 Mergulho de Plücker . . . . .	7
<b>2 Cálculo de Schubert</b>	<b>15</b>
2.1 Condições de Schubert . . . . .	15
2.2 Cálculo de Schubert . . . . .	18
2.3 As rectas de $\mathbb{P}^3$ . . . . .	22
2.4 Alguns problemas de geometria enumerativa . . . . .	33
2.4.1 Quantas rectas intersectam quatro rectas dadas em $\mathbb{P}^3$ ? . . . . .	33
2.4.2 Quantas rectas intersectam quatro curvas dadas em $\mathbb{P}^3$ ? . . . . .	35
2.4.3 Quantas rectas intersectam seis planos dados em $\mathbb{P}^4$ ? . . . . .	36
2.5 Superfícies de Kummer . . . . .	44
<b>3 As 27 rectas de uma superfície cúbica</b>	<b>55</b>
3.1 Uma primeira construção . . . . .	55
3.2 A superfície cúbica como <i>blow-up</i> de $\mathbb{P}^2$ em seis pontos . . . . .	62
3.2.1 Simetria da posição das rectas . . . . .	68
3.2.2 Casos particulares, ou quando as rectas não são 27 . . . . .	70
3.3 “Quantas” rectas estão contidas numa hipersuperfície cúbica de $\mathbb{P}^4$ ? . . . . .	74
<b>Apêndice</b>	<b>77</b>
Condições de Schubert . . . . .	77

---

# Introdução

A presente dissertação visa apresentar certas questões clássicas de geometria projectiva – algumas das quais remontando ao século XIX –, e descrever possíveis resoluções.

Para algumas destas questões torna-se necessário introduzir a noção de *grassmanniano* – o conjunto dos subespaços de um espaço projectivo com uma dada dimensão. É feita também uma descrição do *mergulho de Plücker*, que permite identificar cada grassmanniano com uma subvariedade de um espaço projectivo. Para o estudo de algumas destas questões, é utilizada uma ferramenta, o *cálculo de Schubert*, que é também apresentada, e que foi o ponto de partida deste trabalho.

Começa-se por estudar um dos grassmannianos mais simples: o conjunto das rectas de  $\mathbb{P}^3$ . O mergulho de Plücker permite-nos identificar este grassmanniano com uma hipersuperfície quádrlica de  $\mathbb{P}^5$ , que designamos por  $G_{1,3}$ . São exploradas as intersecções de  $G_{1,3}$  com os diferentes subespaços de  $\mathbb{P}^5$  e é estudada a ligação entre estes conjuntos e os conjuntos de rectas de  $\mathbb{P}^3$  representados por eles. Verifica-se que algumas destas intersecções têm um significado geométrico muito preciso, no sentido em que correspondem a conjuntos de rectas que satisfazem uma condição surpreendentemente simples. Por exemplo, as rectas de  $\mathbb{P}^3$  contidas em  $G_{1,3}$  correspondem aos conjuntos das rectas de  $\mathbb{P}^3$  que estão contidas num dado plano  $\pi$  e passam por um dado ponto  $P \in \pi$ ; os planos contidos em  $G_{1,3}$  correspondem ou aos conjuntos das rectas de  $\mathbb{P}^3$  que estão contidas num dado plano  $\pi$ , ou aos conjuntos das rectas de  $\mathbb{P}^3$  que passam por um dado ponto  $P$ .

Em seguida, estudam-se três problemas de geometria enumerativa, área da geometria algébrica que estuda problemas relacionados com o número de objectos em variedades que satisfazem um dado conjunto de condições.

Em primeiro lugar, procura-se encontrar o número de rectas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam quatro rectas dadas. A minha atenção foi despertada para este problema pela leitura de *An Invitation to Algebraic Geometry* (K. Smith e outros) [SKKT00], que me permitiu ter uma primeira perspectiva de conjunto (embora superficial) sobre esta área da matemática. Uma generalização deste

problema, também apresentada, é encontrar o número de rectas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam quatro curvas dadas. Por fim, o último destes problemas consiste em encontrar o número de rectas, desta vez de  $\mathbb{P}^4$ , que intersectam seis planos dados.

É, em seguida, estudada a intersecção de  $G_{1,3}$  com uma outra hipersuperfície quádrlica  $F$  de  $\mathbb{P}^5$ , a partir da qual se obtém uma superfície de Kummer – superfície de grau quatro de  $\mathbb{P}^3$  que admite 16 pontos duplos e nenhuma outra singularidade. Faz-se a construção desta superfície a partir do estudo da intersecção  $F \cap G_{1,3}$ .

Finalmente, é abordado um outro problema de geometria enumerativa, o de encontrar o número de rectas que estão contidas numa superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$ . Verifica-se que uma superfície cúbica não singular contém exactamente 27 rectas. Nesta dissertação são apresentadas duas demonstrações diversas deste facto, sendo ainda feita uma descrição da configuração destas rectas e descrita uma simetria patente nesta configuração.

Neste trabalho, serão utilizados sem demonstração resultados conhecidos de topologia algébrica e de geometria algébrica. Serão também utilizados conceitos de geometria algébrica, como o de espaço projectivo, variedade e espaço tangente projectivo, que são referidos apenas com o objectivo de fixar terminologia e notação.

Mais pormenorizadamente, esta dissertação é organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 são apresentadas definições que serão utilizadas ao longo do trabalho, nomeadamente a de *grassmanniano*, já referida acima.

Com base no artigo de Kleiman e Laksov, *Schubert Calculus* [KL72], é feita uma descrição do *mergulho de Plücker*.

Com base no mesmo artigo, o capítulo 2 começa com uma introdução sucinta ao cálculo de Schubert. São enunciados sem demonstração os três principais teoremas desta teoria, os quais permitem, a partir da classe de cohomologia de subvariedades de um espaço projectivo, estudar as suas intersecções. São aqui utilizados resultados de topologia algébrica, que se supõem conhecidos. Uma demonstração que envolve mais cálculo é descrita no apêndice.

Em seguida, ainda sem recorrer ao cálculo de Schubert, é feito o estudo das intersecções de  $G_{1,3}$  com os diferentes subespaços de  $\mathbb{P}^5$ , baseado no livro de Semple e Kneebone, *Algebraic Projective Geometry* [SK98].

Com a ajuda deste estudo, mas recorrendo agora ao cálculo de Schubert, são tratados os três problemas de geometria enumerativa que foram referidos.

A resolução do primeiro, que consiste em encontrar o número de rectas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam simultaneamente quatro rectas dadas, é baseada no artigo acima referido [KL72], e é tratada por duas vias distintas: uma recorrendo ao cálculo de Schubert e a outra a argumentos geométricos mais clássicos. Deparamo-nos assim com uma oportunidade para confrontar as duas abordagens.

A resolução do segundo problema, o de encontrar o número de rectas em  $\mathbb{P}^3$  que intersectam simultaneamente quatro curvas dadas, e que se pode encontrar no mesmo artigo, utiliza apenas o cálculo de Schubert.

A resolução do terceiro problema, que se debruça sobre o número de rectas que intersectam seis planos dados em  $\mathbb{P}^4$ , utiliza também o cálculo de Schubert. É depois apresentado um exemplo concreto de seis planos, no qual é calculado directamente, com a ajuda do computador, o número de rectas que os intersectam. A propósito deste problema, é apresentado um resultado sobre a relação entre a configuração de cinco planos em  $\mathbb{P}^4$  e o número de rectas que os intersectam.

Finalmente, é dado destaque a um estudo do grassmanniano  $G_{1,3}$  que vem continuar aquele que fora feito anteriormente: em vez de cortes de  $G_{1,3}$  por subespaços projectivos, é observada a intersecção entre  $G_{1,3}$  e outra hipersuperfície quádrlica de  $\mathbb{P}^5$ . A partir daqui, é obtida uma superfície de Kummer, que é estudada recorrendo ao cálculo de Schubert, aos conhecimentos já estudados sobre  $G_{1,3}$  e ainda a resultados, que se pressupõem conhecidos, como o teorema de Bertini e relações a que obedece a característica de Euler de algumas variedades.

Tanto o terceiro problema abordado como esta descrição da superfície de Kummer se baseiam no livro de Griffiths e Harris, *Principles of Algebraic Geometry* [GH94].

O capítulo 3 aborda um conhecido problema de geometria enumerativa: encontrar o número de rectas que estão contidas numa superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$ .

É apresentada uma primeira resolução, a partir do livro de Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry* [Rei94], a qual, por um lado, recorre a métodos mais clássicos e, por outro lado, aproveita a resposta a um problema resolvido no capítulo anterior, o de procurar o número de rectas de  $\mathbb{P}^3$  que intersectam quatro rectas dadas.

Em seguida, é feita outra abordagem ao mesmo problema, desta vez baseada no livro de Hartshorne, *Algebraic Geometry* [Har93], recorrendo a resultados mais recentes. Mostra-se que o *blow-up* de  $\mathbb{P}^2$  em seis pontos resulta numa superfície cúbica  $S$  que pode ser mergulhada em  $\mathbb{P}^3$ , e descreve-se como assim são obtidas todas as rectas que estão contidas em  $S$ . Aqui são utilizados resultados e conceitos, que também se supõem conhecidos, como a fórmula de

adjunção e o grupo de Picard de uma variedade. Recorrendo a argumentos da teoria das superfícies, mostra-se também que qualquer superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$  pode ser assim obtida, o que torna evidente a generalidade desta abordagem.

É depois observada a simetria da configuração das rectas contidas na superfície  $S$ , mediante a descrição do *duplo-seis de Schläfli* – um conjunto de 12 rectas numa configuração particular, com a qual é possível encontrar uma cúbica que as contenha. Esta descrição foi feita a partir do divertido livro de Hilbert e Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, [HCV52].

A título ilustrativo, a segunda abordagem do problema é utilizada para considerar casos em que, não estando os seis pontos de  $\mathbb{P}^2$  em posição geral, o número de rectas contidas em  $S$  não é o mesmo.

Por fim, a propósito deste problema e também a partir de [Har93], é determinado o número de rectas contidas numa hipersuperfície cúbica de  $\mathbb{P}^4$  que passam por cada ponto.

## CAPÍTULO 1

# Grassmannianos

Neste capítulo, são apresentadas sucintamente algumas definições, que serão utilizadas ao longo do trabalho. Serão utilizados conceitos e resultados que não estão aqui enunciados, mas que podem ser encontrados em livros de introdução à geometria algébrica, como [Har92], [Har93] ou [Rei94]. É depois descrito o mergulho de Plücker, que permite munir um grassmanniano de uma estrutura de variedade projectiva.

### 1.1 Primeiras definições

Dado um espaço vectorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , definimos o *espaço projectivo*  $\mathbb{P}(E)$  como sendo o conjunto dos subespaços vectoriais de  $E$  de dimensão um. Podemos também definir este espaço a partir da seguinte relação de equivalência em  $E \setminus \{0\}$ : dois vectores  $x, y \in E \setminus \{0\}$  estão relacionados se existir  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $x = \lambda y$ ; o espaço projectivo  $\mathbb{P}(E)$  será então o conjunto das classes de equivalência desta relação. Um *subespaço projectivo* de  $\mathbb{P}(E)$  (ou, se não houver risco de confusão, simplesmente um *subespaço* de  $\mathbb{P}(E)$ ) é um espaço projectivo  $\mathbb{P}(F)$ , onde  $F$  é subespaço vectorial de  $E$ .

No caso em que  $E = \mathbb{K}^{n+1}$ , com  $n \geq 0$  usaremos as notações  $\mathbb{P}^n$  para  $\mathbb{P}(E)$  e  $[x_0 : \dots : x_n]$  para a classe do vector  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ . Uma *variedade algébrica* (ou, mais simplesmente, uma *variedade*) em  $\mathbb{P}^n$  é o lugar geométrico dos zeros de um conjunto de polinómios homogêneos em  $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . Se  $\{f_i\}_{i \in I}$  é uma família de polinómios, usamos a notação  $\mathbb{V}(\{f_i\}_{i \in I})$  para a variedade por eles definida (no caso de uma família finita  $\{f_1, \dots, f_k\}$ , escrevemos  $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_k)$ ).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Em diversos livros de geometria algébrica, como é o caso de [Har93], é chamado *conjunto algébrico* ao que aqui chamamos variedade, sendo esta palavra reservada para o que definimos como variedade irredutível.

A intersecção de qualquer família e a união de uma família finita de variedades em  $\mathbb{P}^n$  são ainda variedades em  $\mathbb{P}^n$ . Logo, podemos munir este espaço projectivo de uma topologia, chamada *topologia de Zariski*, tomando para fechados as variedades. Dizemos que uma variedade é *irreduzível*, se o for como fechado nesta topologia. A *dimensão* de uma variedade irreduzível é a sua dimensão como espaço topológico. A *dimensão* de uma variedade qualquer é o máximo das dimensões das suas componentes irreduzíveis. Se  $V$  for uma variedade, um subconjunto  $W \subseteq V$  é uma *subvariedade* de  $V$  se também for variedade algébrica.

Os abertos de Zariski não vazios são densos e, por esta razão, dizemos que uma propriedade é *geral* numa variedade  $V$  se for verificada pelos elementos de algum aberto não vazio de  $V$ . Dizemos que um ponto  $a \in V$  é um *ponto genérico* ou um *ponto geral* de  $V$  que verifica uma dada propriedade, se existir um aberto não vazio  $A$  de  $V$  tal que  $a \in A$  e a referida propriedade é verificada por todos os pontos de  $A$ .

Dado um ponto  $a$  de uma variedade  $V$ , definida por uma família de polinómios  $\{f_i\}_{i \in I}$ , o *espaço tangente projectivo* a  $V$  em  $a$  é o subespaço projectivo de  $\mathbb{P}^n$

$$T_a V := \mathbb{V} \left( \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial X_0}(a)X_0 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial X_n}(a)X_n \right\}_{i \in I} \right).$$

A dimensão de  $V$  coincide com o mínimo do conjunto  $\{\dim T_a V : a \in V\}$ ; para um ponto genérico  $a \in V$ , temos  $\dim T_a V = \dim V$ . Dizemos que  $a \in V$  é um *ponto singular* ou uma *singularidade* de  $V$  se  $\dim T_a V > \dim V$ . Uma variedade é *não singular* se não tiver nenhum ponto singular.

Chamamos *curva* e *superfície* a variedades de dimensão um e dois, respectivamente. Uma *recta* é um subespaço projectivo de dimensão um de  $\mathbb{P}^n$  (correspondente a um subespaço vectorial de dimensão dois de  $\mathbb{K}^{n+1}$ ). Analogamente, um *plano* é um subespaço projectivo de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão dois. Se  $n \geq 1$ , uma *hipersuperfície* de  $\mathbb{P}^n$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$ , que pode sempre ser definida por um polinómio. O *grau* de uma hipersuperfície  $F$  é o menor dos graus dos polinómios  $f$  tais que  $F = \mathbb{V}(f)$ . Um *hiperplano* e uma *quádrica* são hipersuperfícies de graus um e dois, respectivamente.

**Grassmannianos.** O *grassmanniano*  $G(k, E)$  é o conjunto dos subespaços vectoriais de dimensão  $k$  do espaço vectorial  $E$ . No caso em que  $E = \mathbb{K}^n$ , escrevemos  $G(k, n)$  em vez de  $G(k, E)$ .

Como cada subespaço vectorial de  $\mathbb{K}^{n+1}$  de dimensão  $k + 1$  está naturalmente associado a um subespaço projectivo de dimensão  $k$  de  $\mathbb{P}^n$ , podemos identificar o grassmanniano  $G(k + 1, n + 1)$  com o conjunto destes subespaços de  $\mathbb{P}^n$ , para o qual usamos a notação  $\mathbb{G}(k, n)$ . Chamamos também *k-plano* a um subespaço projectivo de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão  $k$ .



Ao grassmanniano  $\mathbb{G}(n-1, n)$ , conjunto dos hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$ , chamamos o *espaço projectivo dual*, e usamos a notação  $\mathbb{P}^{n*}$ . Se um hiperplano de  $\mathbb{P}^n$  é definido por um polinómio da forma  $h_0X_0 + \cdots + h_nX_n$ , as suas coordenadas em  $\mathbb{P}^{n*}$  são  $[h_0 : \cdots : h_n]$ .

Dada uma variedade irreductível  $V$  não singular de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão  $k$ , definimos a *aplicação de Gauss*  $\mathcal{G}_V : V \rightarrow \mathbb{G}(k, n)$ , fazendo corresponder a cada ponto  $a \in V$  o espaço tangente projectivo  $T_aV$ .

**Factos interessantes sobre quádricas.** Consideremos uma hipersuperfície quádrica  $F$  em  $\mathbb{P}^n$  e tomemos um polinómio de segundo grau  $f \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  tal que  $F = \mathbb{V}(f)$ . Existe então uma única matriz simétrica  $Q \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$ , com  $Q = [q_{ij}]$ , tal que

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i,j=0}^n q_{ij}X_iX_j.$$

Logo, o espaço tangente a  $F$  num ponto  $a = [a_0 : \cdots : a_n]$  é

$$T_aF = \mathbb{V} \left( \sum_{i,j=0}^n q_{ij}a_iX_j \right).$$

Daqui concluímos que  $F$  é não singular se e só se  $Q$  tiver característica  $n+1$ . Se  $F$  for não singular, a aplicação de Gauss  $\mathcal{G}_F$  é a restrição a  $F$  do isomorfismo  $\tilde{\mathcal{G}}_F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n*}$  correspondente à aplicação linear associada à matriz  $Q$ .

É também conhecido que, se  $F$  é não singular, esta quádrica não contém nenhum subespaço de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão superior a  $\frac{n-1}{2}$ . Mais: se  $n$  for par, digamos  $n = 2k$ , existe uma família irreductível de  $(k-1)$ -planos contidos em  $F$ ; se  $n$  for ímpar, digamos  $n = 2k+1$ , existem duas famílias irreductíveis de  $k$ -planos contidos em  $F$ . Neste último caso, dados dois  $k$ -planos  $V_1, V_2 \subset F$ , temos  $\dim(V_1 \cap V_2) \equiv k \pmod{2}$  se e só se  $V_1$  e  $V_2$  pertencerem à mesma família.

## 1.2 Mergulho de Plücker

O grassmanniano  $\mathbb{G}(k, n)$  pode ser mergulhado no espaço projectivo  $\mathbb{P}^N$ , onde  $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$ . É apresentada em seguida uma descrição deste mergulho baseada em [KL72].

Dado um elemento  $F \in \mathbb{G}(k, n)$ , tomamos uma base  $(v_0, \dots, v_k)$  de  $F$  (encarado como subespaço de  $\mathbb{K}^{n+1}$ ) e consideramos a matriz

$A \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$  cujas linhas são as suas coordenadas em relação à base canónica:

$$A = \begin{bmatrix} v_{00} & \cdots & v_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k0} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}.$$

Para cada  $j_0, \dots, j_k \in \{0, \dots, n\}$ , com  $j_0 < \dots < j_k$ , designemos por  $A_{j_0 \dots j_k}$  a matriz obtida a partir das colunas  $j_0, \dots, j_k$  de  $A$ . Consideremos todas as matrizes deste tipo, ordenadas lexicograficamente,  $A_{0 \dots k}, \dots, A_{n-k \dots n}$ . Fazemos corresponder a  $F$  o ponto  $[|A_{0 \dots k}| : \dots : |A_{n-k \dots n}|] \in \mathbb{P}^N$ . Às coordenadas homogêneas deste ponto damos o nome de *coordenadas de Plücker*. Mostraremos em seguida que esta correspondência constitui um mergulho, chamado *mergulho de Plücker*. A partir daqui, quando nos referirmos a  $\mathbb{P}^N$  neste contexto, usaremos para os seus pontos a notação  $[x_{0 \dots k} : \dots : x_{n-k \dots n}]$  em vez de  $[x_0 : \dots : x_N]$ .

Para verificar que obtemos assim uma aplicação  $\varphi : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^N$ , consideremos outra base  $(v'_0, \dots, v'_k)$  de  $F$  e a correspondente matriz  $A' \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$ , cujas componentes são as suas coordenadas em relação à base canónica. Seja  $P \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (k+1)}(\mathbb{K})$  a matriz de mudança de base tal que  $A' = PA$ . Desta forma, os determinantes  $|A'_{j_0 \dots j_k}|$  obedecem à relação  $|A'_{j_0 \dots j_k}| = |P| |A_{j_0 \dots j_k}|$  e, assim, em  $\mathbb{P}^N$ , temos

$$[|A'_{0 \dots k}| : \dots : |A'_{n-k \dots n}|] = [|A_{0 \dots k}| : \dots : |A_{n-k \dots n}|].$$

A imagem de  $\mathbb{G}(k, n)$  por esta aplicação é o conjunto dos pontos

$$x = [x_{0 \dots k} : \dots : x_{n-k \dots n}] \in \mathbb{P}^N$$

tais que, para quaisquer  $j_0, \dots, j_{k-1}, l_0, \dots, l_{k+1} \in \{0, \dots, n\}$ , com  $j_0 < \dots < j_{k-1}$ , são satisfeitas as seguintes condições, a que chamamos *correlações de Plücker* (a notação  $l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}$  representa  $l_0 \dots l_{m-1} l_{m+1} \dots l_{k+1}$ ):

$$\sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m x_{j_0 \dots j_{k-1} l_m} x_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} = 0, \quad (1.1)$$

onde, para cada conjunto de índices  $\{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ , é usada a convenção

$$x_{i_0 \dots i_k} = \begin{cases} (-1)^\sigma x_{i_{\sigma_0} \dots i_{\sigma_k}}, & \text{se existe uma permutação } \sigma \text{ tal que} \\ & i_{\sigma_0} < \dots < i_{\sigma_k}; \\ 0, & \text{se algum dos índices é repetido.} \end{cases}$$

Vejamos porquê. Em primeiro lugar, observemos que, se um ponto  $x \in \mathbb{P}^N$  satisfaz as correlações de Plücker, então, para quaisquer  $j_0, \dots, j_{k-1}, l_0, \dots, l_{k+1} \in \{0, \dots, n\}$  (independentemente da ordem), é válida a condição (1.1). Com efeito, se algum dos índices  $j_0, \dots, j_{k-1}$  está repetido, esta condição verifica-se imediatamente; caso contrário, podemos tomar uma permutação  $\sigma$  tal que  $j_{\sigma_0} < \dots < j_{\sigma_{k-1}}$ . Então

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m x_{j_0 \dots j_{k-1} l_m} x_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} = \\ & = (-1)^\sigma \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m x_{j_{\sigma_0} \dots j_{\sigma_{k-1}} l_m} x_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} = 0. \end{aligned}$$

Verifiquemos agora que as coordenadas de Plücker de qualquer  $k$ -plano satisfazem as correlações de Plücker. À semelhança do que fizemos anteriormente, dada uma matriz  $M$ , para cada sequência de índices  $(i_0, \dots, i_p)$ , utilizemos a notação  $M_{i_0 \dots i_p}$  para designar a matriz obtida a partir das colunas  $i_0, \dots, i_p$  de  $M$ .

Seja  $F \in \mathbb{G}(k, n)$ , seja  $(v_0, \dots, v_k)$  uma sua base e seja, tal como acima,  $A \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$  a matriz cujas linhas são as suas coordenadas em relação à base canónica. Tomemos  $j_0, \dots, j_{k-1}, l_0, \dots, l_{k+1} \in \{0, \dots, n\}$  tais que  $j_0 < \dots < j_{k-1}$ . Então, se designarmos por  $A_{j_0 \dots j_{k-1}}^{\hat{r}}$  a matriz que se obtém a partir da matriz  $A_{j_0 \dots j_{k-1}}$  suprimindo a linha  $r$ , isto é, a linha  $[v_{rj_0} \dots v_{rj_{k-1}}]$ , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m \left| A_{j_0 \dots j_{k-1} l_m} \right| \left| A_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} \right| = \\ & = \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m \left( \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} v_{rl_m} \left| A_{j_0 \dots j_{k-1}}^{\hat{r}} \right| \right) \left| A_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} \right| = \\ & = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \left| A_{j_0 \dots j_{k-1}}^{\hat{r}} \right| \left( \sum_{m=0}^{k+1} (-1)^m v_{rl_m} \left| A_{l_0 \dots \hat{l}_m \dots l_{k+1}} \right| \right) = \\ & = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \left| A_{j_0 \dots j_{k-1}}^{\hat{r}} \right| \begin{pmatrix} v_{rl_0} & \cdots & v_{rl_{k+1}} \\ v_{0l_0} & \cdots & v_{0l_{k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{kl_0} & \cdots & v_{kl_{k+1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na expressão entre parêntesis está um determinante com duas linhas iguais, logo nulo. Portanto as coordenadas de Plücker do subespaço  $F$  verificam (1.1).

Reciprocamente, tomemos um ponto  $x = [x_{0\dots k} : \dots : x_{n-k\dots n}] \in \mathbb{P}^N$  que verifique as correlações de Plücker. Sejam  $l_0 < \dots < l_k$  índices para os quais se tenha  $x_{l_0\dots l_k}$  não nulo. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_{l_0\dots l_k} = 1$ . Verifiquemos primeiro que todas as coordenadas de  $x$  dependem apenas das coordenadas que se podem escrever na forma  $x_{l_0\dots\hat{l}_\beta\dots l_k j}$ , com  $0 \leq j \leq n$  e  $0 \leq \beta \leq k$ . Seja  $x_{j_0\dots j_k}$  uma das coordenadas de  $x$  e seja  $s$  a cardinalidade do conjunto  $\{j_0, \dots, j_k\} \setminus \{l_0, \dots, l_k\}$ . Se  $s$  for zero ou um, não temos nada a mostrar. Caso  $s > 1$ , tomemos  $\beta \in \{0, \dots, k\}$  tal que  $j_\beta \in \{j_0, \dots, j_k\} \setminus \{l_0, \dots, l_k\}$ . A igualdade (1.1) permite-nos afirmar que

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_k l_m} x_{l_0\dots\hat{l}_m\dots l_k j_\beta} + (-1)^{k+1} x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_k j_\beta} x_{l_0\dots l_k} = 0,$$

donde

$$(-1)^{k+1} x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_k j_\beta} \cdot 1 = - \sum_{m=0}^k (-1)^m x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_k l_m} x_{l_0\dots\hat{l}_m\dots l_k j_\beta}.$$

Portanto

$$x_{j_0\dots j_k} = (-1)^{2k-\beta} \sum_{m=0}^k (-1)^m x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_k l_m} x_{l_0\dots\hat{l}_m\dots l_k j_\beta}.$$

Assim, vemos que a coordenada  $x_{j_0\dots j_k}$  depende das coordenadas da forma  $x_{j_0\dots\hat{j}_\beta\dots j_{k-1} l_m}$ , cujo conjunto de índices já tem apenas  $s - 1$  elementos não pertencentes ao conjunto  $\{l_0, \dots, l_k\}$  e das coordenadas da forma  $x_{l_0\dots\hat{l}_m\dots l_k j_\beta}$ , cujo conjunto de índices tem apenas um elemento não pertencente a  $\{l_0, \dots, l_k\}$ . Continuando este processo, vemos que qualquer coordenada depende apenas dos valores que se podem escrever na forma  $x_{l_0\dots\hat{l}_\beta\dots l_k j}$ .

Para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$  e para cada  $j \in \{0, \dots, n\}$ , definamos

$$v_{ij} := x_{l_0\dots l_{i-1} j l_{i+1}\dots l_k}. \quad (1.2)$$

Assim, o sistema composto pelos vectores  $v_i = (v_{i0}, \dots, v_{in})$  é linearmente independente, pois, para cada  $i, j \in \{0, \dots, k\}$ , temos

$$v_{il_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  o espaço gerado pelo sistema de vectores  $(v_0, \dots, v_k)$  e seja  $A = [v_{ij}] \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$ .

Para verificarmos que as coordenadas de Plücker de  $F$  correspondem ao ponto  $x$ , basta vermos o que se passa com as coordenadas do tipo  $x_{l_0 \dots \hat{l}_\beta \dots l_k j}$ , pois todas as outras se escrevem a partir destas. Com efeito, dados dois pontos quaisquer que satisfaçam as correlações de Plücker, se as suas coordenadas deste tipo coincidirem, todas as outras coincidirão. Ora, como a matriz  $A_{l_0 \dots l_{\beta-1} j l_{\beta+1} \dots l_k}$  só difere da identidade numa coluna, podemos facilmente calcular o seu determinante, portanto

$$\begin{aligned} |A_{l_0 \dots l_{\beta-1} j l_{\beta+1} \dots l_k}| &= (-1)^{k-\beta} |A_{l_0 \dots l_{\beta-1} j l_{\beta+1} \dots l_k}| = \\ &= (-1)^{k-\beta} v_{\beta j} = \\ &= (-1)^{k-\beta} x_{l_0 \dots l_{\beta-1} j l_{\beta+1} \dots l_k} = \\ &= x_{l_0 \dots \hat{l}_\beta \dots l_k j}. \end{aligned}$$

Logo, a imagem de  $F$  por esta aplicação é o ponto  $x$ , como desejávamos.

Para concluirmos que esta aplicação é um mergulho, tomemos  $G \in \mathbb{G}(k, n)$  tal que a sua imagem pela aplicação de Plücker seja também o ponto  $x$ . Verifiquemos que  $G = F$ . Seja  $(w_0, \dots, w_k)$  uma base de  $G$  e seja  $B \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$  a matriz cujas componentes são as suas coordenadas em relação à base canónica. Então, como  $x_{l_0 \dots l_k} = 1$ , temos necessariamente  $|B_{l_0 \dots l_k}| \neq 0$ . Seja  $B' = B_{l_0 \dots l_k}^{-1} B$  e seja  $(w'_0, \dots, w'_k)$  a base de  $G$  correspondente às linhas de  $B'$ . Então, as colunas  $l_0, \dots, l_k$  de  $B'$  são as colunas da matriz identidade. Logo  $|B'_{l_0 \dots l_k}| = 1 = x_{l_0 \dots l_k}$  e, como

$$\left[ |B'_{0 \dots k}| : \dots : |B'_{n-k \dots n}| \right] = [x_{0 \dots k} : \dots : x_{n-k \dots n}],$$

temos, para quaisquer  $j_0, \dots, j_k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $|B'_{j_0 \dots j_k}| = x_{j_0 \dots j_k}$ . Sejam  $i \in \{0, \dots, k\}$  e  $j \in \{0, \dots, n\}$  quaisquer. Para cada  $\eta \in \{0, \dots, k\}$  definimos:

$$j_\eta = \begin{cases} l_\eta, & \text{se } \eta \neq i; \\ j, & \text{se } \eta = i. \end{cases}$$

Então, a matriz  $B'_{j_0 \dots j_k}$  só difere da matriz identidade na coluna  $i$ . Assim, temos

$$w'_{ij} = |B'_{j_0 \dots j_k}| = x_{j_0 \dots j_k} = x_{l_0 \dots l_{i-1} j l_{i+1} \dots l_k} = v_{ij}.$$

Logo  $(w'_0, \dots, w'_k) = (v_0, \dots, v_k)$ , e portanto  $G = F$ .

O mergulho de Plücker permite-nos identificar o grassmanniano  $\mathbb{G}(k, n)$  com a subvariedade algébrica de  $\mathbb{P}^N$  definida pelas correlações de Plücker. A esta subvariedade chamaremos *variedade de Grassmann* e usaremos a notação  $G_{k,n}$  para a designar. Dizemos que um ponto  $x \in G_{k,n}$  representa um subespaço  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  se  $x$  for a imagem de  $F$  pelo mergulho de Plücker.

O que mostrámos permite-nos ainda determinar a dimensão de  $G_{k,n}$ . Com efeito, pelo que vimos acima, o conjunto

$$G_{l_0 \dots l_k} := \{x \in G_{k,n} : x_{l_0 \dots l_k} \neq 0\},$$

que é aberto denso em  $G_{k,n}$ , é isomorfo ao conjunto das matrizes  $A \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{K})$  tais que  $A_{l_0 \dots l_k}$  é a matriz identidade. Ora, este conjunto é isomorfo a  $\mathcal{M}_{(k+1) \times (n-k)}(\mathbb{K})$ , logo tem dimensão  $(k+1) \times (n-k)$ , portanto é esta a dimensão de  $G_{k,n}$ .

**Outra descrição do mergulho de Plücker.** Outra forma de descrever o mergulho de Plücker, que pode ser encontrada em [GH94], consiste em associar a cada elemento  $F \in \mathbb{G}(k, n)$ , o produto

$$v_0 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge^{k+1}(\mathbb{K}^{n+1}),$$

onde  $(v_0, \dots, v_k)$  é uma base de  $F$ . Como uma outra base de  $F$  daria origem a um múltiplo deste produto, fica definida uma aplicação

$$\mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^{k+1}(\mathbb{K}^{n+1})\right).$$

### Intersecção de dois subespaços projectivos de $\mathbb{P}^n$

Dados dois subespaços  $F, G \subseteq \mathbb{P}^n$ , a sua intersecção é não vazia sempre que  $\dim F + \dim G \geq n$ . O resultado que se segue dá-nos uma condição necessária e suficiente, expressa nas coordenadas de Plücker de  $F$  e  $G$ , para que estes dois subespaços se intersectem, caso  $\dim F + \dim G < n$ .

**Lema 1.1** *Sejam  $F \in \mathbb{G}(k_1, n)$  e  $G \in \mathbb{G}(k_2, n)$ , com  $k_1$  e  $k_2$  inteiros não negativos tais que  $k_1 + k_2 < n$ , e  $[f_{0 \dots k_1} : \dots : f_{n-k_1 \dots n}]$  e  $[g_{0 \dots k_2} : \dots : g_{n-k_2 \dots n}]$  as respectivas coordenadas de Plücker. Então os subespaços  $F$  e  $G$  intersectam-se se e só se, para cada  $0 \leq m_1 < \dots < m_{k_1+k_2+2} \leq n$ , for nula a expressão*

$$\sum (-1)^{l_0 + \dots + l_{k_1} + 1 + \dots + k_1} f_{l_0 \dots l_{k_1}} g_{j_0 \dots j_{k_2}},$$

onde a soma é tomada no conjunto de todas as sequências possíveis de inteiros  $l_0 < \dots < l_{k_1}$  e  $j_0 < \dots < j_{k_2}$  tais que

$$\{l_0, \dots, l_{k_1}, j_0, \dots, j_{k_2}\} = \{m_1, \dots, m_{k_1+k_2+2}\}.$$

*Demonstração.* Sejam  $(v_0, \dots, v_{k_1})$  e  $(w_0, \dots, w_{k_2})$  as bases de  $F$  e  $G$ , respectivamente, formadas como em (1.2). Estes espaços intersectam-se se e só se a matriz

$$\begin{bmatrix} v_{00} & \cdots & v_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_1 0} & \cdots & v_{k_1 n} \\ w_{00} & \cdots & w_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k_2 0} & \cdots & w_{k_2 n} \end{bmatrix}$$

não tiver característica máxima. Ora, isto acontece se e só se forem nulos todos os determinantes

$$\begin{vmatrix} v_{0m_1} & \cdots & v_{0m_{k_1+k_2+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_1 m_1} & \cdots & v_{k_1 m_{k_1+k_2+2}} \\ w_{0m_1} & \cdots & w_{0m_{k_1+k_2+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k_2 m_1} & \cdots & w_{k_2 m_{k_1+k_2+2}} \end{vmatrix},$$

com  $0 \leq m_1 < \cdots < m_{k_1+k_2+2} \leq n$ .

Assim sendo, se calcularmos aquele determinante através dos menores que se obtêm a partir das  $k_1 + 1$  primeiras linhas (uma generalização do teorema de Laplace que se pode encontrar em livros elementares de álgebra linear, como [MPM97], ou em livros mais avançados de geometria algébrica, como [HP53]), chegamos a

$$\sum (-1)^{l_0 + \cdots + l_{k_1} + 1 + \cdots + k_1} \begin{vmatrix} v_{0l_0} & \cdots & v_{0l_{k_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_1 l_0} & \cdots & v_{k_1 l_{k_1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_{0j_0} & \cdots & w_{0j_{k_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k_2 j_0} & \cdots & w_{k_2 j_{k_2}} \end{vmatrix},$$

onde as sequências  $l_0 < \cdots < l_{k_1}$  e  $j_0 < \cdots < j_{k_2}$  são como definimos no enunciado.

Mas as bases  $(v_0, \dots, v_{k_1})$  e  $(w_0, \dots, w_{k_2})$  foram escolhidas de modo a que

$$\begin{vmatrix} v_{0l_0} & \cdots & v_{0l_{k_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_1 l_0} & \cdots & v_{k_1 l_{k_1}} \end{vmatrix} = f_{l_0 \cdots l_{k_1}} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} w_{0j_0} & \cdots & w_{0j_{k_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k_2 j_0} & \cdots & w_{k_2 j_{k_2}} \end{vmatrix} = g_{j_0 \cdots j_{k_2}}.$$

Logo  $F$  e  $G$  intersectam-se se e só se forem nulas as somas

$$\sum (-1)^{l_0 + \cdots + l_{k_1} + 1 + \cdots + k_1} f_{l_0 \cdots l_{k_1}} g_{j_0 \cdots j_{k_2}},$$

como queríamos.  $\square$





## CAPÍTULO 2

# Cálculo de Schubert

As intersecções entre subespaços do espaço projectivo complexo  $\mathbb{P}^n$  podem ser estudadas de forma mais abrangente do que a permitida pelo lema 1.1. São exemplo disso os resultados apresentados nas duas primeiras secções deste capítulo, que são baseadas em [KL72]. Daqui em diante, consideraremos apenas espaços projectivos sobre o corpo dos complexos.

### 2.1 Condições de Schubert

Sejam  $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k$  subespaços de  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que um elemento  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  satisfaz a condição de Schubert associada a esta sequência de subespaços se, para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\dim(G_j \cap F) \geq j$ . Se  $x \in G_{k,n}$  representa o subespaço  $F$ , dizemos também que  $x$  satisfaz aquela condição de Schubert. Para o subconjunto de  $G_{k,n}$  dos elementos que satisfazem esta condição, usamos a notação  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$ . Estudaremos em seguida este conjunto, começando por um caso particular.

**Proposição 2.1** *Sejam  $0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n$  inteiros e, para cada  $l \in \{0, \dots, k\}$ , consideremos o subespaço de  $\mathbb{P}^n$*

$$G_l := \{[u_0 : \dots : u_{a_l} : 0 : \dots : 0] : [u_0 : \dots : u_{a_l}] \in \mathbb{P}^{a_l}\}.$$

*Então  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  é o conjunto dos pontos  $[x_{0\dots k} : \dots : x_{n-k\dots n}] \in G_{k,n}$  tais que  $x_{j_0\dots j_k} = 0$  sempre que, para algum  $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ ,  $j_\alpha > a_\alpha$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in \Omega(G_0, \dots, G_k)$  e seja  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  o subespaço representado por  $x$ . Seja  $(v_0, \dots, v_k)$  uma base de  $F$  tal que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $v_i \in G_i \cap F$ . Seja  $A \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$  a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vectores  $v_0, \dots, v_k$  em relação à base canónica.

Sejam  $0 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n$  tais que, para algum  $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ ,  $j_\alpha > a_\alpha$ . Como, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $v_i \in G_i$ , temos  $v_i = (v_{i0}, \dots, v_{ia_i}, 0, \dots, 0)$ . Em particular, se  $m < \alpha$ , temos  $v_{mj_\alpha} = 0$  e, portanto,  $A_{j_0 \dots j_k}$  é a matriz

$$\begin{bmatrix} v_{0j_0} & \cdots & v_{0j_{\alpha-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\alpha j_0} & \cdots & v_{\alpha j_{\alpha-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{(\alpha+1)j_0} & \cdots & v_{(\alpha+1)j_{\alpha-1}} & v_{(\alpha+1)j_\alpha} & \cdots & v_{(\alpha+1)j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{kj_0} & \cdots & v_{kj_{\alpha-1}} & v_{kj_\alpha} & \cdots & v_{kj_k} \end{bmatrix}.$$

Assim, as primeiras  $\alpha + 1$  linhas desta matriz são linearmente dependentes, logo temos  $|A_{j_0 \dots j_k}| = 0$ , como queríamos.

Consideremos agora um ponto  $x \in \mathbb{P}^N$  para o qual se tenha  $x_{j_0 \dots j_k} = 0$  sempre que, para algum  $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ ,  $j_\alpha > a_\alpha$ .

Consideremos ainda todos os conjuntos de índices  $\{l_0, \dots, l_k\}$  para os quais  $x_{l_0 \dots l_k} \neq 0$ . Destes conjuntos, escolhamos um tal que  $\sum_{\beta=0}^k l_\beta$  seja o máximo possível. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_{l_0 \dots l_k} = 1$ . Vimos na secção 1.2 que o ponto  $x$  representa o espaço  $F$  gerado pelos vectores  $v_i = (v_{i0}, \dots, v_{in})$ , onde  $v_{ij} = x_{l_0 \dots l_{i-1} j l_{i+1} \dots l_k}$ . Para verificarmos que o ponto  $x$  está em  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$ , basta-nos ver que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\dim(G_i \cap F) \geq i$ .

Seja  $i \in \{0, \dots, k\}$  e seja  $j > a_i$ . Como  $x_{l_0 \dots l_k}$  é diferente de zero, temos  $l_i \leq a_i$ , donde  $l_i < j$ . Assim,

$$\sum_{\beta=0}^k l_\beta < \sum_{\beta=0}^{i-1} l_\beta + j + \sum_{\beta=i+1}^k l_\beta.$$

Ora, se  $x_{l_0 \dots l_{i-1} j l_{i+1} \dots l_k}$  fosse não nulo teríamos uma contradição, pois supusemos que  $\{l_0, \dots, l_k\}$  seria um conjunto de índices para o qual  $\sum_{\beta=0}^k l_\beta$  fosse o máximo tal que  $x_{l_0 \dots l_k} \neq 0$ . Assim, temos  $x_{l_0 \dots l_{i-1} j l_{i+1} \dots l_k} = 0$ , donde  $v_{ij} = 0$ . Assim,  $v_0, \dots, v_i \in G_i \cap F$ , logo  $\dim(G_i \cap F) \geq i$ , como queríamos.  $\square$

Observemos que esta proposição diz-nos que, para os subespaços  $G_0, \dots, G_k$  indicados, o conjunto  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  se obtém como corte de  $G_{k,n}$  por um subespaço de  $\mathbb{P}^N$ .

**Proposição 2.2** *Sejam  $G_0 \subset \dots \subset G_k$  e  $H_0 \subset \dots \subset H_k$  subespaços de  $\mathbb{P}^n$  tais que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\dim(G_i) = \dim(H_i)$ . Então existe uma transformação projectiva de  $\mathbb{P}^N$  que deixa  $G_{k,n}$  invariante e leva  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  para  $\Omega(H_0, \dots, H_k)$ .*

*Demonstração.* Dado que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\dim(G_i) = \dim(H_i)$ , existe uma transformação projectiva  $\psi$  de  $\mathbb{P}^n$  em si próprio tal que o transformado de cada  $G_i$  é  $H_i$ .

Se  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  é um subespaço que satisfaz a condição de Schubert associada aos subespaços  $G_0, \dots, G_k$ , temos, para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,

$$\dim(G_j \cap F) \geq j.$$

Assim, temos também

$$\dim(H_j \cap \psi[F]) \geq j,$$

e, portanto,  $\psi[F]$  satisfaz a condição de Schubert associada a  $H_0, \dots, H_k$ . Consideremos a aplicação  $\tilde{\psi} : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{G}(k, n)$  que faz corresponder a cada subespaço  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  o seu transformado  $\psi[F]$ .

Mostremos agora que existe uma projectividade  $\hat{\psi} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$  tal que  $\hat{\psi} \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{\psi}$ , onde  $\varphi : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^N$  é o mergulho de Plücker.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(k, n) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{G}(k, n) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{P}^N & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Seja  $S$  a matriz que representa  $\psi$  em relação à base canónica de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Para cada  $i_0, \dots, i_k, j_0, \dots, j_k \in \{0, \dots, n\}$ , com  $i_0 < \dots < i_k$  e  $j_0 < \dots < j_k$ , seja  $S_{j_0 \dots j_k}^{i_0 \dots i_k}$  a matriz obtida a partir das entradas comuns às linhas  $i_0, \dots, i_k$  e às colunas  $j_0, \dots, j_k$  de  $S$ . Então uns cálculos bastante maçadores (ver apêndice) mostram-nos que a aplicação  $\hat{\psi} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$  definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} |S_{0 \dots k}^{0 \dots k}| & \dots & |S_{n-k \dots n}^{0 \dots k}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |S_{0 \dots k}^{n-k \dots n}| & \dots & |S_{n-k \dots n}^{n-k \dots n}| \end{bmatrix}$$

é invertível e satisfaz as condições requeridas.

Como o mergulho de Plücker é uma bijecção entre  $\mathbb{G}(k, n)$  e  $G_{k,n}$ , temos

$$\hat{\psi}[G_{k,n}] = (\hat{\psi} \circ \varphi)[\mathbb{G}(k, n)] = (\varphi \circ \tilde{\psi})[\mathbb{G}(k, n)] = \varphi[\mathbb{G}(k, n)] = G_{k,n}$$

e, portanto,  $\hat{\psi}$  deixa  $G_{k,n}$  invariante. Mais, se

$$x = [x_{0 \dots k} : \dots : x_{n-k \dots n}] \in \Omega(G_0, \dots, G_k)$$

e se  $F$  for o subespaço de  $\mathbb{P}^n$  representado por  $x$ , então  $F$  satisfaz a condição de Schubert associada aos subespaços  $G_0, \dots, G_k$  e, pelo que vimos acima,  $\psi[F]$  satisfaz a condição de Schubert associada a  $H_0, \dots, H_k$ , donde  $\hat{\psi}(x) \in \Omega(H_0, \dots, H_k)$ . Portanto,  $\hat{\psi}$  leva  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  para  $\Omega(H_0, \dots, H_k)$ .  $\square$

**Corolário 2.3** *Sejam  $H_0 \subset \dots \subset H_k$  subespaços de  $\mathbb{P}^n$ . Então existe um subespaço  $L$  de  $\mathbb{P}^N$  tal que*

$$\Omega(H_0, \dots, H_k) = G_{k,n} \cap L.$$

*Este subespaço é um hiperplano se e só se  $\dim(H_0) = n - k - 1$  e, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\dim(H_j) = n - k + j$ .*

*Demonstração.* Seja, para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $a_j = \dim(H_j)$  e consideremos, à semelhança da proposição 2.1, o subespaço de  $\mathbb{P}^n$

$$G_j := \{ [u_0 : \dots : u_{a_j} : 0 : \dots : 0] : [u_0 : \dots : u_{a_j}] \in \mathbb{P}^{a_j} \}.$$

Assim, temos  $\dim(G_j) = a_j$  e a proposição anterior garante-nos a existência de uma projectividade  $\hat{\psi}$  de  $\mathbb{P}^N$  tal que, para cada ponto  $x \in G_{k,n}$ ,  $x \in \Omega(H_0, \dots, H_k)$  se e só se  $\hat{\psi}(x) \in \Omega(G_0, \dots, G_k)$ .

Pela proposição 2.1, tomando o subespaço de  $\mathbb{P}^N$

$$L' = \mathbb{V}(\{X_{j_0 \dots j_k} : \exists \alpha \in \{0, \dots, k\} (j_\alpha > a_\alpha)\}),$$

temos que  $\Omega(G_0, \dots, G_k) = G_{k,n} \cap L'$ . Portanto, fazendo  $L = \hat{\psi}^{-1}(L')$ , temos  $\Omega(H_0, \dots, H_k) = G_{k,n} \cap L$ , como queríamos.

Finalmente, é fácil reconhecer que  $L'$  é um hiperplano se e só se  $\dim(H_0) = n - k - 1$  e, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\dim(H_j) = n - k + j$ , portanto o mesmo se passa com  $L$ .  $\square$

Este corolário diz-nos, em particular, que cada conjunto  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  é uma subvariedade de  $G_{k,n}$ , que passaremos a designar por *variedade de Schubert*.

## 2.2 Cálculo de Schubert

Como  $G_{k,n}$  é uma subvariedade complexa de  $\mathbb{P}^N$  de dimensão  $(k+1)(n-k)$ , o grupo de cohomologia  $H^i(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  é nulo para  $i > 2(k+1)(n-k)$  e a soma directa

$$H^*(G_{k,n}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{2(k+1)(n-k)} H^i(G_{k,n}, \mathbb{Z})$$

é um anel graduado.

Além disso, como a variedade  $G_{k,n}$  é orientada, há um isomorfismo natural entre grupos de cohomologia de dimensão complementar. Em particular,  $H^{2(k+1)(n-k)}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  é isomorfo a  $H^0(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  e este, por sua vez, é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , pois  $G_{k,n}$  é conexo. Ao valor de um elemento  $u \in H^{2(k+1)(n-k)}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  em  $\mathbb{Z}$  por este isomorfismo chamamos *grau* de  $u$ .

A cada subvariedade de  $G_{k,n}$  podemos associar um elemento de  $H^{2(k+1)(n-k)}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$ , isto é, uma classe de cohomologia. Às classes de cohomologia associadas a variedades de Schubert chamamos *ciclos de Schubert*.

O ciclo de Schubert associado a cada  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  depende apenas das dimensões dos subespaços  $G_0, \dots, G_k$ . Para vermos isto, reparemos que o sistema das subvariedades  $\Omega(H_0, \dots, H_k)$  tais que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\dim(G_i) = \dim(H_i)$  é contínuo. Com efeito, este sistema é parametrizado pelas transformações projectivas de  $\mathbb{P}^N$  referidas na demonstração da proposição 2.2. Estas transformações são induzidas pelas matrizes invertíveis de  $\mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$ , que podem ser escolhidas de modo a pertencerem todas a uma mesma componente conexa.

Assim, quando quisermos referir-nos ao ciclo de Schubert associado à variedade de Schubert  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$ , podemos usar a notação  $\Omega(a_0, \dots, a_k)$ , onde, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $a_i = \dim(G_i)$ .

**Teorema 2.4 (Teorema da base)**  *$H^*(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  é um grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos ciclos de Schubert. Mais: cada grupo de cohomologia de dimensão par  $H^{2p}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  é um grupo abeliano livre gerado pelos ciclos de Schubert  $\Omega(a_0, \dots, a_k)$  tais que  $(k+1)(n-k) - \sum_{i=0}^k (a_i - i) = p$ ; os grupos de cohomologia de dimensão ímpar são nulos.*

Para compreendermos a segunda parte deste teorema, observemos que a classe de cohomologia de uma subvariedade irreduzível  $X$  de  $G_{k,n}$  está em  $H^{2p}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$  se a dimensão de  $X$  for  $(k+1)(n-k) - p$ .

Consideremos uma variedade de Schubert  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  e suponhamos, sem perda de generalidade, que existem inteiros  $0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n$  tais que, para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $G_i$  é o conjunto dos pontos

$$[x_0 : \dots : x_{a_i} : 0 : \dots : 0].$$

Consideremos o espaço  $S$  das matrizes  $B \in \mathcal{M}_{(k+1) \times (n+1)}(\mathbb{C})$  cujas entradas  $b_{ij}$  são nulas para  $j > a_i$ . Seja  $S_0$  o aberto de  $S$  constituído pelas matrizes de característica  $k+1$  ( $S_0$  é aberto em  $S$  tanto para a topologia usual como para a de Zariski). Como vimos na demonstração da proposição 2.1, o mergulho de Plücker induz uma aplicação sobrejectiva  $\pi : S_0 \rightarrow \Omega(G_0, \dots, G_k)$ .

Como  $S$  é um espaço afim, é uma variedade irredutível e, portanto,  $S_0$  também o é. Assim,  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  é uma variedade irredutível.

Seja  $S_1$  o subconjunto de  $S_0$  constituído pelas matrizes cujas  $k + 1$  colunas  $a_0, \dots, a_k$  formam a matriz identidade. Então  $\pi(S_1)$  é o aberto de  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$  formado pelos pontos  $[x_{0\dots k} : \dots : x_{n-k\dots n}]$  tais que  $x_{a_0\dots a_k} \neq 0$ . Como  $\pi$  induz um isomorfismo analítico de  $S_1$  em  $\pi(S_1)$  e  $S_1$  é um espaço afim de dimensão  $\sum_{i=0}^k (a_i - i)$ , é também esta a dimensão de  $\Omega(G_0, \dots, G_k)$ .

**Proposição 2.5** *O conjunto dos ciclos de Schubert  $\Omega(a_0, \dots, a_k)$ , gerador do grupo  $H^{2p}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$ , e o conjunto dos ciclos de Schubert  $\Omega(n - a_k, \dots, n - a_0)$ , gerador do grupo  $H^{2[(k+1)(n-k)-p]}(G_{k,n}, \mathbb{Z})$ , são duais com respeito à dualidade de Poincaré.*

*Demonstração.* O que esta proposição diz é que, dados  $0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n$  e  $0 \leq b_0 < \dots < b_k \leq n$ , com

$$\sum_{j=0}^k (a_j - j) = (k + 1)(n - k) - p \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^k (b_j - j) = p,$$

temos

$$\Omega(a_0, \dots, a_k) \cdot \Omega(b_0, \dots, b_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } \forall j \in \{0, \dots, k\}, a_j + b_{k-j} = n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam  $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k$  como acima e sejam  $A_0 \subset \dots \subset A_k$  e  $B_0 \subset \dots \subset B_k$  subespaços de  $\mathbb{P}^n$  de dimensões  $a_0, \dots, a_k$  e  $b_0, \dots, b_k$ , respectivamente. Suponhamos que estes subespaços são escolhidos genericamente de tal forma que, para cada  $j, l \in \{0, \dots, k\}$ , as intersecções  $A_j \cap B_l$  têm dimensão mínima.

Suponhamos que, para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ , temos  $a_j + b_{k-j} = n$ . Então cada subespaço  $A_j$  intersecta  $B_{k-j}$  exactamente num ponto  $p_j$ . Verifiquemos que os pontos  $p_0, \dots, p_k$  assim determinados não pertencem a um mesmo  $(k - 1)$ -plano. Observemos, em primeiro lugar, que a intersecção  $A_{j-1} \cap B_{k-j}$  é vazia. Isto acontece porque, como  $A_{j-1} \subset A_j$ , temos  $a_{j-1} < a_j$ , donde  $a_{j-1} + b_{k-j} < n$ .

Se os pontos  $p_0, \dots, p_k$  pertencessem a um mesmo  $(k - 1)$ -plano, teríamos que algum  $p_j$  seria combinação linear dos restantes. Podemos escolher o índice  $j$  mais elevado nestas condições e, então, temos que  $p_j$  é combinação linear de  $p_0, \dots, p_{j-1}$ . Assim, teríamos  $p_j \in A_{j-1}$ , donde  $p_j \in A_{j-1} \cap B_{k-j}$ , o que não é possível.

Ora, um subespaço  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  que satisfaça as condições de Schubert associadas a  $A_0, \dots, A_k$  e a  $B_0, \dots, B_k$  simultaneamente tem de conter os

pontos  $p_0, \dots, p_k$ , pois, para cada  $j \in \{0, \dots, k\}$ , temos  $\dim(A_j \cap F) \geq j$  e  $\dim(B_{k-j} \cap F) \geq k - j$ , donde os espaços  $A_j \cap F$  e  $B_{k-j} \cap F$  intersectam-se (necessariamente em  $p_j$ ). Assim, o subespaço  $F$  fica determinado pelos pontos  $p_0, \dots, p_k$ , portanto existe um único ponto em  $\Omega(A_0, \dots, A_k) \cap \Omega(B_0, \dots, B_k)$  e podemos concluir que

$$\Omega(a_0, \dots, a_k) \cdot \Omega(b_0, \dots, b_k) = 1.$$

Suponhamos agora que existe  $j \in \{0, \dots, k\}$  tal que  $a_j + b_{k-j} < n$ . Então  $A_j \cap B_{k-j} = \emptyset$  e não pode existir nenhum subespaço  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  que satisfaça aquelas condições de Schubert, pois, como anteriormente,  $A_j \cap F$  e  $B_{k-j} \cap F$  teriam de se encontrar pelo menos num ponto. Finalmente, suponhamos que existe  $j \in \{0, \dots, k\}$  tal que  $a_j + b_{k-j} > n$ . Então, como

$$\sum_{m=0}^k (a_m - m) + \sum_{m=0}^k (b_m - m) = (k+1)(n-k),$$

existe necessariamente  $l \in \{0, \dots, k\}$  tal que  $a_l + b_{k-l} < n$ , o que nos deixa no caso anterior. Assim, se para algum  $j \in \{0, \dots, k\}$ , tivermos  $a_l + b_{k-l} \neq n$ , o produto  $\Omega(a_0, \dots, a_k) \cdot \Omega(b_0, \dots, b_k)$  é nulo.  $\square$

A terminar esta secção, apresentaremos dois teoremas do cálculo de Schubert, cujas demonstrações se podem encontrar em [HP53]. Para estes teoremas, usaremos a notação

$$\sigma(h) = \begin{cases} \Omega(h, n-k+1, \dots, n), & \text{se } h \in \{0, \dots, n-k\}; \\ 0, & \text{se } h \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n-k\}. \end{cases}$$

**Teorema 2.6 (“Fórmula do determinante”)** *Para quaisquer inteiros*

$$0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n,$$

*temos:*

$$\Omega(a_0, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} \sigma(a_0) & \cdots & \sigma(a_0 - k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(a_k) & \cdots & \sigma(a_k - k) \end{vmatrix}.$$

**Teorema 2.7 (Fórmula de Pieri)** *Para quaisquer inteiros*

$$0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n$$

*e para qualquer  $h \in \{0, \dots, n-k\}$ , temos:*

$$\Omega(a_0, \dots, a_k) \cdot \sigma(h) = \sum \Omega(b_0, \dots, b_k)$$

onde o somatório abrange todos os possíveis  $b_0, \dots, b_k$  tais que

$$0 \leq b_0 \leq a_0 < b_1 \leq a_1 < \dots < b_k \leq a_k \quad e \quad \sum_{i=0}^k b_i = \sum_{i=0}^k a_i - (n - k - h).$$

Nas secções seguintes, faremos a descrição de alguns exemplos de grassmannianos e de problemas que podem ser resolvidos com a ajuda do cálculo de Schubert.

## 2.3 As rectas de $\mathbb{P}^3$

Para cada natural  $n$ , o grassmanniano  $\mathbb{G}(0, n)$  é o próprio espaço projectivo  $\mathbb{P}^n$  e o grassmanniano  $\mathbb{G}(n, n)$  é o conjunto singular  $\{\mathbb{P}^n\}$ . Se  $n \geq 1$ , o grassmanniano  $\mathbb{G}(n-1, n)$  é o conjunto  $\mathbb{P}^{n*}$ , dos hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$ , que é isomorfo a  $\mathbb{P}^n$ . Se todos os grassmannianos fossem conjuntos singulares ou isomorfos a espaços projectivos, a sua definição não teria qualquer pertinência. Não é o caso, e o exemplo mais simples de um grassmanniano diferente destes é  $\mathbb{G}(1, 3)$ , o conjunto das rectas de  $\mathbb{P}^3$ .

Pelo que vimos anteriormente, este conjunto pode ser mergulhado em  $\mathbb{P}^5$  e a sua imagem,  $G_{1,3}$ , é a variedade definida pelo polinómio

$$g := X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12}. \quad (2.1)$$

Com vista a conhecer melhor esta variedade, e aproveitando uma descrição de [SK98], tentaremos caracterizar as suas intersecções com subespaços de  $\mathbb{P}^5$ . Para cada ponto  $x \in G_{1,3}$ , utilizemos a notação  $r_x$  para a recta de  $\mathbb{P}^3$  representada por  $x$ .

Observemos em primeiro lugar que, pelo lema 1.1, se  $i$  for o polinómio

$$i := X_{01}Y_{23} - X_{02}Y_{13} + X_{03}Y_{12} + X_{12}Y_{03} - X_{13}Y_{02} + X_{23}Y_{01},$$

então, dados dois pontos  $a, b \in G_{1,3}$ , as rectas  $r_a$  e  $r_b$  intersectam-se se e só se  $i(a, b) = 0$ .

### Intersecção de uma recta com $G_{1,3}$

Como  $G_{1,3}$  é uma hipersuperfície quádrlica, a sua intersecção com uma recta  $t$  será um ou dois pontos ou toda a recta. Vejamos quais são as rectas que estão contidas em  $G_{1,3}$ . Suponhamos que  $t \subset G_{1,3}$  e sejam

$$a = [a_{01} : a_{02} : a_{03} : a_{12} : a_{13} : a_{23}] \quad e \quad b = [b_{01} : b_{02} : b_{03} : b_{12} : b_{13} : b_{23}]$$



dois pontos distintos de  $t$ . Então, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , temos  $g(\alpha a + \beta b) = 0$ , donde

$$\alpha^2 g(a) + \alpha\beta i(a, b) + \beta^2 g(b) = 0.$$

Como  $a, b \in G_{1,3}$ , temos  $g(a) = g(b) = 0$ . Logo,  $i(a, b) = 0$ , isto é, as rectas  $r_a$  e  $r_b$  são concorrentes num ponto  $P_{ab} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$  e, conseqüentemente, estão contidas num mesmo plano  $\pi_{ab}$ .

Seja  $x \in t$  e sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tais que  $x = \alpha a + \beta b$ . Se um ponto  $c \in G_{1,3}$  representar uma recta  $r_c$  que intersecta ambas as rectas  $r_a$  e  $r_b$ , temos

$$i(x, c) = i(\alpha a + \beta b, c) = \alpha i(a, c) + \beta i(b, c) = 0,$$

donde  $r_c$  intersecta  $r_x$ . Ora, se escolhermos  $c$  de modo a que a recta  $r_c$  esteja contida em  $\pi_{ab}$ , temos que  $r_c$  intersecta obrigatoriamente ambas as rectas  $r_a$  e  $r_b$ , donde intersecta também  $r_x$ . Assim, a recta  $r_x$  intersecta todas as rectas que estão contidas em  $\pi_{ab}$ , portanto também  $r_x$  está contida neste plano. Por outro lado, se escolhermos  $c$  de modo a que a recta  $r_c$  passe por  $P_{ab}$  e não esteja contida em  $\pi_{ab}$ , temos também que  $r_c$  intersecta ambas as rectas  $r_a$  e  $r_b$ . Assim, a recta  $r_x$  intersecta  $r_c$  e esta intersecção tem de ocorrer no único ponto de  $r_c$  que está em  $\pi_{ab}$ , o ponto  $P_{ab}$ . Logo, todas as rectas cujas coordenadas de Plücker estão em  $t$  estão contidas em  $\pi_{ab}$  e passam por  $P_{ab}$ .

Reciprocamente, tomemos  $x \in G_{1,3}$  tal que a recta  $r_x$  está contida em  $\pi_{ab}$  e passa por  $P_{ab}$ . Mostremos que  $x \in t$ . Podemos escolher pontos  $N \in r_a$  e  $Q \in r_b$ , com  $N = [n_0 : n_1 : n_2 : n_3]$  e  $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ , tais que, para cada  $j_0, j_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ , com  $j_0 < j_1$ ,

$$a_{j_0 j_1} = \begin{vmatrix} n_{j_0} & n_{j_1} \\ p_{j_0} & p_{j_1} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad b_{j_0 j_1} = \begin{vmatrix} q_{j_0} & q_{j_1} \\ p_{j_0} & p_{j_1} \end{vmatrix}.$$

Como a recta  $r_x$  está contida em  $\pi_{ab}$ , intersecta a recta  $NQ$  num ponto  $M = [m_0 : m_1 : m_2 : m_3]$ . Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tais que  $M = \alpha N + \beta Q$ . Ora, a menos de multiplicação por um escalar, as coordenadas homogêneas de  $x$  são, para cada  $j_0, j_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ , com  $j_0 < j_1$ ,

$$\begin{aligned} x_{j_0 j_1} &= m_{j_0} p_{j_1} - m_{j_1} p_{j_0} = \\ &= (\alpha n_{j_0} + \beta q_{j_0}) p_{j_1} - (\alpha n_{j_1} + \beta q_{j_1}) p_{j_0} = \\ &= \alpha (n_{j_0} p_{j_1} - n_{j_1} p_{j_0}) + \beta (q_{j_0} p_{j_1} - q_{j_1} p_{j_0}) = \\ &= \alpha a_{j_0 j_1} + \beta b_{j_0 j_1}. \end{aligned}$$

Logo, temos  $x \in t$ .

Assim, as rectas cujas coordenadas de Plücker estão em  $t$  são exactamente as que estão contidas em  $\pi_{ab}$  e passam por  $P_{ab}$ . Isto significa que todas as rectas contidas em  $G_{1,3}$  são conjuntos do tipo

$$\omega(P, \pi) := \{x \in G_{1,3} : P \in r_x \subset \pi\},$$

para algum plano  $\pi \subset \mathbb{P}^3$  e algum ponto  $P \in \pi$ . Ora, este conjunto é precisamente a variedade de Schubert  $\Omega(P, \pi)$ , como definida anteriormente. Reciprocamente, todos estes conjuntos são rectas de  $\mathbb{P}^5$ : se tomarmos dois pontos  $a$  e  $b$  num destes conjuntos, vemos que as rectas  $r_a$  e  $r_b$  se intersectam e, portanto,  $i(a, b) = 0$ . Logo, pelo que vimos acima, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , a recta  $r_{\alpha a + \beta b}$  passa por  $P$  e está contida no plano  $\pi$ . Mais, qualquer ponto  $c$  tal que  $P \in r_c \subset \pi$  está na recta que passa por  $a$  e  $b$ .

A conjuntos de rectas parametrizáveis por uma recta de um espaço projectivo chamamos *feixes de rectas*. Num feixe do tipo  $\{r \in \mathbb{G}(1, 3) : P \in r \subset \pi\}$ , onde  $\pi$  é um plano de  $\mathbb{P}^3$  e  $P \in \pi$ , chamamos ao ponto  $P$ , comum a todas as rectas do feixe, o seu *foco*. Se não houver risco de confusão, podemos chamar feixe de rectas à própria variedade de Schubert  $\Omega(P, \pi)$ .

### Intersecção de um plano com $G_{1,3}$

A intersecção de um plano de  $\mathbb{P}^5$  com  $G_{1,3}$  pode ser uma cónica ou todo o plano. Observemos este último caso em primeiro lugar.

**Planos contidos em  $G_{1,3}$ .** Seja  $F \subset G_{1,3}$  um plano e sejam  $a, b, c \in F$  três pontos não colineares. Como a recta que passa pelos pontos  $a$  e  $b$  está contida em  $G_{1,3}$ , temos  $i(a, b) = 0$ , portanto as rectas  $r_a$  e  $r_b$  intersectam-se num ponto  $P_{ab} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$  e estão contidas num plano  $\pi_{ab}$ , como vimos anteriormente. Da mesma forma, concluímos que a recta  $r_c$  intersecta ambas as rectas  $r_a$  e  $r_b$ . Esta intersecção pode ocorrer em  $P_{ab}$  ou em dois pontos distintos  $P_{ac}$  e  $P_{bc}$ . No primeiro caso, a recta  $r_c$  não está contida no plano  $\pi_{ab}$ , pois, caso contrário, os pontos  $a, b$  e  $c$  seriam colineares. No segundo caso, a recta  $r_c$  tem dois pontos distintos em  $\pi_{ab}$ , logo está contida neste plano. Vejamos como é que podemos caracterizar  $F$  num caso e no outro.

**Primeiro caso.** Suponhamos que a recta  $r_c$  passa por  $P_{ab}$ . Sejam  $N \in r_a$ ,  $Q \in r_b$  e  $L \in r_c$ , com  $N = [n_0 : n_1 : n_2 : n_3]$ ,  $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$  e  $L = [l_0 : l_1 : l_2 : l_3]$ , tais que, para cada  $j_0, j_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ , com  $j_0 < j_1$ ,

$$a_{j_0 j_1} = \begin{vmatrix} n_{j_0} & n_{j_1} \\ p_{j_0} & p_{j_1} \end{vmatrix}, \quad b_{j_0 j_1} = \begin{vmatrix} q_{j_0} & q_{j_1} \\ p_{j_0} & p_{j_1} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad c_{j_0 j_1} = \begin{vmatrix} l_{j_0} & l_{j_1} \\ p_{j_0} & p_{j_1} \end{vmatrix}.$$

Qualquer ponto  $x \in F$  pode ser escrito da forma

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

com  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Ora,

$$i(x, a) = i(\alpha a + \beta b + \gamma c, a) = 2\alpha g(a) + \beta i(a, b) + \gamma i(a, c) = 0,$$

donde  $r_x$  intersecta  $r_a$ . Analogamente,  $r_x$  intersecta também  $r_b$  e  $r_c$  e isto obriga a que  $r_x$  passe pelo ponto  $P_{ab}$ . Senão, vejamos: se  $r_x$  intersectar as rectas  $r_a$  e  $r_b$  em pontos distintos, temos  $r_x \subset \pi_{ab}$  e  $r_x$  teria de intersectar  $r_c$  no único ponto desta recta que está em  $\pi_{ab}$ , o ponto  $P_{ab}$ , o que é uma contradição. Assim, todos os pontos de  $F$  representam rectas que passam por  $P_{ab}$ .

Reciprocamente, seja  $x \in G_{1,3}$  um ponto tal que a recta  $r_x$ , por si representada, passa por  $P_{ab}$ . Mostremos que  $x \in F$ . Como o plano que contém os pontos  $N, Q$  e  $L$  não contém  $P_{ab}$ , a recta  $r_x$  intersecta este plano num ponto  $M = [m_0 : m_1 : m_2 : m_3]$ , onde  $M = \alpha N + \beta Q + \gamma L$ , com  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Ora, a menos de multiplicação por um escalar, as coordenadas homogêneas de  $x$  são, para cada  $j_0, j_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ , com  $j_0 < j_1$ ,

$$\begin{aligned} x_{j_0 j_1} &= m_{j_0} p_{j_1} - m_{j_1} p_{j_0} = \\ &= (\alpha n_{j_0} + \beta q_{j_0} + \gamma l_{j_0}) p_{j_1} - (\alpha n_{j_1} + \beta q_{j_1} + \gamma l_{j_1}) p_{j_0} = \\ &= \alpha (n_{j_0} p_{j_1} - n_{j_1} p_{j_0}) + \beta (q_{j_0} p_{j_1} - q_{j_1} p_{j_0}) + \gamma (l_{j_0} p_{j_1} - l_{j_1} p_{j_0}) = \\ &= \alpha a_{j_0 j_1} + \beta b_{j_0 j_1} + \gamma c_{j_0 j_1}. \end{aligned}$$

Logo, temos  $x \in F$  e podemos concluir que  $F$  é a variedade de Schubert

$$\{x \in G_{1,3} : P_{ab} \in r_x\}.$$

**Segundo caso.** Suponhamos que a recta  $r_c$  intersecta as rectas  $r_a$  e  $r_b$  em dois pontos distintos  $P_{ac}$  e  $P_{bc}$  e, portanto, está contida no plano  $\pi_{ab}$ . Tal como no caso anterior, se tomarmos  $x \in F$ , vemos que a recta  $r_x$  intersecta as rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$ . Como não existe nenhum ponto comum a estas três rectas,  $r_x$  tem pelo menos dois pontos no plano  $\pi_{ab}$ , donde  $r_x \subset \pi_{ab}$ .

Reciprocamente, se  $x \in G_{1,3}$  for um ponto tal que  $r_x \subset \pi_{ab}$ , tal como acima, os pontos de  $r_x$  são combinação linear de pontos das rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$  e, portanto,  $x$  é combinação linear dos pontos  $a, b$  e  $c$ , donde  $x \in F$ . Podemos então afirmar que

$$F = \{x \in G_{1,3} : r_x \subset \pi_{ab}\}.$$

Assim, os planos contidos em  $G_{1,3}$  são conjuntos de um dos tipos

$$\omega(P) := \{x \in G_{1,3} : P \in r_x\},$$

onde  $P$  é algum ponto de  $\mathbb{P}^3$ , ou

$$\omega(\pi) := \{x \in G_{1,3} : r_x \subset \pi\},$$

onde  $\pi$  é algum plano de  $\mathbb{P}^3$ . Por outro lado, todos estes conjuntos são, de facto, planos. Vejamos porquê.

Se tomarmos três pontos  $a, b, c \in \omega(P)$  tais que as rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$  não sejam complanares, vemos que estes pontos não são colineares, pois, caso fossem, pelo que vimos acima, existiria um plano  $\pi$  tal que  $a, b, c \in \omega(P, \pi)$ . Se  $x$  for um ponto do plano que contém os pontos  $a, b$  e  $c$ , existem  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  tais que  $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ . Ora,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \\ &= \alpha^2 g(a) + \beta^2 g(b) + \gamma^2 g(c) + \alpha\beta i(a, b) + \alpha\gamma i(a, c) + \beta\gamma i(b, c). \end{aligned}$$

Como  $a, b, c \in G_{1,3}$ , temos  $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ , e como as rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$  se intersectam, temos  $i(a, b) = i(a, c) = i(b, c) = 0$ . Logo  $g(x) = 0$ , donde  $x \in G_{1,3}$ . Mais, analogamente ao que já vimos acima, a recta  $r_x$  intersecta as três rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$ . Como estas rectas não são complanares, a intersecção tem de ocorrer no ponto  $P$ . Assim,  $x \in \omega(P)$ . Mostrámos então que o conjunto  $\omega(P)$  contém o plano definido pelos pontos  $a, b$  e  $c$ . Como qualquer ponto deste plano é zero dos polinómios  $i(a, X), i(b, X)$  e  $i(c, X)$ , e estes polinómios são lineares em  $X$  e independentes, temos que este plano é exactamente  $\mathbb{V}(i(a, X), i(b, X), i(c, X))$ . Agora, facilmente vemos que se  $x$  for um ponto de  $\omega(P)$ , a recta  $r_x$  intersecta as três rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$ , portanto  $x \in \mathbb{V}(i(a, X), i(b, X), i(c, X))$ . Assim,

$$\omega(P) = \mathbb{V}(i(a, X), i(b, X), i(c, X)).$$

De forma análoga, se tomarmos três pontos  $a, b, c \in \omega(\pi)$  tais que  $r_a \cap r_b \cap r_c = \emptyset$ , vemos que  $\omega(\pi)$  é o plano  $\mathbb{V}(i(a, X), i(b, X), i(c, X))$ .

Como  $G_{1,3}$  é uma quádrlica de dimensão quatro, não estão contidos em  $G_{1,3}$  espaços de dimensão superior a dois, e as famílias  $\{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3}$  e  $\{\omega(\pi)\}_{\pi \in \mathbb{P}^{3*}}$  são precisamente as duas famílias irreduzíveis de planos contidos em  $G_{1,3}$ . De facto, se dois planos estão na mesma família, a sua intersecção é um ponto, caso contrário, é uma recta ou o conjunto vazio. Vejamos. No caso em que são dois planos da primeira família, digamos  $\omega(P_1)$  e  $\omega(P_2)$ , a sua intersecção é o

ponto que corresponde à recta de  $\mathbb{P}^3$  que passa por  $P_1$  e por  $P_2$ ; no outro caso, dois planos distintos  $\omega(\pi_1)$  e  $\omega(\pi_2)$  intersectam-se no ponto que corresponde à recta  $\pi_1 \cap \pi_2$ . Caso tomemos um plano em cada família,  $\omega(P)$  e  $\omega(\pi)$ , a sua intersecção é vazia se  $P \notin \pi$ , ou a recta  $\omega(P, \pi)$ , caso  $P \in \pi$ .

Observemos finalmente que, dados um ponto  $P$  e um plano  $\pi$  de  $\mathbb{P}^3$ ,  $\omega(P)$  é a variedade de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^3)$  e, para qualquer recta  $r \subset \pi$ ,  $\omega(\pi)$  é a variedade de Schubert  $\Omega(r, \pi)$ .

**Regulus.** Quando um plano  $F$  não está contido em  $G_{1,3}$ , a intersecção  $C := F \cap G_{1,3}$  é uma cónica. Se esta cónica for degenerada, será a união de duas rectas (contadas com multiplicidades) e regressamos a uma situação já descrita anteriormente. Caso contrário, tomando três pontos  $a, b, c \in C$ , temos que as rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$  são enviesadas. Se assim não fosse, teríamos duas destas rectas concorrentes, digamos  $r_a$  e  $r_b$ , e, portanto, a recta que passa por  $a$  e  $b$  estaria contida em  $C$ , logo esta cónica seria degenerada.

Ora, se tomarmos três pontos em cada uma das rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$ , os nove pontos que obtemos definem uma superfície quádrlica  $S$  em  $\mathbb{P}^3$ , a que chamamos *regulus*. Cada uma destas rectas intersecta esta superfície em três pontos, logo está contida em  $S$ . Mais, como superfície quádrlica que é,  $S$  admite duas famílias irredutíveis de rectas que a cobrem. Como as três rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$  não se intersectam, estas rectas pertencem à mesma família. Chamemos  $B$  a esta família e  $B'$  à outra. Seja  $x \in C$  e sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  tais que  $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ . Se  $y \in G_{1,3}$  for um ponto tal que  $r_y$  intersecte as três rectas  $r_a, r_b$  e  $r_c$ , a recta  $r_y$  encontra  $S$  em três pontos, logo  $r_y \subset S$  e  $r_y$  tem de estar na família  $B'$ . Como  $i(x, y) = \alpha i(a, y) + \beta i(b, y) + \gamma i(c, y) = 0$ , temos que  $r_y$  intersecta  $r_x$ . Logo,  $r_x$  intersecta todas as rectas que encontram simultaneamente  $r_a, r_b$  e  $r_c$ , donde  $r_x \subset S$  e  $r_x$  está na família  $B$ . Temos ainda que as condições  $i(a, y) = 0, i(b, y) = 0$  e  $i(c, y) = 0$ , são as necessárias e suficientes para que um ponto  $y \in G_{1,3}$  represente uma recta na família  $B'$ . Analogamente, se  $y_1, y_2, y_3 \in G_{1,3}$  forem três pontos tais que  $r_{y_1}, r_{y_2}, r_{y_3} \in B'$ , as condições  $i(x, y_1) = 0, i(x, y_2) = 0$  e  $i(x, y_3) = 0$  são as necessárias e suficientes para que a recta representada por um ponto  $x \in G_{1,3}$  esteja em  $B$ . Mas os três polinómios  $i(x, y_1), i(x, y_2), i(x, y_3) \in \mathbb{C}[X]$  são de grau um, logo definem um plano em  $\mathbb{P}^3$ ; como os pontos  $a, b$  e  $c$  são zeros destes três polinómios, esse plano tem de ser  $F$ . Assim,  $C$  é exactamente o conjunto que parametriza uma das duas famílias de rectas contidas em  $S$ .

Vamos saltar uma dimensão e observar agora as intersecções de  $G_{1,3}$  com hiperplanos. Será depois mais simples caracterizar as suas intersecções com espaços de dimensão três.

### Intersecção de um hiperplano com $G_{1,3}$

Seja  $H$  um hiperplano de  $\mathbb{P}^5$  e sejam  $[h_{01} : h_{02} : h_{03} : h_{12} : h_{13} : h_{23}]$  as suas coordenadas homogéneas em  $\mathbb{P}^{5*}$ . Se  $H$  não for tangente a  $G_{1,3}$  a intersecção  $G_{1,3} \cap H$  é uma quádrlica não singular. Trataremos deste caso mais tarde. Suponhamos agora que  $H$  é tangente a  $G_{1,3}$  num ponto  $a$ . Isto significa que

$$[h_{01} : h_{02} : h_{03} : h_{12} : h_{13} : h_{23}] = [a_{23} : -a_{13} : a_{12} : a_{03} : -a_{02} : a_{01}],$$

ou seja, existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que

$$(h_{01}, h_{02}, h_{03}, h_{12}, h_{13}, h_{23}) = \lambda(a_{23}, -a_{13}, a_{12}, a_{03}, -a_{02}, a_{01}).$$

Como  $a \in G_{1,3}$ , temos

$$\begin{aligned} g(H) &= h_{01}h_{23} - h_{02}h_{13} + h_{03}h_{12} = \\ &= \lambda^2(a_{23}a_{01} - (-a_{13})(-a_{02}) + a_{12}a_{03}) = \\ &= \lambda^2 g(a) = 0. \end{aligned}$$

O recíproco verifica-se facilmente e vemos que os espaços tangentes a  $G_{1,3}$  são exactamente os zeros do polinómio  $g$  em  $\mathbb{P}^{5*}$ . Em particular, concluímos que o conjunto  $G_{1,3}^*$ , dos espaços tangentes a  $G_{1,3}$ , é uma hipersuperfície quádrlica de  $\mathbb{P}^{5*}$ .

Como  $G_{1,3}$  é uma quádrlica, o conjunto  $G_{1,3} \cap T_a G_{1,3}$  é o cone das rectas de  $\mathbb{P}^5$  que estão contidas em  $G_{1,3}$  e passam por  $a$ . Caracterizemos este conjunto de outro modo. Tomemos  $x \in G_{1,3}$ . Ora, este ponto está em  $T_a G_{1,3}$  se e só se a recta que passa por  $x$  e por  $a$  estiver contida em  $G_{1,3}$ . Mas isto significa ter  $i(a, x) = 0$ , o que é o mesmo que as rectas  $r_a$  e  $r_x$  intersectarem-se. Assim, se para cada recta  $r \subset \mathbb{P}^3$ , definirmos o conjunto

$$\omega(r) := \{x \in G_{1,3} : r \cap r_x \neq \emptyset\},$$

temos a igualdade

$$G_{1,3} \cap H = G_{1,3} \cap T_a G_{1,3} = \omega(r_a).$$

Vejamos agora o caso em que  $H$  intersecta  $G_{1,3}$  transversalmente (esta parte baseia-se em [GH94]). Antes de mais, observemos o seguinte: para cada ponto  $P \in \mathbb{P}^3$ , o conjunto  $\{\hat{H}\}_{\omega(P) \subset \hat{H} \in \mathbb{P}^{5*}}$  é um plano em  $\mathbb{P}^{5*}$ . Assim, como, para cada  $x \in \omega(P)$ , o plano  $\omega(P)$  está contido em  $T_x G_{1,3}$ , temos  $\mathcal{G}_{G_{1,3}}[\omega(P)] \subseteq \{\hat{H}\}_{\omega(P) \subset \hat{H} \in \mathbb{P}^{5*}}$ ; finalmente, como  $\mathcal{G}_{G_{1,3}}$  se estende a um isomorfismo linear, o transformado de um plano é um plano, donde temos a igualdade

$$\mathcal{G}_{G_{1,3}}[\omega(P)] = \{\hat{H}\}_{\omega(P) \subset \hat{H} \in \mathbb{P}^{5*}}.$$

Em particular, concluimos que  $\{\hat{H}\}_{\omega(P) \subset \hat{H} \in \mathbb{P}^{5*}} \subseteq G_{1,3}^*$ . Logo, se  $H$  é um hiperplano que não é tangente a  $G_{1,3}$ , para cada  $P \in \mathbb{P}^3$ , o plano  $\omega(P)$  não está contido em  $H$ . Logo, a intersecção  $\omega(P) \cap H$  é uma recta e, portanto, existe um único plano  $\pi \subset \mathbb{P}^3$  tal que  $\omega(P) \cap H = \omega(P, \pi)$ . Isto define uma aplicação  $\mathcal{H} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3*}$  que a cada ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  faz corresponder o plano  $\pi$  tal que  $\omega(P) \cap H = \omega(P, \pi)$ .

Por outro lado, dado um plano  $\pi \subset \mathbb{P}^3$ , vemos de forma análoga que a intersecção  $\omega(\pi) \cap H$  é uma recta, donde existe um único ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  tal que  $\omega(\pi) \cap H = \omega(P, \pi)$ , o que define outra aplicação  $\mathcal{H}' : \mathbb{P}^{3*} \rightarrow \mathbb{P}^3$ . Interessante é o facto de  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  serem inversas uma da outra. Vejamos porquê. Seja  $P \in \mathbb{P}^3$  e seja  $P' = (\mathcal{H}' \circ \mathcal{H})(P)$ . Então, se  $\pi = \mathcal{H}(P)$ , temos

$$\begin{aligned} \omega(P, \pi) \cap \omega(P', \pi) &= (\omega(P) \cap H) \cap (\omega(\pi) \cap H) = \\ &= \omega(P, \pi) \cap H = \omega(P, \pi), \end{aligned}$$

donde,  $P = P'$ . Analogamente, temos, para cada  $\pi \in \mathbb{P}^{3*}$ ,  $\pi = (\mathcal{H} \circ \mathcal{H}')(\pi)$ , como queríamos.

**Configuração de Möbius.** A aplicação  $\mathcal{H}$  permite-nos, para cada poliedro, construir um seu dual, fazendo corresponder vértices a faces. Em particular, cada tetraedro é transformado no seu tetraedro dual.

Sejam  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  pontos não complanares e  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  e  $\pi_4$  planos tais que, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P_i = \bigcap_{j \neq i} \pi_j$ . Consideremos o tetraedro  $T := \bigcup_{i=1}^4 \pi_i$ . Se fizermos corresponder a cada ponto  $P_i$  o plano  $\pi'_i := \mathcal{H}(P_i)$ , obtemos um novo tetraedro  $T' := \bigcup_{i=1}^4 \pi'_i$ . Começemos por verificar que este tetraedro está bem definido, isto é, que a intersecção  $\pi'_1 \cap \pi'_2 \cap \pi'_3 \cap \pi'_4$  é vazia. Suponhamos que  $Q$  é um ponto desta intersecção. Então, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , temos  $Q \in \mathcal{H}(P_i)$ . Seja  $x_i \in G_{1,3}$  o ponto correspondente à recta  $r_{x_i}$  que passa pelos pontos  $Q$  e  $P_i$ . Então temos  $x_i \in \omega(P_i, \mathcal{H}(P_i)) = \omega(P_i) \cap H$ . Mas como  $x_i \in \omega(Q)$ , temos  $x_i \in \omega(Q) \cap H = \omega(Q, \mathcal{H}(Q))$  e, em particular,  $P_i \in \mathcal{H}(Q)$ . Mas então os pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  são complanares, o que contraria o que supusemos.

Como, para cada  $P \in \mathbb{P}^3$ , o plano  $\mathcal{H}(P)$  contém  $P$ , o tetraedro  $T'$  circunscreve  $T$ . O que veremos a seguir mostra que  $T$  também circunscreve  $T'$ . Sejam  $P'_1, P'_2, P'_3$  e  $P'_4$  pontos tais que, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P'_i = \bigcap_{j \neq i} \pi'_j$ . Sejam  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com  $i \neq j$ . Seja  $x_{ij} \in G_{1,3}$  tal que a recta  $r_{x_{ij}}$  passa pelos pontos  $P'_i$  e  $P_j$ . Como  $P'_i \in \pi'_j$  e  $\pi'_j = \mathcal{H}(P_j)$ , a recta  $r_{x_{ij}}$  está contida no plano  $\mathcal{H}(P_j)$ , portanto  $x_{ij} \in \omega(P_j, \mathcal{H}(P_j))$ . Mas  $\omega(P_j, \mathcal{H}(P_j)) = \omega(P_j) \cap H$ , logo  $x_{ij} \in H$ , donde concluimos que  $x_{ij} \in \omega(P'_i) \cap H = \omega(P'_i, \mathcal{H}(P'_i))$ . Logo a recta  $r_{x_{ij}}$  está contida em  $\mathcal{H}(P'_i)$ . Portanto, o ponto  $P_j$  pertence a este plano. Mas o único plano que contém os três pontos  $P_j$ , com  $j \neq i$ , é o plano  $\pi_i$ ,

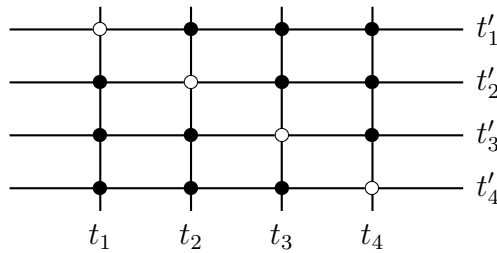
logo  $\mathcal{H}(P'_i) = \pi_i$ . Isto significa que o tetraedro obtido a partir de  $T'$  por meio da aplicação  $\mathcal{H}$  é  $T$  e, pelo que vimos acima,  $T$  circunscreve  $T'$ .

**A aplicação  $\mathcal{H}$  fica definida se, dado um tetraedro, conhecermos o dual assim obtido.** De tudo isto, o mais interessante é que dados dois tetraedros  $T$  e  $T'$  que se circunscrevam mutuamente, existe um único hiperplano  $H \in \mathbb{P}^{5*}$  tal que a aplicação  $\mathcal{H}$  a si associada transforma  $T$  em  $T'$  e vice-versa. Vejamos porquê. Sejam  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  e  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  e  $\pi_4$  os vértices e as faces de  $T$ , e sejam  $P'_1, P'_2, P'_3$  e  $P'_4$  e  $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3$  e  $\pi'_4$  os vértices e as faces de  $T'$ , respectivamente, tal como acima. Consideremos, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , os feixes de rectas

$$t_i = \omega(P_i, \pi'_i) \quad \text{e} \quad t'_i = \omega(P'_i, \pi_i).$$

Para que  $T$  e  $T'$  sejam duais com respeito a uma aplicação  $\mathcal{H}$  definida, tal como acima, a partir de um hiperplano  $H$ , todos estes feixes têm de estar contidos em  $H$ . Mas, para cada  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com  $i \neq j$ , temos  $t_i \cap t'_j \neq \emptyset$ , pois o ponto correspondente à recta que passa por  $P_i$  e  $P'_j$  está em ambos os feixes; por outro lado,  $t_i \cap t'_i = \emptyset$ , pois  $P_i \notin \pi_i$ . Logo, estes feixes têm a configuração da figura 2.1.

Figura 2.1:



Ora, todos estes feixes estão contidos no hiperplano  $H$  definido pelos cinco pontos das intersecções  $t_1 \cap t'_4, t_1 \cap t'_3, t_2 \cap t'_4, t_2 \cap t'_3$  e  $t_3 \cap t'_2$ . Portanto, a aplicação  $\mathcal{H}$  definida a partir deste hiperplano transforma  $T$  em  $T'$  e vice-versa. Suponhamos agora que existe um hiperplano  $\hat{H}$ , distinto de  $H$ , nas mesmas condições. Então, a intersecção  $S := G_{1,3} \cap H \cap \hat{H}$  é uma superfície quádrlica não singular. Como todos aqueles feixes têm de estar contidos também em  $\hat{H}$ , estão contidos nesta superfície. Ora, há duas famílias irreduzíveis de rectas contidas na superfície  $S$ , e duas rectas pertencem à mesma família se e só



se não se intersectarem. Como  $t_1$  e  $t'_4$  se intersectam, estas rectas pertencem a famílias distintas. Como também  $t_2$  intersecta  $t'_4$ , as rectas  $t_1$  e  $t_2$  têm de pertencer à mesma família. Mas a recta  $t'_1$  intersecta  $t_2$ , portanto estas rectas não estão na mesma família, o que significa que  $t_1$  e  $t'_1$  estão em famílias distintas. Ora, isto não pode acontecer, porque estas rectas não se intersectam. Logo, não pode existir um hiperplano  $\hat{H}$  naquelas condições, o que mostra a unicidade de  $H$ .

### Intersecção de um subespaço de dimensão três com $G_{1,3}$

Resta-nos observar as intersecções de  $G_{1,3}$  com os subespaços de  $\mathbb{P}^5$  de dimensão três.

Seja  $E$  um subespaço de  $\mathbb{P}^5$  de dimensão três. Sejam  $H_1$  e  $H_2$  hiperplanos tais que  $E = H_1 \cap H_2$ . Se pensarmos na recta  $r_E$  de  $\mathbb{P}^{5*}$  que passa por  $H_1$  e  $H_2$ , temos que, para quaisquer hiperplanos distintos  $H'_1$  e  $H'_2$  pertencentes a  $r_E$ , é também verdadeira a igualdade  $E = H'_1 \cap H'_2$ . Ora, como vimos anteriormente, o conjunto  $G_{1,3}^*$  dos espaços tangentes a  $G_{1,3}$  é uma hipersuperfície quádrica em  $\mathbb{P}^{5*}$ . Portanto, a recta  $r_E$  intersecta  $G_{1,3}^*$ , em geral, em dois pontos distintos; caso contrário, ou  $r_E$  está contida em  $G_{1,3}^*$ , ou  $r_E$  intersecta esta hipersuperfície apenas num ponto.

No caso mais geral, podemos escolher hiperplanos distintos  $H'_1$  e  $H'_2$  em  $r_E \cap G_{1,3}^*$ . Estes hiperplanos são tangentes a  $G_{1,3}$  em dois pontos  $a$  e  $b$ , respectivamente. Pelo que vimos acima,

$$G_{1,3} \cap E = G_{1,3} \cap T_a G_{1,3} \cap T_b G_{1,3} = \omega(r_a) \cap \omega(r_b)$$

e, portanto,  $G_{1,3} \cap E$  pode ser caracterizado como sendo o conjunto das rectas que intersectam simultaneamente duas rectas dadas. Vimos acima que uma recta está contida em  $G_{1,3}$  se e só se, dados dois pontos  $x$  e  $y$  na recta,  $i(x, y) = 0$ . Vimos também que  $G_{1,3}^*$  é o conjunto dos zeros do polinómio  $g$  em  $\mathbb{P}^{5*}$ . Mas este espaço é isomorfo a  $\mathbb{P}^5$  e  $G_{1,3}$  é o conjunto dos zeros do mesmo polinómio. Logo, é fácil verificar que uma recta está contida em  $G_{1,3}^*$  se e só se o mesmo polinómio  $i$  se anula para qualquer par de pontos da recta. Ora, como  $r_E$  não está contida em  $G_{1,3}^*$ , temos

$$i(a_{23}, -a_{13}, a_{12}, a_{03}, -a_{02}, a_{01}, b_{23}, -b_{13}, b_{12}, b_{03}, -b_{02}, b_{01}) \neq 0,$$

donde

$$a_{23}b_{01} - (-a_{13})(-b_{02}) + a_{12}b_{03} + a_{03}b_{12} - (-a_{02})(-b_{13}) + a_{01}b_{23} \neq 0,$$

ou seja,

$$i(a, b) \neq 0.$$

Assim, a recta que passa por  $a$  e  $b$  não está contida em  $G_{1,3}$  e, em particular,  $a \notin T_b G_{1,3}$  e vice-versa. Logo, dado um ponto  $x \in G_{1,3} \cap E$ , temos

$$T_x(G_{1,3} \cap E) = T_x G_{1,3} \cap T_a G_{1,3} \cap T_b G_{1,3}.$$

Como a aplicação de Gauss  $\mathcal{G}_{G_{1,3}}$  se estende a um isomorfismo  $\tilde{\mathcal{G}}_{G_{1,3}} : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  e os pontos  $x$ ,  $a$  e  $b$  não são colineares,  $T_x(G_{1,3} \cap E)$  é um plano. Logo,  $G_{1,3} \cap E$  é uma superfície quádrlica não singular.

No caso em que  $r_E$  está contida em  $G_{1,3}^*$ , podemos tomar  $H'_1$  e  $H'_2$  como acima e temos  $i(a, b) = 0$ , portanto as rectas  $r_a$  e  $r_b$  intersectam-se num ponto  $P_{ab}$  e estão contidas num plano  $\pi_{ab}$ . Assim, uma recta intersecta ambas se passar pelo ponto onde elas se encontram, ou se estiver contida no plano que as contém. Isto é,

$$G_{1,3} \cap E = \omega(P_{ab}) \cup \omega(\pi_{ab}).$$

Logo, neste caso,  $G_{1,3} \cap E$  é a união de dois planos distintos.

Finalmente, resta-nos considerar a hipótese de a recta  $r_E$  ser tangente a  $G_{1,3}^*$  num único ponto, o que significa que  $E$  é a intersecção entre um hiperplano tangente a  $G_{1,3}$  num ponto  $a$  e um hiperplano  $H$ , transversal a  $G_{1,3}$ . Logo,

$$G_{1,3} \cap E = G_{1,3} \cap (T_a G_{1,3} \cap H) = \omega(r_a) \cap H.$$

Como  $H$  intersecta  $G_{1,3}$  transversalmente, temos

$$G_{1,3} \cap H = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^3} \omega(P) \cap H = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^3} \omega(P, \mathcal{H}(P)),$$

onde  $\mathcal{H}$  é a aplicação associada ao hiperplano  $H$ , tal como definimos acima. Portanto,

$$\begin{aligned} G_{1,3} \cap E &= \omega(r_a) \cap \bigcup_{P \in \mathbb{P}^3} \omega(P, \mathcal{H}(P)) = \\ &= \bigcup_{P \in \mathbb{P}^3} [\omega(r_a) \cap \omega(P, \mathcal{H}(P))]. \end{aligned}$$

Se  $P$  é um ponto de  $r_a$ , temos obviamente  $\omega(r_a) \cap \omega(P, \mathcal{H}(P)) = \omega(P, \mathcal{H}(P))$ . Por outro lado, se  $P$  é um ponto tal que o plano  $\mathcal{H}(P)$  contém  $r_a$ , qualquer recta contida neste plano intersecta  $r_a$ , portanto neste caso também se verifica a igualdade anterior. Logo, podemos escrever

$$G_{1,3} \cap E = \{x_{aP} : P \notin r_a \not\subset \mathcal{H}(P)\} \cup \bigcup_{\substack{P \in \mathbb{P}^3 \\ P \in r_a \vee r_a \subset \mathcal{H}(P)}} \omega(P, \mathcal{H}(P)),$$

onde  $x_{aP}$  é o ponto que corresponde à única recta que passa por  $P$  e pelo ponto da intersecção  $r_a \cap \mathcal{H}(P)$ .

Terminamos assim a caracterização das intersecções de subespaços de  $\mathbb{P}^5$  com  $G_{1,3}$ .

## 2.4 Alguns problemas de geometria enumerativa

### 2.4.1 Quantas rectas intersectam quatro rectas dadas em $\mathbb{P}^3$ ?

Para responder a esta questão, consideremos rectas  $r_1, r_2, r_3, r_4 \subset \mathbb{P}^3$  e  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G_{1,3}$  as respectivas coordenadas de Plücker. Vejamos quais as condições que tem de respeitar uma recta  $r \subset \mathbb{P}^3$  para intersectar simultaneamente aquelas quatro.

Ora,  $r$  intersecta aquelas quatro rectas se e só se a sua imagem pelo mergulho de Plücker estiver em

$$J := \bigcap_{i=1}^4 \Omega(r_i, \mathbb{P}^3) = \bigcap_{i=1}^4 \omega(r_i).$$

Pelo corolário 2.3, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\Omega(r_i, \mathbb{P}^3)$  é a intersecção entre  $G_{1,3}$  e um hiperplano  $H_i$  de  $\mathbb{P}^5$ . O lema 1.1 permite-nos mesmo conhecer a equação que define  $H_i$ :

$$a_{i,01}x_{23} - a_{i,02}x_{13} + a_{i,03}x_{12} + a_{i,12}x_{03} - a_{i,13}x_{02} + a_{i,23}x_{01} = 0.$$

Se tomarmos  $M := \bigcap_{i=1}^4 H_i$ , temos  $J = G_{1,3} \cap M$ .

Ora, se as equações definidoras dos hiperplanos  $H_i$  forem linearmente independentes,  $M$  é um recta. Se esta recta estiver contida em  $G_{1,3}$  temos  $J = M$ , donde  $J$  é um conjunto infinito. Caso contrário, como  $G_{1,3}$  é uma hipersuperfície quádrlica,  $J$  é constituído por um ou dois pontos. Se aquelas equações forem linearmente dependentes,  $M$  é um espaço de dimensão superior a um e  $J$  será necessariamente infinito.

Assim, o número de rectas que intersectam quatro rectas dadas não é fixo, podendo ser um, dois ou infinito. Não há, portanto, uma resposta única à pergunta que formulámos. Há, no entanto, uma resposta mais geral que as restantes, no seguinte sentido: o conjunto dos quádruplos de hiperplanos  $(H_1, H_2, H_3, H_4)$  tais que  $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$  é uma recta de  $\mathbb{P}^5$  que intersecta  $G_{1,3}$  em dois pontos é um aberto de Zariski em  $(\mathbb{P}^{5*})^4$ .

Uma outra forma de observar esta generalidade do número dois é a que descreveremos com a ajuda do seguinte lema:

**Lema 2.8** *Sejam  $t_1, t_2, t_3 \subset \mathbb{P}^3$  rectas disjuntas duas a duas. Então existe uma superfície quádrlica não singular que as contém.*

*Demonstração.* As superfícies quádrlicas podem ser parametrizadas por  $\mathbb{P}^9$ . Sejam, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $P_i, P'_i, P''_i \in t_i$  três pontos distintos. Ao todo temos nove pontos distintos, que representam nove equações lineares em  $\mathbb{P}^9$ , logo existe pelo menos uma superfície quádrlica  $Q$  que contém aqueles nove pontos.

Se  $Q$  fosse singular, seria um cone ou a união de dois planos. No primeiro caso, todas as rectas passariam pelo vértice do cone, portanto as rectas  $t_1, t_2$  e  $t_3$  não seriam disjuntas; no segundo caso, duas daquelas rectas estariam contidas no mesmo plano e, novamente, não poderiam ser disjuntas.

Assim,  $Q$  é uma superfície não singular que contém as três rectas, como pretendíamos.  $\square$

Suponhamos então que três das quatro rectas, digamos  $r_1, r_2$  e  $r_3$ , são enviesadas duas a duas. Nesse caso, há uma única quádrlica  $Q$  que contém estas rectas. Como são enviesadas, estas rectas estão numa mesma família irreduzível  $B$  de rectas contidas em  $Q$ . Seja  $B'$  a outra família. Ora, uma recta que intersecte estas três encontra  $Q$  em três pontos distintos, logo está contida nesta quádrlica e pertence à família  $B'$ . Se a recta  $r_4$  não for tangente a  $Q$  (caso mais geral), encontra esta superfície em dois pontos. Ora, por cada um destes pontos passa uma única recta de  $B'$ , logo há exactamente duas rectas que intersectam as quatro rectas dadas. No caso (menos geral) de  $r_4$  ser tangente a  $Q$ , mas não estar contida nesta quádrlica, haverá apenas uma. Os casos (menos gerais ainda) de  $r_4$  estar contida em  $Q$ , pertencendo a uma das famílias  $B$  e  $B'$ , dão origem às respostas infinito e um, respectivamente: se  $r_4 \in B$ , todas as rectas de  $B'$  intersectam as quatro rectas dadas; se  $r_4 \in B'$ , a única recta que intersecta aquelas quatro é a própria recta  $r_4$ .

O que melhor traduz esta generalidade do número de rectas que intersectam quatro rectas dadas é o cálculo de Schubert. Vejamos.

Consideremos a variedade de Grassmann  $G_{1,3}$ . Segundo o teorema da base, esta variedade admite cinco grupos de cohomologia não triviais:  $H^4(G_{1,3}, \mathbb{Z})$ , gerado pelos ciclos de Schubert  $\Omega(0, 3)$  e  $\Omega(1, 2)$ , e os grupos  $H^0(G_{1,3}, \mathbb{Z})$ ,  $H^2(G_{1,3}, \mathbb{Z})$ ,  $H^6(G_{1,3}, \mathbb{Z})$  e  $H^8(G_{1,3}, \mathbb{Z})$ , os quatro isomorfos a  $\mathbb{Z}$ , gerados, respectivamente, pelos ciclos  $\Omega(2, 3)$ ,  $\Omega(1, 3)$ ,  $\Omega(0, 2)$  e  $\Omega(0, 1)$ .

Ora, se queremos saber o número de pontos de  $J = \bigcap_{i=1}^4 \Omega(r_i, \mathbb{P}^3)$  no caso mais geral, devemos calcular o grau de  $\Omega(1, 3)^4$ . Pela definição utilizada no teorema 2.6, temos  $\Omega(1, 3) = \sigma(1)$  e a fórmula de Pieri permite-nos dizer que

$$\Omega(1, 3) \cdot \sigma(1) = \Omega(0, 3) + \Omega(1, 2),$$

ou seja,

$$\Omega(1, 3)^2 = \Omega(0, 3) + \Omega(1, 2).$$

Como  $\Omega(0, 3)^2 = 1$ ,  $\Omega(1, 2)^2 = 1$  e o grau de  $\Omega(0, 3) \cdot \Omega(1, 2)$  é zero, concluímos que o grau de  $\Omega(1, 3)^4$  é dois.

Outra forma de chegar à mesma conclusão é aplicar a fórmula de Pieri para ver que  $\Omega(1, 3)^3 = 2\Omega(0, 2)$  e aplicá-la novamente e concluir que  $\Omega(1, 3)^4 = 2\Omega(0, 1)$ . Como  $\Omega(0, 1)$  é a classe de um ponto, o seu grau é um, logo o grau de  $\Omega(1, 3)^4$  é dois.

Neste caminho alternativo, vemos que  $\Omega(1, 3)^3 = 2\Omega(0, 2)$ . Esta expressão sugere que o conjunto de rectas que intersectam simultaneamente três rectas enviesadas pode ser continuamente deformado na união de dois conjuntos de rectas coplanares que se intersectam num ponto.

De facto, podemos encontrar exemplos nos quais isto se passa. Escolhamos as rectas  $r_1$  e  $r_2$  de forma a serem concorrentes num ponto  $P$  e chamemos  $\pi$  ao plano ao qual pertencem estas rectas. Tomemos agora uma recta  $r_3$  que intersecte  $\pi$  num ponto  $P'$ , diferente de  $P$ , e chamemos  $\pi'$  ao plano que contém  $r_3$  e passa por  $P$ . Assim, uma recta intersecta simultaneamente aquelas três se e só se estiver contida em  $\pi$  e passar por  $P'$  ou estiver contida em  $\pi'$  e passar por  $P$ . Neste caso, temos efectivamente

$$\bigcap_{i=1}^3 \Omega(r_i, \mathbb{P}^3) = \Omega(P', \pi) \cup \Omega(P, \pi'),$$

como queríamos.

## 2.4.2 Quantas rectas intersectam quatro curvas dadas em $\mathbb{P}^3$ ?

Sejam  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  curvas em  $\mathbb{P}^3$  e sejam  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$  as respectivas classes de cohomologia. Seja  $r$  a classe de uma recta de  $\mathbb{P}^3$ . Então temos  $c_i = \delta_i r$ , onde  $\delta_i$  é o grau de  $c_i$ . Assim, se  $X_i$  for a subvariedade de  $G_{1,3}$  constituída pelos pontos que representam as rectas que intersectam  $C_i$  e  $x_i$  for a sua classe de cohomologia, temos  $x_i = \delta_i \Omega(1, 3)$ , donde

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \Omega(1, 3)^4 = 2 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \Omega(0, 1),$$

uma vez que  $\Omega(1, 3)^4 = 2\Omega(0, 1)$ . Concluimos daqui que o número de rectas que intersectam as quatro curvas dadas, contado com multiplicidades, é  $2\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$ .

### 2.4.3 Quantas rectas intersectam seis planos dados em $\mathbb{P}^4$ ?

Analogamente aos casos anteriores, este número é-nos dado pelo grau de  $\Omega(2, 4)^6$ , que é igual a cinco, como veremos em seguida. O cálculo que se segue pode ser encontrado em [GH94].

Como, na notação utilizada no teorema 2.6,  $\Omega(2, 4) = \sigma(2)$ , temos de calcular

$$[\Omega(2, 4) \cdot \Omega(2, 4) \cdot \sigma(2)]^2.$$

Pela fórmula de Pieri, temos  $\Omega(2, 4) \cdot \sigma(2) = \Omega(1, 4) + \Omega(2, 3)$ , logo

$$\Omega(2, 4)^6 = [\Omega(2, 4) \cdot \Omega(1, 4) + \Omega(2, 4) \cdot \Omega(2, 3)]^2.$$

Mas  $\Omega(1, 4) = \sigma(1)$ , portanto, novamente pela fórmula de Pieri, temos

$$\Omega(2, 4)^6 = [\Omega(0, 4) + 2\Omega(1, 3)]^2.$$

Finalmente, pela proposição 2.5, temos  $\Omega(0, 4)^2 = \Omega(1, 3)^2 = 1$  e  $\Omega(0, 4) \cdot \Omega(1, 3) = 0$ , portanto,

$$\Omega(2, 4)^6 = 1 + 4 \cdot 0 + 4 = 5.$$

Assim, em geral, são cinco as rectas que intersectam seis planos dados em  $\mathbb{P}^4$ .

Vejamos um caso em que isto se passa. Consideremos os seguintes pontos:

$$\begin{array}{ll} P_{12} = [1 : 0 : 0 : 0 : 0], & P_{13} = [0 : 1 : 0 : 0 : 0], \\ P_{14} = [0 : 0 : 1 : 0 : 0], & P_{15} = [1 : 0 : 1 : 0 : 0], \\ P_{16} = [0 : 1 : 1 : 0 : 0], & P_{23} = [0 : 0 : 0 : 1 : 0], \\ P_{24} = [0 : 0 : 0 : 0 : 1], & P_{25} = [1 : 0 : 0 : -1 : 1], \\ P_{26} = [0 : 0 : 0 : 1 : 1], & P_{34} = [1 : 1 : 1 : 1 : 1], \\ P_{35} = [0 : 1 : 0 : -1 : 0] & \text{e} \quad P_{36} = [0 : 1 : 0 : 1 : 0]. \end{array}$$

Facilmente se verifica que existe um único conjunto de seis planos de  $\mathbb{P}^4$   $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$  tal que, para cada  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , com  $i < j$ , o

ponto  $P_{ij}$  esteja na intersecção  $F_i \cap F_j$ . Por outro lado, verificamos que as coordenadas de Plücker destes planos são, respectivamente,

$$\begin{aligned}x_1 &= [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], \\x_2 &= [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0], \\x_3 &= [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 1 : 0], \\x_4 &= [0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : -1], \\x_5 &= [1 : 1 : -1 : 1 : 0 : 1 : -1 : 1 : 0 : 1],\end{aligned}$$

e

$$x_6 = [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : -1 : -1].$$

Aplicando o lema 1.1, deduzimos que um ponto  $a = [a_{01} : \cdots : a_{34}] \in G_{1,4}$  representa uma recta  $r_a$  que intersecta aqueles seis planos se e só se se verificarem as equações

$$\begin{aligned}a_{34} &= 0, \\a_{12} &= 0, \\a_{24} - a_{04} + a_{02} &= 0, \\a_{13} + a_{03} - a_{01} &= 0, \\a_{34} + a_{24} - a_{23} + a_{14} + a_{12} - a_{04} + a_{03} + a_{01} &= 0\end{aligned}$$

e

$$a_{04} + a_{03} - a_{02} - a_{01} = 0.$$

Além disso, como  $a \in G_{1,4}$ , são válidas as correlações de Plücker

$$\begin{aligned}a_{01}a_{23} - a_{02}a_{13} + a_{03}a_{12} &= 0, \\a_{01}a_{24} - a_{02}a_{14} + a_{04}a_{12} &= 0, \\a_{01}a_{34} - a_{03}a_{14} + a_{04}a_{13} &= 0, \\a_{02}a_{34} - a_{03}a_{24} + a_{04}a_{23} &= 0\end{aligned}$$

e

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0.$$

Combinando todas estas equações (com a ajuda de um computador), obtemos as soluções:

$$\begin{aligned} & [1 : -1 : -2 : 2 : 0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0], \\ & [1 : 2 : 1 : 2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0], \\ & \left[ \alpha^2 : \alpha^2 - 1 : \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 1}{2\alpha - 1} : \alpha^2 : 0 : 1 : \alpha - \alpha^2 : \alpha : 1 : 0 \right], \\ & \left[ \beta^2 : \beta^2 - 1 : \frac{\beta^2 - 2\beta - 1}{2\beta - 1} : \beta^2 : 0 : 1 : \beta - \beta^2 : \beta : 1 : 0 \right], \end{aligned}$$

e

$$\left[ \gamma^2 : \gamma^2 - 1 : \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 1}{2\gamma - 1} : \gamma^2 : 0 : 1 : \gamma - \gamma^2 : \gamma : 1 : 0 \right],$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as três raízes do polinómio  $x^3 - x^2 + 1$  em  $\mathbb{C}$ . Obtemos então cinco rectas que intersectam os seis planos considerados.

### Configuração de cinco planos em $\mathbb{P}^4$

Relacionado com a questão anterior está o seguinte teorema, que se pode encontrar em [SK98] :

**Teorema 2.9** *Sejam  $F_1, F_2, F_3, F_4 \subset \mathbb{P}^4$  planos tais que, para cada  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , com  $i < j$ , a intersecção  $F_i \cap F_j$  seja apenas um ponto, que designaremos por  $P_{ij}$ , e nenhum hiperplano de  $\mathbb{P}^4$  contenha cinco destes pontos. Então existe um único plano  $F_5 \subset \mathbb{P}^4$ , distinto daqueles quatro, tal que qualquer recta que intersecta aqueles quatro planos encontra ainda  $F_5$ .*

*Demonstração.* Seja  $S$  o conjunto das rectas que intersectam os planos  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$ . Os seis pontos  $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}$  e  $P_{34}$  podem ser representados em  $\mathbb{C}^5$  por vectores  $v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{23}, v_{24}$  e  $v_{34}$ , respectivamente. Estes vectores são linearmente dependentes, mas independentes cinco a cinco, portanto podem ser escolhidos de forma a verificarem a igualdade

$$v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{23} + v_{24} + v_{34} = 0. \quad (2.2)$$

Comecemos pela unicidade. Seja  $F$  um plano que intersecta todas as rectas de  $S$ , distinto dos planos  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$ . Sejam  $r_1$  a recta que passa por  $P_{13}$  e  $P_{24}$  e  $r_2$  a recta que passa por  $P_{14}$  e  $P_{23}$ . Tanto  $r_1$  como  $r_2$  estão em  $S$ , logo o plano  $F$  intersecta ambas estas rectas. Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  pontos de intersecção de  $F$  com  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, e seja  $Q_3 \in F$  um ponto não colinear com  $Q_1$  e  $Q_2$ . Sejam  $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{14}, \epsilon_{23}, \epsilon_{24} \in \mathbb{C}$  tais que o vector

$$\epsilon_{12}v_{12} + \epsilon_{13}v_{13} + \epsilon_{14}v_{14} + \epsilon_{23}v_{23} + \epsilon_{24}v_{24}$$



represente  $Q_3$ . Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  tais que os vectores  $\alpha v_{13} + \beta v_{24}$  e  $\gamma v_{14} + \delta v_{23}$  representem os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. Sejam ainda  $r_3, r_4, r_5$  e  $r_6$  as rectas que passam pelos pontos representados pelos vectores

$$\begin{aligned} r_3 &: v_{12} \quad \text{e} \quad v_{13} + v_{23}; \\ r_4 &: v_{12} \quad \text{e} \quad v_{14} + v_{24}; \\ r_5 &: v_{13} \quad \text{e} \quad v_{12} + v_{23}; \\ r_6 &: v_{14} \quad \text{e} \quad v_{12} + v_{24}; \end{aligned}$$

É fácil verificar que todas estas rectas estão em  $S$ , logo intersectam o plano  $F$ .

Vamos mostrar que  $\alpha \neq 0$ . Para isso, suponhamos que  $\alpha = 0$ . Temos então  $Q_1 = P_{24}$  e  $\beta \neq 0$ , logo podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\beta = 1$ . Podemos ainda supor que  $\epsilon_{24} = 0$ , sem comprometer a não colinearidade dos pontos  $Q_1, Q_2$ , e  $Q_3$ . Como  $F$  intersecta  $r_3$ , os vectores  $v_{24}, \gamma v_{14} + \delta v_{23}, \epsilon_{12}v_{12} + \epsilon_{13}v_{13} + \epsilon_{14}v_{14} + \epsilon_{23}v_{23}, v_{12}$  e  $v_{13} + v_{23}$  são linearmente dependentes, o que faz com que seja nulo o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \epsilon_{14} & \epsilon_{23} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Isto equivale a termos

$$\epsilon_{14}\delta + \epsilon_{13}\gamma - \epsilon_{23}\gamma = 0.$$

Analogamente, como  $F$  intersecta  $r_4$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \epsilon_{14} & \epsilon_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\epsilon_{13}\delta = 0.$$

Caso  $\delta = 0$ , podemos supor  $\gamma = 1$  e, tal como acima,  $\epsilon_{14} = 0$ . Como  $F$  intersecta  $r_5$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{23} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que faz

$$\epsilon_{12} - \epsilon_{23} = 0.$$

Logo  $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23}$  e, portanto, o ponto representado pelo vector  $v_{12} + v_{13} + v_{23}$  está em  $F$ . Mas então, como  $v_{12} + v_{13} + v_{23} = -(v_{14} + v_{24} + v_{34})$ , O plano  $F$  tem três pontos não colineares de  $F_4$ , os pontos  $P_{14}$ ,  $P_{24}$  e o ponto representado pelo vector  $v_{14} + v_{24} + v_{34}$ . Logo  $F = F_4$ , o que contradiz o que supusemos.

Caso  $\delta \neq 0$ , podemos supor  $\delta = 1$  e  $\epsilon_{23} = 0$ . Então  $\epsilon_{13} = \epsilon_{14} = 0$ . Sem perda de generalidade, ponhamos  $\epsilon_{12} = 1$ . Como  $F$  intersecta  $r_5$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\gamma = 0.$$

Logo  $P_{12}, P_{23}, P_{24} \in F$ , donde  $F = F_2$ , o que também é uma contradição.

Assim, não podemos ter  $\alpha = 0$ . Mais uma vez, não perdemos generalidade se tomarmos  $\alpha = 1$  e  $\epsilon_{13} = 0$ .

Caso  $\delta = 0$ , podemos supor novamente  $\gamma = 1$  e  $\epsilon_{14} = 0$  e, como  $F$  intersecta as rectas  $r_3$  e  $r_4$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & 0 & \epsilon_{23} & \epsilon_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & 0 & \epsilon_{23} & \epsilon_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\epsilon_{23}\beta + \epsilon_{24} = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_{23} = 0.$$

Assim,  $\epsilon_{23} = \epsilon_{24} = 0$  e podemos tomar  $\epsilon_{12} = 1$ . Como  $F$  intersecta  $r_5$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\beta = 0.$$

Logo  $P_{12}, P_{13}, P_{14} \in F$ , donde  $F = F_1$ , o que é novamente uma contradição.

Finalmente, caso  $\delta \neq 0$ , tomemos  $\delta = 1$  e  $\epsilon_{23} = 0$ . Analogamente ao que fizemos, como  $F$  intersecta as rectas  $r_3, r_4, r_5$  e  $r_6$ , obtemos as condições

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{14} & 0 & \epsilon_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{14} & 0 & \epsilon_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{14} & 0 & \epsilon_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & 1 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{14} & 0 & \epsilon_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

que equivalem a

$$\begin{aligned} \epsilon_{14}\beta - \epsilon_{24}\gamma &= 0, & \epsilon_{14} - \epsilon_{24} &= 0, \\ \beta(\epsilon_{14} + \epsilon_{12}\gamma) &= 0 & \text{e} & \epsilon_{24} - \epsilon_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Logo  $\epsilon_{12} = \epsilon_{14} = \epsilon_{24}$ ,  $\beta = \gamma$  e  $\beta(1 + \beta) = 0$ . Se tivermos  $\beta = 0$ , teremos também  $\gamma = 0$ , donde  $P_{13}, P_{23}, P_{34} \in F$  e chegaremos à contradição  $F = F_3$ . Logo  $\beta \neq 0$ , donde  $F$  contém os pontos representados pelos vectores  $v_{12} + v_{14} + v_{24}$ ,  $v_{23} - v_{14}$  e  $v_{13} - v_{24}$ . Como estes vectores são linearmente independentes,  $F$  é único nestas condições.

Mostremos agora a existência. Seja  $F_5$  o plano que contém os três pontos representados pelos vectores  $v_{12} + v_{14} + v_{24}$ ,  $v_{23} - v_{14}$  e  $v_{13} - v_{24}$ . Observe-mos que é equivalente considerar os vectores  $v_{12} + v_{13} + v_{23}$ ,  $v_{12} + v_{14} + v_{24}$  e  $v_{12} + v_{23} + v_{24}$ . É fácil verificar que  $F_5$  é um plano distinto dos quatro anteriores. Vejamos que o plano  $F_5$  encontra todas as rectas de  $S$ .

Seja  $r$  uma recta que intersecta os planos  $F_1$  e  $F_2$  nos pontos representados pelos vectores  $x_{12}v_{12} + x_{13}v_{13} + x_{14}v_{14}$  e  $y_{12}v_{12} + y_{23}v_{23} + y_{24}v_{24}$ , respectivamente. Qualquer ponto de  $r$  pode então ser representado por um vector da forma

$$(\alpha x_{12} + \beta y_{12})v_{12} + \alpha x_{13}v_{13} + \alpha x_{14}v_{14} + \beta y_{23}v_{23} + \beta y_{24}v_{24}. \quad (2.3)$$

Consideremos o caso em que  $x_{12}$  e  $y_{12}$  são ambos não nulos. Sem perda de generalidade, podemos supor  $x_{12} = y_{12} = 1$ . A recta  $r$  intersecta o plano  $F_3$  se existirem  $\alpha, \beta, z_{13}, z_{23}, z_{34} \in \mathbb{C}$ , não todos nulos, tais que

$$(\alpha + \beta)v_{12} + \alpha x_{13}v_{13} + \alpha x_{14}v_{14} + \beta y_{23}v_{23} + \beta y_{24}v_{24} = z_{13}v_{13} + z_{23}v_{23} + z_{34}v_{34},$$

o que, por (2.2), equivale a

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v_{12} + \alpha x_{13}v_{13} + \alpha x_{14}v_{14} + \beta y_{23}v_{23} + \beta y_{24}v_{24} &= \\ &= -z_{34}v_{12} + (z_{13} - z_{34})v_{13} - z_{34}v_{14} + (z_{23} - z_{34})v_{23} - z_{34}v_{24}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + z_{34})v_{12} + (\alpha x_{13} - z_{13} + z_{34})v_{13} + (\alpha x_{14} + z_{34})v_{14} + \\ + (\beta y_{23} - z_{23} + z_{34})v_{23} + (\beta y_{24} + z_{34})v_{24} = 0. \end{aligned}$$

Isto só se verifica se for satisfeita a condição

$$(x_{14} - 1)y_{24} = x_{14}. \quad (2.4)$$

Para que  $r$  intersecte também  $F_4$ , obtemos analogamente a condição

$$(x_{13} - 1)y_{23} = x_{13}. \quad (2.5)$$

Suponhamos que  $r \in S$  e, portanto, são satisfeitas as condições (2.4) e (2.5). Consideremos o ponto  $P \in r$  representado pelo vector que se obtém se, em (2.3), tomarmos  $\alpha = 1$  e  $\beta = -(x_{13} - 1)(x_{14} - 1)$ . Este vector é

$$\begin{aligned} (x_{13} + x_{14} - x_{13}x_{14})v_{12} + x_{13}v_{13} + x_{14}v_{14} - \\ - (x_{13} - 1)(x_{14} - 1)y_{23}v_{23} - (x_{13} - 1)(x_{14} - 1)y_{24}v_{24}, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta as condições (2.4) e (2.5), é o mesmo que

$$(x_{13} + x_{14} - x_{13}x_{14})v_{12} + x_{13}v_{13} + x_{14}v_{14} - x_{13}(x_{14} - 1)v_{23} - x_{14}(x_{13} - 1)v_{24},$$

ou seja,

$$x_{13}(v_{12} + v_{13} + v_{23}) + x_{14}(v_{12} + v_{14} + v_{24}) - x_{13}x_{14}(v_{12} + v_{23} + v_{24}).$$

Logo  $P \in F_5$ , donde  $r$  intersecta  $F_5$ .

Resta-nos ver o que se passa no caso em que  $x_{12} = 0$  ou  $y_{12} = 0$ . Suponhamos que  $x_{12} = 0$  e  $y_{12} \neq 0$  e tomemos novamente  $y_{12} = 1$ . Um ponto genérico de  $r$  é então da forma

$$\beta v_{12} + \alpha x_{13}v_{13} + \alpha x_{14}v_{14} + \beta y_{23}v_{23} + \beta y_{24}v_{24}.$$

Para que  $r$  intersecte o plano  $F_3$ , temos de ter

$$\alpha x_{14} = \beta = \beta y_{24}$$

e, para que  $r$  intersecte o plano  $F_4$ , temos de ter

$$\alpha x_{13} = \beta = \beta y_{23}.$$

Estas condições só serão satisfeitas se  $y_{23} = y_{24} = 1$ , donde qualquer ponto de  $r$  será da forma

$$\beta v_{12} + \alpha x_{13} v_{13} + \alpha x_{14} v_{14} + \beta v_{23} + \beta v_{24}.$$

Fazendo  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , verificamos que o ponto representado pelo vector  $v_{12} + v_{23} + v_{24}$  está em  $r$ , portanto  $r$  intersecta  $F_5$ . Com um raciocínio análogo, vemos que se tivermos  $x_{12} \neq 0$  e  $y_{12} = 0$ , o ponto representado pelo vector  $v_{12} + v_{13} + v_{14}$  está na recta  $r$ , donde  $r$  intersecta o plano  $F_5$ .

Suponhamos finalmente que  $x_{12} = y_{12} = 0$ . Qualquer ponto de  $r$  pode ser representado por um vector da forma

$$\alpha x_{13} v_{13} + \alpha x_{14} v_{14} + \beta y_{23} v_{23} + \beta y_{24} v_{24}.$$

Para que  $r$  intersecte o plano  $F_3$ , temos de poder escrever este vector como combinação linear dos vectores  $v_{13}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{34}$  e para isso temos de ter  $x_{14} = 0$  ou  $y_{24} = 0$ . Analogamente, para que  $r$  intersecte o plano  $F_4$ , temos também  $x_{13} = 0$  ou  $y_{23} = 0$ . Como  $x_{13}$  e  $x_{14}$  não podem ser simultaneamente nulos e o mesmo acontece a  $y_{23}$  e  $y_{24}$  temos que ou  $x_{13} = y_{24} = 0$  e, nesse caso, o ponto representado pelo vector

$$v_{14} - v_{23} = (v_{12} + v_{14} + v_{24}) - (v_{12} + v_{23} + v_{24})$$

está em  $r$ , ou  $x_{14} = y_{23} = 0$  e, nesse caso, o ponto representado pelo vector

$$v_{13} - v_{24} = (v_{12} + v_{13} + v_{23}) - (v_{12} + v_{23} + v_{24})$$

está em  $r$ . Em qualquer dos casos,  $r$  intersecta  $F_5$ , como queríamos.  $\square$

**Simetria na escolha destes planos.** Bastante curioso é o facto de os cinco planos referidos neste teorema estarem em situação simétrica, no seguinte sentido: dados quaisquer quatro destes planos, as rectas que os intersectam encontram também o outro. Vejamos. Em primeiro lugar, observemos que o plano  $F_5$  intersecta cada um dos planos  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$  apenas num

ponto. Designemos cada um destes pontos por  $P_{15}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{35}$  e  $P_{45}$ , respectivamente. Com a notação utilizada na demonstração anterior, estes pontos podem ser representados pelos vectores

$$v_{15} = -v_{12} - v_{13} - v_{14},$$

$$v_{25} = -v_{12} - v_{23} - v_{24},$$

$$v_{35} = v_{12} + v_{14} + v_{24}$$

e

$$v_{45} = v_{12} + v_{13} + v_{23}.$$

Verifica-se com facilidade que nenhum hiperplano de  $\mathbb{P}^4$  contém cinco dos pontos  $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}, P_{15}, P_{25}, P_{35}$  e  $P_{45}$ . Assim, quaisquer quatro dos planos  $F_1, F_2, F_3, F_4$  e  $F_5$  estão nas condições do teorema. Consideremos, sem perda de generalidade, os planos  $F_2, F_3, F_4$  e  $F_5$ . Seguindo os passos da demonstração, concluímos que as rectas que intersectam estes quatro planos intersectam ainda o plano que contém os pontos representados pelos vectores  $v_{23} + v_{24} + v_{34}$ ,  $v_{23} + v_{25} + v_{35}$  e  $v_{23} + v_{34} + v_{35}$ . Ora, tendo em conta o que acabámos de ver e a igualdade (2.2), temos que

$$v_{23} + v_{24} + v_{34} = -v_{12} - v_{13} - v_{14},$$

$$v_{23} + v_{25} + v_{35} = v_{23} + (-v_{12} - v_{23} - v_{24}) + (v_{12} + v_{14} + v_{24}) = v_{14}$$

e

$$\begin{aligned} v_{23} + v_{34} + v_{35} &= v_{23} - (v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{23} + v_{24}) + (v_{12} + v_{14} + v_{24}) = \\ &= -v_{13}. \end{aligned}$$

O único plano que contém estes três pontos é precisamente  $F_1$ .

## 2.5 Superfícies de Kummer

Na secção 2.3, observámos as intersecções de  $G_{1,3}$  com subespaços de  $\mathbb{P}^5$ . Aquilo que faremos agora, numa descrição adaptada de [GH94], é observar a intersecção não singular entre  $G_{1,3}$  e uma hipersuperfície quádrlica de  $\mathbb{P}^5$ .

Consideremos a variedade de Grassmann  $G_{1,3}$  e uma outra hipersuperfície quádrlica  $F \subset \mathbb{P}^5$  tal que a variedade  $X = F \cap G_{1,3}$  seja não singular. Para cada ponto  $P \in \mathbb{P}^3$ , definamos  $\omega(P) \subset G_{1,3}$ , tal como na secção 2.3, como o conjunto dos pontos que correspondem às rectas que passam por  $P$ , e definamos

$$X_P := F \cap \omega(P).$$

Consideremos ainda, para cada  $\pi \in \mathbb{P}^{3*}$ , o conjunto  $\omega(\pi) \subset G_{1,3}$ , dos pontos que correspondem às rectas que estão contidas em  $\pi$ , e definamos

$$X_\pi := F \cap \omega(\pi).$$

Observemos que  $\omega(P)$  é a variedade de Schubert  $\Omega(P, \mathbb{P}^3)$  e, dada qualquer recta  $r \subset \pi$ ,  $\omega(\pi)$  é a variedade de Schubert  $\Omega(r, \pi)$ .

Seja  $S$  o conjunto de pontos  $P \in \mathbb{P}^3$  para os quais  $X_P$  é uma variedade singular e seja  $S^*$  o conjunto dos planos  $\pi \in \mathbb{P}^{3*}$  para os quais  $X_\pi$  é singular. Pretendemos mostrar que  $S$  e  $S^*$  são superfícies em  $\mathbb{P}^3$  e  $\mathbb{P}^{3*}$ , respectivamente, às quais chamaremos *superfícies de Kummer*.

### O conjunto $S$ é uma superfície de grau quatro

Vimos na secção 2.3 que, para cada  $P \in \mathbb{P}^3$  e  $\pi \in \mathbb{P}^{3*}$ , os conjuntos  $\omega(P)$  e  $\omega(\pi)$  são planos contidos em  $G_{1,3}$ . No entanto, nem  $\omega(P)$ , nem  $\omega(\pi)$  estão contidos em  $X$ . Isto porque  $X$  não contém nenhum plano de  $\mathbb{P}^5$ . Se assim não fosse, ambas as quádricas  $G_{1,3}$  e  $F$  conteriam um mesmo plano  $V$ . Portanto, as restrições das aplicações de Gauss  $\mathcal{G}_F : F \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  e  $\mathcal{G}_{G_{1,3}} : G_{1,3} \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  a  $V$  seriam isomorfismos entre  $V$  e o subconjunto  $V^*$  de  $\mathbb{P}^{5*}$  formado pelos hiperplanos de  $\mathbb{P}^5$  que contêm  $V$ . Mas, como  $V$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^2$ , o isomorfismo

$$\mathcal{G}_F^{-1} \circ \mathcal{G}_{G_{1,3}} : V \rightarrow V$$

teria um ponto fixo, donde existiria  $x \in V$  tal que  $T_x F = T_x G_{1,3}$ , o que contradiz o facto de a intersecção  $F \cap G_{1,3}$  ser não singular.

Logo  $X_P \neq \omega(P)$  e  $X_\pi \neq \omega(\pi)$ , portanto os conjuntos  $X_P$  e  $X_\pi$  são cónicas, degeneradas no caso de  $P \in S$  ou  $\pi \in S^*$ , respectivamente. Se forem degeneradas, estas cónicas serão a união de duas rectas ou uma recta dupla.

Para conhecer melhor os conjuntos  $S$  e  $S^*$ , definamos  $R$  como sendo o conjunto dos pontos  $P \in S$  tais que  $X_P$  é uma recta dupla e, analogamente,  $R^*$  como sendo o conjunto dos planos  $\pi \in S^*$  tais que  $X_\pi$  é uma recta dupla.

O conjunto dos pontos da variedade de Grassmann  $G_{2,5}$  que correspondem a planos de  $\mathbb{P}^5$  cuja intersecção com  $F$  é singular é definido por polinómios, logo é um fechado de Zariski em  $G_{2,5}$ . Como a aplicação que a cada ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  faz corresponder o plano  $\omega(P)$  é racional, o conjunto  $S$  é a imagem inversa de um fechado por uma aplicação racional, logo também é fechado. Assim,  $S$  é uma subvariedade de  $\mathbb{P}^3$ . A condição adicional de a intersecção de um plano com  $F$  ser uma recta dupla pode também ser traduzida por polinómios nas coordenadas de Plücker do plano. Logo,  $R$  é também um fechado, portanto uma subvariedade de  $S$ .

**Lema 2.10** *Consideremos, para cada  $x \in G_{1,3}$ , o conjunto*

$$U_x := X \cap T_x G_{1,3}.$$

*Então, para  $x \in G_{1,3}$  genérico,  $U_x$  é não singular.*

*Demonstração.* Para cada  $x \in G_{1,3}$ , temos

$$U_x = X \cap T_x G_{1,3} = F \cap G_{1,3} \cap T_x G_{1,3} = F \cap \omega(r_x),$$

como vimos na secção 2.3. Pretendemos mostrar que o conjunto

$$A = \{x \in G_{1,3} : U_x \text{ é não singular}\}$$

é um aberto não vazio de  $G_{1,3}$ . Para isto, basta vermos que  $G_{1,3} \setminus A$  é um fechado de  $G_{1,3}$  de dimensão menor que quatro.

Utilizemos as notações  $y = [y_0 : \cdots : y_5]$  e  $Y = (Y_0, \dots, Y_5)$  (em vez das habituais  $[y_{01} : \cdots : y_{23}]$  e  $(Y_{01}, \dots, Y_{23})$ ) e tomemos  $f \in \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_5]$  tal que  $F = \mathbb{V}(f)$ . Como  $F$  é uma quádrlica, existe uma matriz simétrica  $Q \in \mathcal{M}_{6 \times 6}(\mathbb{C})$ , com  $Q = [q_{ij}]$ , tal que

$$f(Y) = \sum_{i,j=0}^5 q_{ij} Y_i Y_j.$$

Seja, para cada  $k \in \{0, \dots, 5\}$ , o polinómio  $f_k \in \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_5]$  definido por

$$f_k(Y) := \sum_{i=0}^5 q_{ik} Y_i.$$

Então  $f_k(Y) = \frac{\partial f}{\partial Y_k}(Y)$ , portanto o espaço tangente a  $F$  num ponto  $y$  é o ponto de  $\mathbb{P}^{5*}$  de coordenadas  $[f_0(y) : \cdots : f_5(y)]$ . É fácil verificar que as coordenadas do espaço tangente a  $G_{1,3}$  em  $y$  são  $[y_5 : -y_4 : y_3 : y_2 : -y_1 : y_0]$ . Consideremos, para cada  $y \in \mathbb{P}^5$  a matriz

$$M(y) := \begin{bmatrix} y_5 & -y_4 & y_3 & y_2 & -y_1 & y_0 \\ f_0(y) & f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) & f_5(y) \end{bmatrix}.$$

Como as hipersuperfícies  $F$  e  $G_{1,3}$  se intersectam transversalmente, para cada  $y \in X$ , a matriz  $M(y)$  tem característica dois.

Sejam  $\tilde{\mathcal{G}}_F : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  e  $\tilde{\mathcal{G}}_{G_{1,3}} : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  as extensões naturais a  $\mathbb{P}^5$  das aplicações de Gauss  $\mathcal{G}_F$  e  $\mathcal{G}_{G_{1,3}}$ , respectivamente. Sejam, para cada  $y \in \mathbb{P}^5$ ,

$$V_y := \tilde{\mathcal{G}}_F(y) \cap \tilde{\mathcal{G}}_{G_{1,3}}(y)$$



e

$$B_y := \{H \in \mathbb{P}^{5*} : \dim(V_y \cap H) > 2\}.$$

Observemos que, se  $y \in X$ , então  $V_y = T_y F \cap T_y G_{1,3}$ , e este espaço tem dimensão três. Logo, a condição  $\dim(V_y \cap H) > 2$  é equivalente a  $V_y \subset H$ . Mais: se tivermos  $H = T_x G_{1,3}$ , para algum  $x \in G_{1,3}$ , aquela condição é ainda equivalente a termos  $U_x$  singular no ponto  $y$  e, portanto,  $x \notin A$ . Consideremos então o conjunto

$$B := \{(y, H) \in X \times \mathbb{P}^{5*} : H \in B_y\}.$$

Ora, fazendo  $H = [h_0 : \dots : h_5]$ , temos que um par  $(y, H)$  está em  $B$  se e só se  $y \in X$  e a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ y_5 & -y_4 & y_3 & y_2 & -y_1 & y_0 \\ f_0(y) & f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) & f_5(y) \end{bmatrix}$$

for menor que três. Consideremos, para cada  $0 \leq i < j < k \leq 5$ , o polinómio

$$f_{ijk}(y, H) := h_i |M_{jk}(y)| - h_j |M_{ik}(y)| + h_k |M_{ij}(y)|,$$

onde  $M_{rs}(y)$  é a matriz composta pelas colunas  $r$  e  $s$  de  $M(y)$ . Então  $B$  é a subvariedade de  $X \times \mathbb{P}^{5*}$  definida por estes 20 polinómios. Seja  $p : X \times \mathbb{P}^{5*} \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  a projecção na segunda coordenada e seja

$$G'_{1,3} := p^{-1} [\mathcal{G}_{G_{1,3}} [G_{1,3}]].$$

Ora, um hiperplano  $H$  está em  $\mathcal{G}_{G_{1,3}} [G_{1,3}]$  se e só se for tangente a  $G_{1,3}$  nalgum ponto, e isto acontece se e só se  $g(H) = 0$ , onde  $g(H) = h_0 h_5 - h_1 h_4 + h_2 h_3$ . Isto significa que

$$\mathcal{G}_{G_{1,3}} [G_{1,3}] = \{H \in \mathbb{P}^{5*} : g(H) = 0\},$$

donde obtemos a igualdade

$$G'_{1,3} = \{(y, H) \in X \times \mathbb{P}^{5*} : g(H) = 0\}.$$

Logo temos

$$G_{1,3} \setminus A = (\mathcal{G}_{G_{1,3}}^{-1} \circ p) [B \cap G'_{1,3}]$$

e, em particular,  $G_{1,3} \setminus A$  é fechado. Como a característica de  $M(y)$  é dois, para  $y \in X$ , temos que pelo menos um dos polinómios  $|M_{ij}(y)|$  é não nulo.

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $|M_{45}(y)| \neq 0$ . Então os quatro polinómios  $f_{045}$ ,  $f_{145}$ ,  $f_{245}$  e  $f_{345}$  são não nulos, e é fácil verificar que, juntamente com o polinómio  $g$ , geram um ideal de altura cinco. Logo

$$\dim(B \cap G'_{1,3}) \leq \dim(X \times \mathbb{P}^{5*}) - 5 = 3.$$

Assim, temos  $\dim(G_{1,3} \setminus A) \leq 3$ , como queríamos.  $\square$

Tomemos  $x \in G_{1,3}$  tal que  $U_x$  é não singular. Isto implica que  $x \notin F$ , pois, caso contrário, a variedade  $U_x$  seria singular. Ora, tal como vimos na secção 2.3,

$$G_{1,3} \cap T_x G_{1,3} = \omega(r_x) = \bigcup_{P \in r_x} \omega(P),$$

portanto

$$U_x = F \cap \omega(r_x) = \bigcup_{P \in r_x} X_P.$$

Seja  $a \in U_x$ . Como  $x \notin F$ , temos que  $x \notin U_x$ , em particular  $a \neq x$ , logo as rectas  $r_a$  e  $r_x$  são distintas. Portanto, existe um ponto  $Q$  em  $r_x$  que não está em  $r_a$ , ou seja, tal que  $a \notin X_Q$ . Assim, o feixe  $\{X_P\}_{P \in r_x}$  não tem pontos base e, pelo teorema de Bertini, um seu elemento genérico é não singular (ver, por exemplo, [Har93]). Isto significa que o conjunto dos pontos  $P \in r_x$  tais que  $X_P$  é singular é um fechado de Zariski em  $r_x$  (e diferente de  $r_x$ ), logo finito. Em particular,  $S \neq \mathbb{P}^3$ , portanto  $\dim S \leq 2$ .

Mais, se  $P$  for um ponto genérico de  $r_x$ , a característica de Euler de  $U_x$  é dada pela expressão

$$\chi(U_x) = 2\chi(X_P) + \sum_{N \in r_x \cap S} (\chi(X_N) - \chi(X_P)) - n,$$

onde  $n$  é o número de auto-intersecção do feixe (ver [GH94, p. 509]).

Se escolhermos  $Q_1, Q_2 \in r_x$  distintos, os conjuntos  $\omega(Q_1)$  e  $\omega(Q_2)$  intersectam-se apenas no ponto  $x$  (pois  $r_x$  é a única recta que passa por  $Q_1$  e  $Q_2$ ). Logo, como  $x \notin F$ , a intersecção

$$X_{Q_1} \cap X_{Q_2} = F \cap \omega(Q_1) \cap \omega(Q_2)$$

é vazia. Portanto, dois elementos distintos deste feixe não se intersectam, logo  $n$  é zero.

Ora, a superfície  $U_x$  é a intersecção não singular de duas quádricas em  $T_x G_{1,3}$ , e este espaço é isomorfo a  $\mathbb{P}^4$ . Logo,  $U_x$  é isomorfa ao

*blow-up* de  $\mathbb{P}^2$  em cinco pontos não colineares três a três (ver, por exemplo, [GH94, cap. 4, sec. 4]) e, portanto, a sua característica de Euler é oito. Como  $X_P$  é uma cónica, a sua característica de Euler é dois. Logo,

$$\sum_{N \in r_x \cap S} (\chi(X_N) - 2) = 4.$$

Mais: as cónicas de  $U_x$  passam por quatro pontos não colineares três a três, logo nenhuma delas é uma recta dupla. Portanto,  $R \cap r_x = \emptyset$ .

Assim, em geral, uma recta de  $\mathbb{P}^3$  não intersecta  $R$ . Suponhamos então que  $x$  é tal que  $r_x \cap R = \emptyset$ . Para cada ponto  $P \in r_x$ , a cónica  $X_P$  é ou não degenerada, ou a união de duas rectas distintas. Portanto, cada cónica não singular do feixe  $\{X_P\}_{P \in r_x}$  tem um ponto duplo e nenhuma outra singularidade, o que significa que este sistema é um *feixe de Lefschetz*, tal como definido em [GH94, p. 509]. Isto leva-nos a concluir que, se  $P \in r_x$  é tal que a cónica  $X_P$  é não singular, então

$$\chi(U_x) = 2\chi(X_P) + \mu,$$

onde  $\mu$  é a cardinalidade do conjunto  $\{Q \in r_x : X_Q \text{ é singular}\}$ .

Além disso, como a característica de Euler de uma cónica é dois, temos

$$\chi(U_x) = 4 + \mu.$$

Isto significa que  $\mu = 4$ , portanto, dada a generalidade de  $x \in G_{1,3}$ , uma recta geral de  $\mathbb{P}^3$  intersecta  $S$  em quatro pontos. Em particular, concluímos daqui que  $S$  é uma superfície em  $\mathbb{P}^3$  e que o seu grau é quatro.

### A superfície $S$ é não singular em todos os pontos de $S \setminus R$

Vamos agora utilizar o raciocínio que acabámos de fazer para mostrar que  $S$  é não singular em todos os pontos de  $S \setminus R$ . Seja  $Q \in S \setminus R$  e consideremos o sistema linear  $\{U_x\}_{x \in \omega(Q)}$ . O lugar geométrico dos pontos base deste sistema é  $X_Q$ , portanto, pelo teorema de Bertini, para um ponto genérico  $x \in \omega(Q)$ ,  $U_x$  é não singular em  $U_x \setminus X_Q$ . Vejamos o que sucede nos pontos de  $X_Q$ . Como  $Q \in S \setminus R$ , o conjunto  $X_Q$  é a união de duas rectas, que se intersectam num ponto  $a_0$ . Seja  $a \in X_Q \setminus \{a_0\}$ . Como  $X_Q$  é não singular em  $a$ , o espaço tangente  $T_a X_Q$  é uma recta. Mas

$$T_a X_Q = T_a(F \cap \omega(Q)) = T_a F \cap \omega(Q),$$

logo  $\omega(Q) \not\subseteq T_a F$ . Como  $a, x \in \omega(Q)$ , o plano  $\omega(Q)$  está contido em ambos os espaços tangentes  $T_x G_{1,3}$  e  $T_a G_{1,3}$ . Se acrescentarmos a hipótese  $x \notin X_Q$

(que não tira generalidade, pois  $X_Q$  é um fechado de  $\omega(Q)$  e diferente deste espaço), temos  $a \neq x$ . Logo, a intersecção  $T_x G_{1,3} \cap T_a G_{1,3}$  é um espaço de dimensão três. Ora,  $T_a F$  não contém este espaço (senão conteria  $\omega(Q)$ ) e, como

$$T_a U_x = T_a(T_x G_{1,3} \cap X) = T_x G_{1,3} \cap T_a F \cap T_a G_{1,3},$$

o espaço  $T_a U_x$  tem dimensão dois. Logo  $U_x$  não é singular em  $a$ . Assim, para um ponto genérico  $x \in \omega(Q)$ ,  $U_x$  é não singular em  $U_x \setminus \{a_0\}$ .

Observemos agora o seguinte: o sistema linear  $\{T_x G_{1,3}\}_{x \in \omega(Q)}$  é um plano em  $\mathbb{P}^{5*}$  e todos os seus elementos contêm o plano  $\omega(Q)$ ; como o sistema  $\{H\}_{\omega(Q) \subset H \in \mathbb{P}^{5*}}$  também é um plano e contém  $\{T_x G_{1,3}\}_{x \in \omega(Q)}$ , temos

$$\{T_x G_{1,3}\}_{x \in \omega(Q)} = \{H\}_{\omega(Q) \subset H \in \mathbb{P}^{5*}};$$

logo a generalidade dos hiperplanos do sistema  $\{T_x G_{1,3}\}_{x \in \omega(Q)}$  não contém o espaço  $T_{a_0} X$ . Isto significa que, para  $x$  suficientemente genérico,  $U_x$  é não singular.

Pelo que vimos acima, se  $x$  é um ponto de  $\omega(Q)$  tal que  $U_x$  é não singular, a recta  $r_x$  intersecta  $S$  em quatro pontos, portanto intersecta esta superfície transversalmente. Assim, vimos que uma recta genérica de  $\mathbb{P}^3$  que passe por  $Q$  intersecta  $S$  transversalmente, o que mostra que  $S$  não é singular em  $Q$ .

### O conjunto $R$ tem exactamente 16 pontos

O cálculo de Schubert vai permitir-nos conhecer  $R$ . Para tal, calculemos a classe de cohomologia do conjunto dos planos contidos em  $G_{1,3}$ , que notamos por  $\Sigma_{2,4}$ . Ora, como vimos acima,

$$\Sigma_{2,4} = \{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3} \cup \{\omega(\pi)\}_{\pi \in \mathbb{P}^{3*}}.$$

Mostra-se, com a ajuda de cálculos triviais, que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \rightarrow & \{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3} \\ P & \mapsto & \omega(P) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{3*} & \rightarrow & \{\omega(\pi)\}_{\pi \in \mathbb{P}^{3*}} \\ \pi & \mapsto & \omega(\pi) \end{array}$$

são isomorfismos, donde se conclui que os conjuntos  $\{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3}$  e  $\{\omega(\pi)\}_{\pi \in \mathbb{P}^{3*}}$  têm dimensão três, portanto a sua união também tem esta dimensão. Assim, a classe de cohomologia de  $\Sigma_{2,4}$  está em  $H^{12}(G_{2,5}, \mathbb{Z})$  e, portanto, é combinação linear dos ciclos de Schubert  $\Omega(0, 1, 5)$ ,  $\Omega(0, 2, 4)$  e  $\Omega(1, 2, 3)$ . Para a conhecermos, calculemos os números de intersecção  $\Sigma_{2,4} \cdot \Omega(a_0, a_1, a_2)$ , onde  $(a_0, a_1, a_2)$  é um dos ternos  $(0, 4, 5)$ ,  $(1, 3, 5)$  ou  $(2, 3, 4)$ .

Para efectuar este cálculo, escolhamos subespaços  $H_{a_0}, H_{a_1}, H_{a_2} \subseteq \mathbb{P}^5$  tais que, para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\dim H_{a_i} = a_i$ . Começemos por observar que,

desde que escolhidos genericamente, os subespaços  $H_{a_0}$ ,  $H_{a_1}$  e  $H_{a_2}$  intersectam transversalmente  $G_{1,3}$  e estas intersecções são quádricas de dimensões  $a_0 - 1, a_1 - 1, a_2 - 1$  respectivamente (no caso  $a_0 = 0$ , o ponto  $H_0$  é escolhido fora de  $G_{1,3}$ ). Ora, como uma quádrica de dimensão  $l$  não pode conter subespaços de dimensão maior que  $\frac{l}{2}$ , para que um plano  $N$  esteja em  $\Sigma_{2,4} \cap \Omega(a_0, a_1, a_2)$ , temos de ter

$$\dim(N \cap H_{a_i}) \leq \frac{a_i - 1}{2},$$

para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Logo, para que o número de intersecção  $\Sigma_{2,4} \cdot \Omega(a_0, a_1, a_2)$  seja não nulo, temos necessariamente  $a_0 \geq 1$ ,  $a_1 \geq 3$  e  $a_2 \geq 5$ . Mas, como  $a_0 + a_1 + a_2 = 9$ , a única hipótese que nos resta é  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_2 = 5$ .

Assim, o único número de intersecção não nulo é  $\Sigma_{2,4} \cdot \Omega(1, 3, 5)$ . Calculêmo-lo. Sejam  $H_1 \subseteq H_3$  subespaços de  $\mathbb{P}^5$ , de dimensões um e três, respectivamente, que intersectem  $G_{1,3}$  transversalmente. Sendo assim, a recta  $H_1$  intersecta  $G_{1,3}$  em dois pontos,  $x_1$  e  $x_2$ , e  $H_3 \cap G_{1,3}$  é uma superfície quádrica não singular.

Consideremos um plano  $N$  que pertença a  $\Sigma_{2,4} \cap \Omega(H_1, H_3, \mathbb{P}^5)$ . Este plano tem de intersectar  $H_1$  pelo menos num ponto e  $H_3$  pelo menos numa recta.

A intersecção  $N \cap H_1$  ocorre necessariamente num dos pontos  $x_1$  ou  $x_2$  e apenas num deles, pois, caso ambos os pontos pertencessem a  $N$ , teríamos  $H_1 \subseteq N$  e, como  $N \subseteq G_{1,3}$ , a intersecção de  $H_1$  com  $G_{1,3}$  não seria transversal.

Seja  $i \in \{1, 2\}$  tal que  $x_i \in N$  e seja  $M_i$  um hiperplano de  $T_{x_i}G_{1,3}$  ao qual não pertença  $x_i$ . Então  $M_i$  intersecta  $G_{1,3}$  numa superfície quádrica não singular  $Q_i$  e  $G_{1,3} \cap T_{x_i}G_{1,3}$  é o cone das rectas que passam por  $x_i$  e por  $Q_i$ .

Como  $H_3$  intersecta  $G_{1,3}$  transversalmente, a dimensão de  $H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}$  é a mínima possível, ou seja, dois. Ora, como  $H_3$  e  $M_i$  têm ambos dimensão três, a sua intersecção é, pelo menos, numa recta. Mas como  $x_i \in H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}$  e  $x_i \notin M_i$ , podemos afirmar que  $H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3} \not\subseteq M_i$ ; logo a intersecção  $H_3 \cap M_i$ , que é o mesmo que  $(H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}) \cap M_i$ , é um subespaço próprio de  $H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}$  e, portanto, é uma recta.

Como  $N, M_i \subset T_{x_i}G_{1,3}$ , a intersecção de  $N$  com  $M_i$  é pelo menos uma recta (a dimensão de  $T_{x_i}G_{1,3}$  é quatro,  $N$  é um plano e  $M_i$  tem dimensão três). Como  $N \not\subseteq M_i$  (pois  $x_i \in N$  e  $x_i \notin M_i$ ),  $N \cap M_i$  é exactamente uma recta. O plano  $N$  será então o único que contém  $x_i$  e a recta  $N \cap M_i$ .

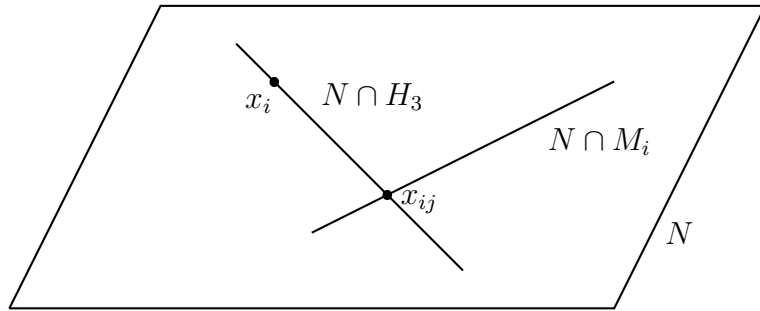
Como a superfície quádrica  $H_3 \cap G_{1,3}$  é não singular, a sua intersecção com o plano  $H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}$  é a união de duas rectas concorrentes em  $x_i$ . Logo, a recta  $H_3 \cap M_i$ , que está contida em  $H_3 \cap T_{x_i}G_{1,3}$  e não passa por  $x_i$ , intersecta  $G_{1,3}$  em dois pontos,  $x_{i1}$  e  $x_{i2}$ .

Como  $N$  não pode estar contido na superfície  $H_3 \cap G_{1,3}$ , o subespaço  $H_3 \cap N$  é uma recta. Esta recta intersecta  $N \cap M_i$  e esta intersecção tem de ocorrer num dos pontos  $x_{i1}$  ou  $x_{i2}$ . Assim, um destes pontos pertence a  $N$ . Não podem pertencer ambos, pois, nesse caso, teríamos  $H_3 \cap M_i \subset N \subset G_{1,3}$ .

Seja  $j \in \{1, 2\}$  tal que  $x_{ij} \in N$ . Temos, então

$$N \subseteq T_{x_i}G_{1,3} \cap T_{x_{ij}}G_{1,3} \cap G_{1,3}.$$

Ora, a aplicação de Gauss de  $G_{1,3}$  é injectiva, pois  $G_{1,3}$  é uma quádrlica não singular. Portanto, os espaços  $T_{x_i}G_{1,3}$  e  $T_{x_{ij}}G_{1,3}$  são distintos e a sua intersecção é um espaço de dimensão três. A intersecção  $T_{x_i}G_{1,3} \cap T_{x_{ij}}G_{1,3} \cap G_{1,3}$  será então uma superfície quádrlica, singular em ambos os pontos  $x_i$  e  $x_{ij}$ , portanto união de dois planos (necessariamente distintos, pois  $G_{1,3}$  é não singular).



Assim, para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ , há exactamente dois planos que contêm os pontos  $x_i$  e  $x_{ij}$  e estão em  $\Sigma_{2,4} \cap \Omega(H_1, H_3, \mathbb{P}^5)$ . Logo,

$$\Sigma_{2,4} \cdot \Omega(1, 3, 5) = 8.$$

Como as duas famílias de planos em  $G_{1,3}$  podem ser transformadas uma na outra por meio de um automorfismo de  $\mathbb{P}^5$ , as classes de cohomologia de  $\{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3}$  e de  $\{\omega(\pi)\}_{\pi \in \mathbb{P}^{3*}}$  são iguais, logo a classe de cohomologia de ambos é  $4\Omega(0, 2, 4)$ .

Concluimos que a classe de cohomologia do subconjunto  $\tau = \{\omega(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3}$  é  $4\Omega(0, 2, 4)$ . Para conhecermos  $R$ , devemos avaliar a intersecção  $\tau \cap \omega_F$ , onde

$$\omega_F = \{N \in \mathbb{G}(2, 5) : N \cap F \text{ é uma recta dupla}\}.$$

Uma vez que  $\tau \sim 4\Omega(0, 2, 4)$ , basta-nos calcular o número de intersecção  $\Omega(0, 2, 4) \cdot \omega_F$ .

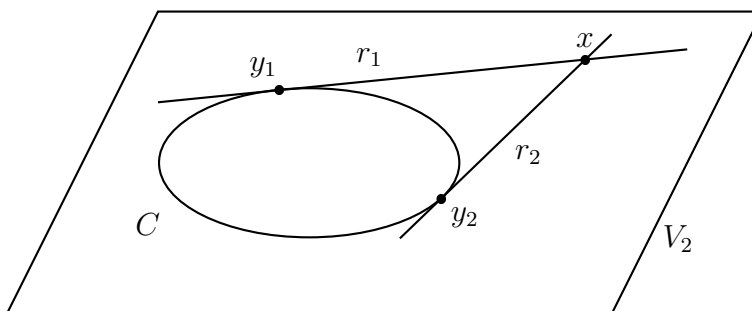
Para tal, consideremos um ponto  $x \in \mathbb{P}^5$  e subespaços  $V_2$  e  $V_4$  de  $\mathbb{P}^5$  de dimensões dois e quatro, respectivamente, com  $x \in V_2 \subseteq V_4$ , genericamente

escolhidos de modo que  $x \notin F$  e  $V_2$  e  $V_4$  intersectem  $F$  transversalmente. Isto significa que  $V_2 \cap F$  é uma cónica não singular  $C$  e  $V_4 \cap F$  é uma quádrlica  $Q$  de dimensão três, também não singular.

Dado  $N \in \Omega(x, V_2, V_4) \cap \omega_F$ , temos que  $x \in N$ ,  $N$  e  $V_2$  têm pelo menos uma recta em comum e  $N \subset V_4$ .

Como a intersecção  $N \cap F$  é uma recta dupla, qualquer que seja  $y \in N \cap F$ , temos  $N = T_y(N \cap F) = N \cap T_y F$ , donde  $N \subset T_y F$ . Daqui concluimos que  $N$  e  $V_2$  têm exactamente uma recta em comum, pois  $V_2 \not\subset T_y F$ , uma vez que  $V_2$  intersecta  $F$  transversalmente.

A recta  $N \cap V_2$  é tangente a  $C$ , pois, caso contrário, intersectaria esta cónica em dois pontos e estes dois pontos também estariam na recta  $N \cap F$  e, portanto, teríamos  $N \cap V_2 = N \cap F \subset C$ . Logo  $N \cap V_2$  é uma das duas rectas  $r_1, r_2$  de  $V_2$  que passam por  $x$  e são tangentes a  $C$ .

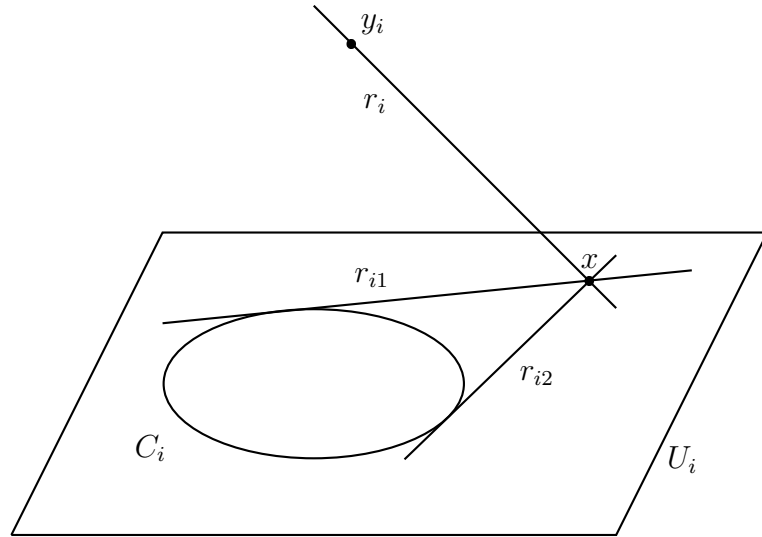


Sejam  $y_1$  e  $y_2$  os pontos de tangência das rectas  $r_1$  e  $r_2$  com  $C$ , respectivamente. Seja  $i \in \{1, 2\}$  tal que  $N \cap V_2 = r_i$ . Sabemos que o lugar geométrico das rectas contidas na quádrlica  $Q$  que passam por  $y_i$  é  $Q \cap T_{y_i} Q$ . Seja  $U_i$  um plano de  $T_{y_i} Q$  que contenha  $x$  e não contenha  $y_i$ . Seja  $C_i$  a cónica  $F \cap U_i$ . Como  $Q$  é não singular e  $C_i = Q \cap U_i$ , esta cónica é não singular e  $Q \cap T_{y_i} Q$  é o cone das rectas que passam por  $y_i$  e por  $C_i$ .

Observemos que  $U_i \subset V_4 \cap T_{y_i} F$ , porque, por um lado,  $T_{y_i} Q \subset T_{y_i} F$ , por outro,  $T_{y_i} Q \subset V_4$ . Como  $N$  contém  $y_i$ , temos também  $N \subset V_4 \cap T_{y_i} F$ , porque  $y_i$  pertence à recta  $N \cap F$ , logo  $N$  é tangente a  $F$  em  $y_i$ .

Reparemos ainda que, como  $V_4$  intersecta  $F$  transversalmente,  $V_4 \cap T_{y_i} F$  tem a dimensão mínima possível, ou seja, três. Como ambos os planos  $N$  e  $U_i$  estão contidos neste espaço e são distintos ( $y_i \in N$  e  $y_i \notin U_i$ ), a sua intersecção é uma recta.

Caso a recta  $N \cap U_i$  intersectasse  $C_i$  em dois pontos, conteria dois pontos da recta  $N \cap F$  e, portanto, esta recta estaria contida no plano  $U_i$ , o que não é possível porque  $y_i$  está em  $N \cap F$  e não está em  $U_i$ .



Assim, a recta  $N \cap U_i$  é necessariamente uma das duas tangentes  $r_{i1}$ ,  $r_{i2}$  a  $C_i$  que passam por  $x$ .

Portanto,  $N$  é um dos quatro planos definidos pelas rectas  $r_i$  e  $r_{ij}$ , com  $i, j \in \{1, 2\}$ . Como todos estes planos pertencem a  $\Omega(x, V_2, V_4) \cap \omega_F$ , temos

$$\Omega(0, 2, 4) \cdot \omega_F = 4$$

e, portanto,

$$\tau \cdot \omega_F = 16.$$

Concluimos, assim, que  $R$  é um conjunto de 16 pontos.

Todos os argumentos anteriores podem ser adaptados para o conjunto  $S^*$ , a *superfície de Kummer dual*, que terá também 16 singularidades, exactamente os pontos de  $R^*$ .



## CAPÍTULO 3

# As 27 rectas de uma superfície cúbica

Abordaremos a seguir o problema de encontrar o número de rectas que estão contidas numa superfície cúbica não singular de  $\mathbb{P}^3$ . Começaremos por estudar duas resoluções deste problema e descrever a configuração destas rectas, bem como uma simetria patente nesta configuração.

### 3.1 Uma primeira construção

Comecemos por um exemplo. Seja  $S_0 = \mathbb{V}(X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ . Se intersectarmos  $S_0$  com o plano  $\mathbb{V}(X_0 + X_1)$ , obtemos o conjunto

$$\mathbb{V}(X_0 + X_1, X_2^3 + X_3^3)$$

e, como o segundo polinómio se factoriza em

$$(X_2 + X_3)(X_2 + \rho X_3)(X_2 + \tau X_3),$$

onde  $\rho = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$  e  $\tau = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ , este conjunto é a união de três rectas.

Podemos fazer um raciocínio análogo para outros planos e concluímos que estão contidas em  $S_0$  as rectas que resultam das intersecções de cada um dos planos

$$\mathbb{V}(X_m + X_j), \quad \mathbb{V}(X_m + \rho X_j) \quad \text{e} \quad \mathbb{V}(X_m + \tau X_j)$$

com cada um dos planos

$$\mathbb{V}(X_k + X_l), \quad \mathbb{V}(X_k + \rho X_l) \quad \text{e} \quad \mathbb{V}(X_k + \tau X_l),$$

onde  $\{m, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ . Se verificarmos todas as possibilidades, concluímos que são exactamente 27 rectas. Investigando as intersecções de  $S_0$  com planos arbitrários de  $\mathbb{P}^3$ , verificamos mesmo que não há mais nenhuma recta contida nesta superfície.

O que se segue, baseado em [Rei94], mostrará que o mesmo se passa para qualquer superfície cúbica não singular.

Para conhecermos o número de rectas que estão contidas numa superfície cúbica não singular, vamos “olhar” para a sua posição relativa. Começaremos por supor que existe pelo menos uma recta contida na superfície. Posteriormente, mostraremos que esta suposição é desnecessária, pois qualquer superfície cúbica não singular contém, de facto, pelo menos uma recta.

Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície cúbica não singular e seja  $f \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  um polinómio de grau três tal que  $S = \mathbb{V}(f)$ . Suponhamos que  $S$  contém, pelo menos, uma recta.

**Proposição 3.1** *Dado um plano  $H \subset \mathbb{P}^3$ , a sua intersecção com  $S$  é ou uma cúbica irredutível, ou a união de uma cónica e uma recta ou a união de três rectas distintas.*

*Demonstração.* A intersecção de  $S$  com  $H$  é uma curva de grau três em  $H$  e portanto, se não for irredutível, é a união de uma cónica com uma recta ou a união de três rectas (contadas com multiplicidades). Para demonstrarmos esta proposição temos de garantir que, neste último caso, as três rectas são distintas. Basta, portanto, mostrar que uma recta dupla ou tripla nunca ocorre.

Seja  $r$  uma recta contida em  $H$  e consideremos uma mudança de coordenadas tal que  $H = \mathbb{V}(X_3)$  e  $r = \mathbb{V}(X_2, X_3)$ . Então, se  $r$  for uma recta dupla ou tripla da intersecção  $S \cap H$ , o monómio  $X_2^2$  divide os monómios de  $f$  que não se anulam em  $H$ , isto é, existem polinómios homogéneos  $h, l \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , de graus um e dois respectivamente, tais que

$$f = X_2^2 h + X_3 l.$$

Seja  $a = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$  um ponto de  $\mathbb{V}(X_2, X_3, l)$ . Então  $a_2 = a_3 = 0$  e as derivadas de  $f$  em  $a$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_0}(a) &= a_2^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial X_0}(a) + a_3 \cdot \frac{\partial l}{\partial X_0}(a) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial X_1}(a) &= a_2^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial X_1}(a) + a_3 \cdot \frac{\partial l}{\partial X_1}(a) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial X_2}(a) &= 2a_2 \cdot h(a) + a_2^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial X_2}(a) + a_3 \cdot \frac{\partial l}{\partial X_2}(a) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial X_3}(a) = a_2^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial X_3}(a) + l(a) + a_3 \cdot \frac{\partial l}{\partial X_3}(a) = 0.$$

Logo,  $S$  é singular no conjunto  $\mathbb{V}(X_2, X_3, l)$ , que não é vazio, pois é o conjunto dos zeros de  $l$  em  $r$ . Isto não se pode verificar, pois  $S$  é não singular. Assim, uma recta dupla ou tripla não pode ocorrer em  $S \cap H$ .  $\square$

**Proposição 3.2** *Dado um ponto  $P \in S$ , existem no máximo três rectas contidas em  $S$  que passam por  $P$ . Caso existam duas ou três, estas rectas são complanares.*

*Demonstração.* Qualquer recta contida em  $S$  que passe por  $P$  está contida no plano  $T_P S$ . Pela proposição anterior, a intersecção de  $S$  com  $T_P S$  contém no máximo três rectas distintas, donde se conclui o resultado.  $\square$

**Proposição 3.3** *Dada uma recta  $r \subset S$ , existem exactamente cinco pares  $\{r_1, r'_1\}, \dots, \{r_5, r'_5\}$  de rectas contidas em  $S$  que intersectam  $r$  tais que:*

1. para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , as rectas  $r$ ,  $r_i$  e  $r'_i$  são complanares e distintas;
2. para cada  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , se  $i \neq j$ , então  $(r_i \cup r'_i) \cap (r_j \cup r'_j) = \emptyset$ .

*Demonstração.* Se  $H$  é um plano que contém  $r$ , a intersecção  $H \cap S$  é a união de  $r$  com uma cónica. Para mostrar a primeira parte, temos que mostrar que existem exactamente cinco planos para os quais esta cónica é degenerada.

Suponhamos, uma vez mais, que  $r = \mathbb{V}(X_2, X_3)$ . Como os pontos

$$\begin{array}{ll} P = [1 : 0 : 0 : 0], & Q = [0 : 1 : 0 : 0], \\ M = [1 : 1 : 0 : 0] & \text{e} \quad N = [1 : -1 : 0 : 0] \end{array}$$

estão em  $r$ , estes pontos pertencem a  $S$  e, portanto, os coeficientes dos monómios  $X_0^3$ ,  $X_0^2 X_1$ ,  $X_0 X_1^2$ , e  $X_1^3$  de  $f$  são nulos. Assim, existem  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}[X_2, X_3]$  tais que

$$f = AX_0^2 + BX_0 X_1 + CX_1^2 + DX_0 + EX_1 + F. \quad (3.1)$$

Um plano que contenha  $r$  é da forma  $H = \mathbb{V}(\alpha X_2 + \beta X_3)$ , logo é o conjunto dos pontos do tipo  $[x_0 : x_1 : -\beta : \alpha]$ . Logo a intersecção  $H \cap S$  será a união de

três rectas se e só se o polinómio  $f(X_0, X_1, -\beta, \alpha)$  for redutível. Isto acontece se e só se  $\Delta(-\beta, \alpha) = 0$ , onde  $\Delta$  é o polinómio

$$\Delta = 4 \cdot \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix} = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - B^2F.$$

Como  $\Delta$  tem grau cinco, tem cinco raízes, contadas com multiplicidades. Se nenhuma destas raízes for múltipla, existem, de facto, cinco planos naquelas condições, como pretendíamos. Para cada um destes planos, a sua intersecção com  $S$  será a união de três rectas distintas, pela proposição 3.1. Verifiquemos que todas as raízes de  $\Delta$  são simples.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o ponto  $[0 : 1]$  é uma raiz de  $\Delta$  (isto equivale a tomar um plano  $H$  cuja intersecção com  $S$  seja a união de  $r$  com duas outras rectas e exigir que a mudança de coordenadas que considerámos acima seja tal que  $H = \mathbb{V}(X_2)$ ). Para vermos que  $[0 : 1]$  não é raiz múltipla de  $\Delta$ , basta verificarmos que  $X_2^2$  não divide  $\Delta$ . Ora  $H \cap S$  é a união de três rectas, a recta  $r$  e outras duas,  $r_1$  e  $r'_1$ . Se estas três rectas não tiverem um ponto comum, podemos tomar uma mudança de coordenadas tal que

$$r = \mathbb{V}(X_2, X_3), \quad r_1 = \mathbb{V}(X_0, X_2) \quad \text{e} \quad r'_1 = \mathbb{V}(X_1, X_2);$$

caso haja um ponto comum às três, podemos tomar uma mudança de coordenadas tal que

$$r = \mathbb{V}(X_2, X_3), \quad r_1 = \mathbb{V}(X_0, X_2) \quad \text{e} \quad r'_1 = \mathbb{V}(X_0 - X_3, X_2).$$

No primeiro caso, temos

$$f(X_0, X_1, X_2, X_3) = \alpha X_0 X_1 X_3 + X_2 h(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $h$  é um polinómio do segundo grau. Isto significa que, na expressão (3.1), temos  $B = \alpha X_3 + aX_2$  e que  $X_2$  divide os polinómios  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Assim, temos

$$\Delta \equiv -X_3^2 F \pmod{X_2^2}.$$

Para que  $S$  não seja singular no ponto  $[0 : 0 : 0 : 1]$ , o coeficiente de  $F$  em  $X_2 X_3^2$  tem de ser não nulo. Em particular,  $X_2^2$  não divide  $F$ , donde  $[0 : 1]$  é uma raiz simples de  $\Delta$ . No segundo caso, temos

$$f(X_0, X_1, X_2, X_3) = \alpha X_0 X_3 (X_0 - X_3) + X_2 h(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $h$  é um polinómio de segundo grau. Isto faz com que, na expressão (3.1), tenhamos  $A = \alpha X_3 + aX_2$ ,  $D = -\alpha X_3^2 + \beta X_2 X_3 + \gamma X_2^2$  e que  $X_2$  divida os polinómios  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $F$ . Assim, temos

$$\Delta \equiv -X_3^4 C \text{ modulo } X_2^2.$$

Para que  $S$  não seja singular no ponto  $Q$ , o polinómio  $C$  não pode ser nulo, donde  $X_2^2$  não divide  $\Delta$  e, portanto,  $[0 : 1]$  é uma raiz simples de  $\Delta$ .

A segunda afirmação resulta agora das proposições 3.1 e 3.2.  $\square$

**Corolário 3.4** *Existem, pelo menos, duas rectas disjuntas contidas em  $S$ .*

*Demonstração.* Basta considerar, para uma recta  $r \subset S$  (que já sabemos existir), as rectas  $r_1$  e  $r_2$  da proposição anterior.  $\square$

**Corolário 3.5** *A superfície  $S$  é birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}^2$ .*

*Demonstração.* Consideremos duas rectas disjuntas  $r_1$  e  $r_2$  contidas em  $S$  e sejam  $\varphi : S \dashrightarrow r_1 \times r_2$  e  $\psi : r_1 \times r_2 \dashrightarrow S$  as aplicações racionais definidas como se descreve a seguir.

Seja  $P \in \mathbb{P}^3 \setminus (r_1 \cup r_2)$ . Existe uma única recta  $s$  que passa por  $P$  e intersecta as rectas  $r_1$  e  $r_2$  (basta pensar no plano  $\pi$  que contém o ponto  $P$  e a recta  $r_1$ : como a recta  $r_2$  não intersecta  $r_1$ , não pode estar contida em  $\pi$ , logo, se  $P'$  for o ponto da intersecção  $r_2 \cap \pi$ , a única recta que passa por  $P$  e intersecta as rectas  $r_1$  e  $r_2$  é a recta que passa por  $P$  e  $P'$ ). Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  os pontos das intersecções  $s \cap r_1$  e  $s \cap r_2$ , respectivamente, e façamos  $\Phi(P) = (Q_1, Q_2)$ . Isto define uma aplicação  $\Phi : \mathbb{P}^3 \setminus (r_1 \cup r_2) \rightarrow (r_1 \times r_2)$  e podemos tomar para  $\varphi$  a restrição de  $\Phi$  a  $S \setminus (r_1 \cup r_2)$ .

Seja  $(Q_1, Q_2) \in r_1 \times r_2$ . Em geral, a recta  $Q_1 Q_2$  encontrará  $S$  num terceiro ponto  $P$ . Definimos então  $\psi(Q_1, Q_2) = P$ . Ora, a única recta que passa por este ponto e pelas rectas  $r_1$  e  $r_2$  é precisamente a recta  $Q_1 Q_2$ , o que significa que  $\varphi(P) = (Q_1, Q_2)$ . Portanto, as aplicações  $\varphi$  e  $\psi$  são inversas uma da outra e definem um isomorfismo entre um aberto de  $r_1 \times r_2$  e um aberto de  $S$ . Como  $r_1 \times r_2$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  e este conjunto é birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}^2$ , obtemos o resultado.  $\square$

**Lema 3.6** *Sejam  $r_1, r_2, r_3, r_4 \subset \mathbb{P}^3$  rectas enviesadas duas a duas, tais que não exista nenhuma superfície quádrlica que as contenha. Então o número de rectas que intersectam simultaneamente  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  é um ou dois.*

*Demonstração.* Pelo lema 2.8, se as rectas  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são enviesadas duas a duas, existe uma superfície quádrlica não singular que as contém. Além disso, se  $r_4$  não estiver contida nesta quádrlica, há uma ou duas (caso mais geral) rectas que intersectam simultaneamente  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$ .  $\square$

### As 27 rectas

Sejam  $r$  e  $s$  duas rectas disjuntas contidas em  $S$ . Seja  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e consideremos o par  $\{r_i, r'_i\}$  de rectas contidas em  $S$  que intersectam  $r$ , como na proposição 3.3. Seja  $H_i$  o plano que contém as rectas  $r, r_i$  e  $r'_i$ . A recta  $s$  intersecta necessariamente  $H_i$  e, como  $H_i \cap S = r \cup r_i \cup r'_i$ ,  $s$  tem de intersectar uma das rectas  $r_i$  ou  $r'_i$ . Não pode intersectar ambas porque, nesse caso, estaria contida em  $H_i$  e, portanto, intersectaria  $r$ ; vejamos porquê: se  $s$  intersectasse aquelas rectas em dois pontos distintos,  $s$  estaria obviamente contida no plano que contém  $r_i$  e  $r'_i$ , que é  $H_i$ ; se  $s$  intersectasse  $r_i \cap r'_i$ ,  $s$  estaria contida no espaço tangente a  $S$  no ponto de intersecção destas rectas, que é precisamente  $H_i$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $s$  intersecta  $r_i$ .

A recta  $s$  também admite cinco pares de rectas que a intersectam, tal como descrito na proposição 3.3. Como as rectas  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$  intersectam  $s$  e são disjuntas duas a duas, já temos um elemento de cada par. Para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , denotemos por  $r''_i$  a outra recta em cada par. Esta recta não pode intersectar  $r$ , porque, se assim fosse,  $r$  estaria contida no plano que contém  $r_i, r''_i$  e  $s$ , donde  $r$  e  $s$  não seriam disjuntas.

Ora, ainda pela proposição 3.3, se  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  é diferente de  $i$ , as rectas  $r''_i$  e  $r_j$  não se intersectam. Por outro lado, como qualquer recta contida em  $S$  tem de intersectar  $r \cup r_j \cup r'_j$ ,  $r''_i$  tem de intersectar  $r'_j$ .

Obtivemos, até aqui, 17 rectas contidas em  $S$ : as rectas  $r$  e  $s$  e, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , as rectas  $r_i, r'_i$  e  $r''_i$ . Para prosseguirmos, mostremos o seguinte resultado.

**Lema 3.7** *Consideremos as rectas  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$  acima referidas.*

1. *Se  $t$  é uma recta distinta das 17 já consideradas, então  $t$  intersecta exactamente três daquelas rectas.*
2. *Reciprocamente, dados três índices distintos  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , existe uma única recta  $r_{ijk}$  contida em  $S$  que intersecta  $r_i, r_j$  e  $r_k$ .*

*Demonstração.* Quatro rectas contidas em  $S$ , disjuntas duas a duas, não podem estar todas também contidas numa superfície quádrlica. Caso assim

fosse, estas rectas pertenceriam à mesma família irredutível de rectas contidas nesta quádrlica e qualquer recta da outra família intersectaria  $S$  em quatro pontos distintos e, conseqüentemente estaria contida em  $S$ . Ora, então a própria quádrlica estaria contida em  $S$ , o que não pode suceder, visto que  $S$ , por ser não singular, é irredutível.

Para a primeira parte, vejamos que dado  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $t$  intersecta o plano  $H_i$  que contém as rectas  $r$ ,  $r_i$  e  $r'_i$ , logo intersecta uma delas. Como  $t$  não intersecta  $r$  (porque as dez rectas que intersectam  $r$  já foram consideradas),  $t$  terá de intersectar  $r_i$  ou  $r'_i$ .

Se  $t$  intersectar quatro ou mais das rectas  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$ , pelo lema 3.6,  $t$  seria uma das rectas  $r$  ou  $s$ , o que contraria o que supusemos.

Se  $t$  intersectar menos de três daquelas rectas, então intersecta pelo menos três das rectas  $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$  e  $r'_5$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $t$  intersecta as rectas  $r'_2, r'_3, r'_4$  e  $r'_5$  ou as rectas  $r_1, r'_3, r'_4$  e  $r'_5$ . Pelo que vimos acima,  $r$  e  $r''_1$  intersectam simultaneamente as rectas  $r_1, r'_2, r'_3, r'_4$  e  $r'_5$ . Novamente pelo lema 3.6, como  $t$  intersecta pelo menos quatro destas rectas,  $t$  terá de ser uma das rectas  $r$  ou  $r''_1$ , o que volta a contradizer o que supusemos.

Assim,  $t$  intersecta exactamente três daquelas rectas.

Para a segunda parte, observemos que existem exactamente dez rectas contidas em  $S$  que intersectam  $r_i$ , das quais apenas conhecemos as rectas  $r$ ,  $r'_i, r''_i$  e  $s$ . Pelo que acabámos de ver, cada uma das restantes seis intersecta duas das quatro rectas  $r_l$ , com  $l \neq i$ . Mas existem no máximo  $6 = \binom{4}{2}$  rectas nestas condições, logo todas têm de estar contidas em  $S$ . Em particular, existe uma recta  $r_{ijk}$  contida em  $S$  que intersecta as rectas  $r_i, r_j$  e  $r_k$ .  $\square$

**Corolário 3.8** *A superfície  $S$  tem exactamente 27 rectas.*

*Demonstração.* Com o lema anterior completámos a descrição das rectas contidas em  $S$ : às 17 que tínhamos considerado já, vêm juntar-se as dez rectas do conjunto

$$\{r_{ijk} : 1 \leq i < j < k \leq 5\}.$$

$\square$

Podemos concluir, em particular, que a superfície  $S_0$ , de que falámos no início desta secção, tem exactamente as 27 rectas que referimos.

A proposição que se segue vem mostrar que aquilo que fizemos até aqui pode ser generalizado, pois não é necessária a suposição inicial de que  $S$  contém uma recta.

**Proposição 3.9** *Toda a superfície cúbica não singular de  $\mathbb{P}^3$  contém, pelo menos, uma recta e, portanto, contém exactamente 27.*

*Demonstração.* Como uma superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$  fica determinada por um polinómio homogéneo de terceiro grau em  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , que tem 20 coeficientes, podemos parametrizar o conjunto de todas as cúbicas de  $\mathbb{P}^3$  pelo espaço projectivo  $\mathbb{P}^{19}$ . Para cada superfície cúbica  $C$ , usemos a notação  $\bar{C}$  para o ponto de  $\mathbb{P}^{19}$  correspondente a  $C$ .

Seja  $Z \subset G_{1,3} \times \mathbb{P}^{19}$  o conjunto definido por

$$Z = \{(x, \bar{C}) \in G_{1,3} \times \mathbb{P}^{19} : r_x \subset C\}.$$

Sejam  $p$  e  $q$  as projecções naturais de  $Z$  sobre  $G_{1,3}$  e  $\mathbb{P}^{19}$ , respectivamente. Dada a recta  $r = \mathbb{V}(X_0, X_1)$ , uma superfície cúbica  $C$  contém esta recta se e só se os coeficientes de  $X_2^3$ ,  $X_2^2 X_3$ ,  $X_2 X_3^2$  e  $X_3^3$  forem nulos. Assim, as fibras da projecção  $p$  têm dimensão  $\dim(\mathbb{P}^{19}) - 4 = 15$ , donde  $\dim(Z) = 19$ . Ora, a projecção  $q$  é um morfismo entre duas variedades de dimensão 19, portanto, a sua imagem  $q[Z]$  é um fechado de  $\mathbb{P}^{19}$  e ou tem dimensão 19 (e, portanto  $q[Z] = \mathbb{P}^{19}$ ), ou todas as fibras de  $q$  têm dimensão maior ou igual a um. Esta última hipótese não se verifica porque o exemplo do início exhibe uma superfície cúbica com um número não nulo e finito de rectas. Logo, todas as superfícies cúbicas contêm pelo menos uma recta.  $\square$

### 3.2 A superfície cúbica como *blow-up* de $\mathbb{P}^2$ em seis pontos

Uma superfície cúbica em  $\mathbb{P}^3$  pode ser obtida como *blow-up* de  $\mathbb{P}^2$  em seis pontos, como mostraremos nesta secção. A seguinte descrição, que permite observar de outra forma as posições relativas das 27 rectas contidas numa superfície cúbica, pode ser encontrada em [Har93].

**Proposição 3.10** *Seja  $s \leq 7$  e sejam  $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{P}^2$  não colineares quatro a quatro e, caso  $s = 7$ , não pertencentes a uma mesma cónica. Então o sistema linear  $|3L - Q_1 - \dots - Q_s|$  não tem pontos base não determinados. Este resultado permanece válido se  $Q_2$  estiver infinitamente próximo de  $Q_1$ .*

*Demonstração.* Mostremos, em primeiro lugar, o caso  $s = 7$ . Seja  $P \in \mathbb{P}^2$  um ponto distinto dos pontos  $Q_1, \dots, Q_7$ . Procuremos uma cúbica em  $|3L - Q_1 - \dots - Q_7|$  que não contenha  $P$ .



Suponhamos que  $P$  pertence a uma recta  $r$  que passa por três dos pontos anteriores, digamos  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  (no caso de o ponto  $Q_2$  estar infinitamente próximo de  $Q_1$ , isto significa que  $r$  passa por  $Q_1$  e tem a direcção correspondente a  $Q_2$ ). Como os pontos  $Q_4, Q_5, Q_6$  e  $Q_7$  não são colineares, pelo menos três destes pontos não estão numa mesma recta, digamos  $Q_4, Q_5$  e  $Q_6$ . Sejam, para cada conjunto de índices distintos  $i_1, \dots, i_5 \in \{1, \dots, 7\}$ ,  $r_{i_1 i_2}$  a recta que passa pelos pontos  $Q_{i_1}$  e  $Q_{i_2}$  e  $\Gamma_{i_1 \dots i_5}$  a cónica que passa por  $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_5}$ . No caso de o ponto  $Q_{i_2}$  estar infinitamente próximo de  $Q_{i_1}$ , isto significa que a tangente em  $Q_{i_1}$  a  $\Gamma_{i_1 \dots i_5}$  tem a direcção correspondente a  $Q_{i_2}$ ; daqui em diante, podemos considerar que uma cónica que passa pelos pontos  $Q_{i_1}$  e  $Q_{i_2}$  é definida desta forma. A união  $\Gamma_{12456} \cup r_{37}$  é uma cúbica que não contém  $P$ . De facto, se tivéssemos  $P \in \Gamma_{12456}$ , esta cónica conteria a recta  $r$  e seria redutível, donde os pontos  $Q_4, Q_5$  e  $Q_6$  seriam colineares; por outro lado, se  $P$  pertencesse a  $r_{37}$ , teríamos  $Q_7 \in r$  e os pontos  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_7$  seriam colineares.

Caso  $Q_2$  esteja infinitamente próximo de  $Q_1$ , devemos observar ainda mais duas hipóteses: a de  $r$  conter o ponto  $Q_1$ , mas não ter a direcção correspondente a  $Q_2$ , e a de  $r$  não conter o ponto  $Q_1$ . Para a primeira hipótese, podemos supor que  $r$  contém os pontos  $Q_1, Q_3$  e  $Q_4$  e fazer um raciocínio análogo ao anterior para mostrar que  $P$  não pertence à cúbica  $\Gamma_{34567} \cup r_{12}$ . Para a segunda, podemos supor que  $r$  contém os pontos  $Q_3, Q_4$ , e  $Q_5$  e mostrar que  $P$  não pertence a  $\Gamma_{12346} \cup r_{57}$ .

Suponhamos agora que  $P$  não pertence a nenhuma recta que passe por três dos pontos  $Q_1, \dots, Q_7$ , mas que  $P$  pertence a uma cónica  $\Gamma'$  que passa por seis destes pontos, digamos  $Q_1, \dots, Q_6$ . Então  $P \notin \Gamma_{34567}$ , pois, caso contrário, teríamos  $\Gamma' = \Gamma_{34567}$  e os pontos  $Q_1, \dots, Q_7$  estariam na mesma cónica; por outro lado,  $P \notin r_{12}$ , pois, se assim fosse, a cónica  $\Gamma'$  seria redutível, logo a união de duas rectas, e  $P$  estaria numa recta que continha três dos pontos  $Q_1, \dots, Q_6$ . Assim, a cúbica  $\Gamma_{34567} \cup r_{12}$  não contém  $P$ .

Uma vez mais, no caso em que  $Q_2$  está infinitamente próximo de  $Q_1$ , devemos observar outra hipótese: a de  $\Gamma'$  passar pelos pontos  $Q_1, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  e  $Q_7$  e a sua tangente no ponto  $Q_1$  não corresponder a  $Q_2$ . Mostramos então, de forma análoga, que  $P$  não está na cúbica  $\Gamma_{12345} \cup r_{67}$ .

Por fim, suponhamos que  $P$  não pertence a nenhuma recta que contenha três dos pontos  $Q_1, \dots, Q_7$  nem a nenhuma cónica que contenha seis destes pontos. Consideremos as três cúbicas do tipo

$$C_i = \Gamma_{1234i} \cup r_{jk},$$

onde  $\{5, 6, 7\} = \{i, j, k\}$ . Se  $P \in C_5$ , então  $P \in \Gamma_{12345}$  ou  $P \in r_{67}$ .

Caso  $P \in \Gamma_{12345}$ , temos  $P \notin \Gamma_{12346}$ , pois se pensarmos na (única) cónica  $\Gamma''$  que passa por  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  e  $P$ , teríamos  $\Gamma_{12345} = \Gamma'' = \Gamma_{12346}$  e os

pontos  $Q_1, \dots, Q_6$  estariam numa mesma cónica, o que supusemos não ser verdade. Analogamente, temos  $P \notin \Gamma_{12347}$ . Assim, se  $P \in C_6$ , temos  $P \in r_{57}$  e então  $P \notin r_{67}$ , caso contrário os pontos  $Q_5, Q_6$  e  $Q_7$  seriam colineares. Logo,  $P \notin C_7$ .

Caso  $P \in r_{67}$ , temos  $P \notin r_{56}$  e  $P \notin r_{57}$ , pois os pontos  $Q_5, Q_6$  e  $Q_7$  são não colineares. Se  $P \in C_6$ , temos  $P \in \Gamma_{12346}$ , donde  $Q$  não poderá estar em  $\Gamma_{12347}$ . Logo  $P \notin C_7$ .

Assim, podemos concluir que  $P$  não é um ponto base não determinado deste sistema.

Suponhamos agora que  $s < 7$ . Sejam  $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{P}^2$  pontos não colineares quatro a quatro. Seja  $P \in \mathbb{P}^2$  distinto destes pontos. Para mostrar que  $P$  não é um ponto base não determinado, temos de encontrar uma cúbica em  $|3L - Q_1 - \dots - Q_s|$  que não contenha  $P$ . Sejam  $Q_{s+1}, \dots, Q_7 \in \mathbb{P}^2$  distintos de  $P$  tais que os pontos  $Q_1, \dots, Q_7$  estão nas condições enunciadas. Então o sistema  $|3L - Q_1 - \dots - Q_7|$  não tem pontos base não determinados, portanto existe uma cúbica deste sistema que não passa por  $P$ . Em particular, existe uma cúbica que passa pelos pontos  $Q_1, \dots, Q_s$  e não passa por  $P$ . Logo, o sistema  $|3L - Q_1 - \dots - Q_s|$  não tem pontos base não determinados.  $\square$

**Corolário 3.11** *Seja  $s \leq 8$  e sejam  $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{P}^2$  tais que não haja quatro colineares nem sete pertencentes a uma mesma cónica. Então a dimensão de  $|3L - Q_1 - \dots - Q_s|$  é  $9 - s$ .*

*Demonstração.* O sistema linear das cúbicas em  $\mathbb{P}^2$  sem pontos base tem dimensão nove. Como, para  $t \leq 7$ , o sistema  $|3L - Q_1 - \dots - Q_t|$  não tem pontos base não determinados, temos

$$\dim |3L - Q_1 - \dots - Q_{t+1}| = \dim |3L - Q_1 - \dots - Q_t| - 1,$$

donde se conclui o resultado.  $\square$

Sejam  $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^2$  seis pontos não pertencentes a uma mesma cónica e não colineares três a três. Admitamos que  $P_2$  possa estar infinitamente próximo de  $P_1$ . Seja  $\pi : S' \rightarrow \mathbb{P}^2$  o *blow-up* de  $\mathbb{P}^2$  nestes seis pontos e sejam  $E_1, \dots, E_6$  os divisores excepcionais correspondentes.

Dizemos que um sistema linear completo  $|D|$  sobre uma variedade projectiva  $X$  é *muito amplo* se  $|D|$  não tiver pontos base e, para qualquer ponto  $P \in X$ ,  $|D - P|$  não tiver pontos base não determinados.

**Teorema 3.12** *O sistema linear  $|\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6|$  é muito amplo.*

*Demonstração.* Verifiquemos que este sistema não tem pontos base e que, para cada ponto  $P \in \mathbb{P}^2$ , o sistema  $|3L - P_1 - \dots - P_6 - P|$  não tem pontos base não determinados.

A primeira afirmação resulta directamente da proposição anterior, uma vez que, se o sistema  $|\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6|$  tivesse pontos base, o sistema  $|3L - P_1 - \dots - P_6|$  teria pontos base não determinados. A segunda também se conclui facilmente da proposição anterior se notarmos que, uma vez que os pontos  $P_1, \dots, P_6$  não estão numa mesma cónica e não são colineares três a três, os sete pontos  $P_1, \dots, P_6, P$  satisfazem as hipóteses da proposição 3.10.  $\square$

**Corolário 3.13** *Existe um mergulho  $\psi : S' \rightarrow \mathbb{P}^3$  cuja imagem é uma superfície cúbica não singular.*

*Demonstração.* Dado o sistema linear muito amplo  $|\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6|$ , obtemos um mergulho de  $S'$  em  $\mathbb{P}^N$ , onde

$$N = \dim |\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6| = \dim |3L - P_1 - \dots - P_6|.$$

Pelo corolário 3.11, temos  $N = 3$ . Para cada  $D' \in |\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6|$ , temos

$$\begin{aligned} D'^2 &= \pi^*(3L)^2 - 2\pi^*(3L)(E_1 + \dots + E_6) + (E_1 + \dots + E_6)^2 = \\ &= 9 - 0 - 6 = 3. \end{aligned}$$

Logo o grau da imagem deste mergulho é três, como desejávamos.  $\square$

Para o que se segue, consideremos  $S = \psi[S']$ , onde  $\psi$  é o mergulho referido no corolário anterior.

**Proposição 3.14** *Sejam  $e_1, \dots, e_6 \in \text{Pic } S$  as classes dos divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$ , respectivamente, e seja  $l \in \text{Pic } S$  a classe de uma recta. Então:*

1. o grupo de Picard,  $\text{Pic } S$ , é isomorfo a  $\mathbb{Z}^7$  e é gerado por  $l, e_1, \dots, e_6$ ;
2. as intersecções sobre  $S$  são dadas por  $l^2 = 1$ ,  $e_i^2 = -1$ ,  $l.e_i = 0$  e  $e_i.e_j = 0$ , se  $i \neq j$ ;
3. a secção hiperplana de  $S$  é  $h = 3l - \sum_{i=1}^6 e_i$ ;
4. o divisor canónico é  $K = -3l + \sum_{i=1}^6 e_i = -h$ ;

5. se  $D$  for um divisor efectivo sobre  $S$ ,  $D \sim al - \sum_{i=1}^6 b_i e_i$ , então o grau de  $D$ , como curva em  $\mathbb{P}^3$ , é  $d = 3a - \sum_{i=1}^6 b_i$ ;
6. a auto-intersecção de  $D$  é  $D^2 = a^2 - \sum_{i=1}^6 b_i^2$ ;
7. o genus aritmético de  $D$  é

$$p_a(D) = \frac{1}{2}(D^2 - d) + 1 = \frac{1}{2}(a - 1)(a - 2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 b_i(b_i - 1).$$

*Demonstração.* Será feito um esboço da demonstração, a qual se pode encontrar em [Har93, cap. V, sec. 4, p. 401].

Essencialmente, as afirmações 1 e 2 são consequências do facto de o grupo de Picard de um *blow-up*  $\tilde{X}$  de uma superfície  $X$  num ponto  $P \in X$  ser dado por  $\text{Pic } \tilde{X} \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}E$ , onde  $E$  é a imagem inversa de  $P$ . A afirmação 3 resulta directamente da definição do mergulho de  $S'$  em  $\mathbb{P}^3$ . O facto de o divisor canónico do *blow-up*  $\tilde{X}$  ser  $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E$  justifica a afirmação 4. Para verificarmos a afirmação 5, observemos que o grau de  $D$  é  $D.h$ . A afirmação 6 é consequência imediata do que foi dito em 2. Finalmente, a afirmação 7 vem da fórmula de adjunção  $2p_a(D) - 2 = D.(D + K)$  e do facto de  $D.K = -Dh = -d$ , pelo que vimos em 4.  $\square$

Sendo uma superfície cúbica não singular,  $S$  contém exactamente 27 rectas, tal como vimos na secção anterior. No próximo teorema, descrevêmo-las. Para tal, definamos o seguinte.

Seja, para cada  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ , com  $i \neq j$ ,  $r_{ij}$  a recta que passa pelos pontos  $P_i$  e  $P_j$  e seja, para cada  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $C_i$  a cónica que passa pelos cinco pontos  $P_j$ , com  $j \neq i$ .

**Teorema 3.15 (As 27 rectas)** *As 27 rectas da superfície cúbica  $S$  são*

1. os seis divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$ ;
2. os quinze transformados estritos  $F_{ij}$  das rectas  $r_{ij}$ , com  $1 \leq i < j \leq 6$ ;
3. os seis transformados estritos  $G_1, \dots, G_6$  das cónicas  $C_1, \dots, C_6$ .

*Demonstração.* Tudo o que temos de fazer é mostrar que os divisores excepcionais  $E_i$  e os transformados estritos  $F_{ij}$  e  $G_i$  são rectas.

Para tal, verifiquemos que uma curva irreduzível  $C$  contida em  $S$  tal que  $C^2 < 0$  é necessariamente uma recta. Seja  $C$  uma curva nestas condições e consideremos a fórmula de adjunção

$$2p_a(C) - 2 = C^2 + CK,$$

onde  $K = -H$  é o divisor canónico de  $S$ . Como  $p_a(C) \geq 0$ , temos

$$C^2 - CH \geq -2.$$

Como  $C^2$  é negativo e  $CH$  é positivo, temos obrigatoriamente  $C^2 = -1$  e  $CH = 1$ . Assim,  $\deg C = 1$ , donde  $C$  é uma recta.

Ora,

1. como  $E_i^2 = -1$ , temos  $\deg E_i = 1$ , portanto os seis divisores  $E_i$  são rectas;
2. como  $F_{ij} \equiv L - E_i - E_j$ , temos  $F_{ij}^2 = 1 - 1 - 1 = -1$  e  $\deg F_{ij} = 3 - 1 - 1 = 1$ , logo os 15 transformados estritos  $F_{ij}$  são rectas;
3. como  $G_j \equiv 2L - \sum_{i \neq j} E_i$ , temos  $G_j^2 = 4 - 5 = -1$  e  $\deg G_j = 6 - 5 = 1$ , donde os seis transformados estritos  $G_j$  são rectas.

Obtemos assim as 27 ( $6 + 15 + 6$ ) rectas que pretendíamos.  $\square$

A proposição que se segue vem mostrar que esta abordagem do problema é tão geral como a que fizemos na secção anterior.

**Proposição 3.16** *Qualquer superfície cúbica não singular de  $\mathbb{P}^3$  pode ser obtida como blow-up de  $\mathbb{P}^2$  em seis pontos.*

*Demonstração.* Seja  $T$  uma superfície cúbica não singular de  $\mathbb{P}^3$ . Pela fórmula de adjunção, temos

$$K_T = \mathcal{O}_T(-4H + 3H) = \mathcal{O}_T(-H).$$

Assim, uma recta  $r$  contida em  $T$  é uma curva de auto-intersecção  $-1$ . Com efeito,  $r$  satisfaz  $H \cdot r = 1$  e, também pela fórmula de adjunção, temos

$$r^2 = -r.K_T = -r.H = -1.$$

Por outro lado, vimos no corolário 3.5 que  $T$  é racional, isto é, é birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}^2$ , em particular,  $K_T^2 = 3$ . Ora, existem seis rectas contidas em  $T$  enviesadas duas a duas: na notação da secção anterior, as rectas  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  e  $s$  estão nestas condições. Contraíndo estas rectas, obtemos uma superfície racional  $T'$ , com  $K_{T'}^2 = 9$ . Pela classificação das superfícies, temos que  $T'$  é isomorfa a  $\mathbb{P}^2$ , o que significa que  $T$  é o *blow-up* de  $\mathbb{P}^2$  em seis pontos (correspondentes às seis rectas contraídas).  $\square$

### 3.2.1 Simetria da posição das rectas

A posição das 27 rectas contidas em  $S$  tem algumas simetrias interessantes, que são descritas a seguir.

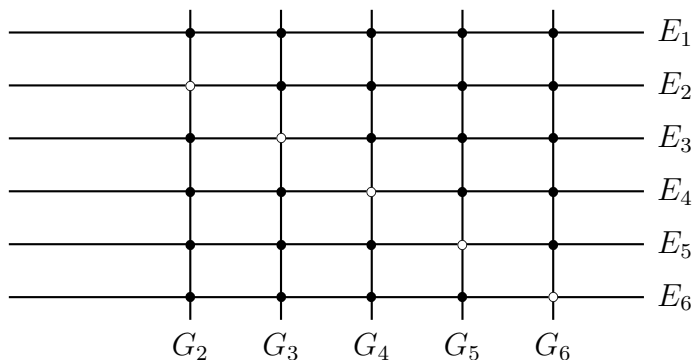
#### Duplo-seis de Schläfli

Uma característica interessante de simetria da posição destas rectas é a que descrevemos a seguir, baseada em [HCV52].

Chamemos *duplo-seis de Schläfli* a um conjunto de 12 rectas  $E_1, \dots, E_6, G_1, \dots, G_6$  com as propriedades de as rectas  $E_1, \dots, E_6$  serem enviesadas duas a duas, as rectas  $G_1, \dots, G_6$  também o serem, e as rectas  $E_i$  e  $G_j$  terem um ponto em comum se e só se  $i \neq j$ . Estes conjuntos têm uma característica interessante: dada uma recta  $E_1$  em  $\mathbb{P}^3$  e cinco outras rectas  $G_2, \dots, G_6$  que intersectem  $E_1$ , mas de resto em posição geral, ficam determinadas rectas  $E_2, \dots, E_6, G_1$  tais que as rectas  $E_1, \dots, E_6, G_1, \dots, G_6$  formam um duplo-seis de Schläfli. Vejamos porquê.

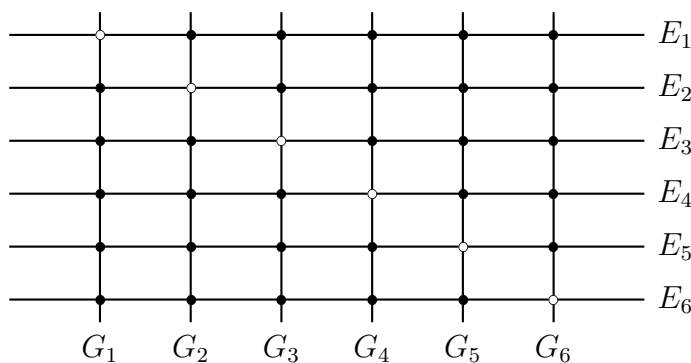
Suponhamos dadas as rectas  $E_1, G_2, \dots, G_6$ , como descrevemos. Podemos supor que as quatro rectas  $G_2, \dots, G_5$  estão em posição suficientemente geral para que existam exactamente duas rectas que as intersectem: uma delas é  $E_1$ , a segunda notamos por  $E_6$  (ver secção 2.4.1). Podemos supor ainda que  $G_6$  está em posição suficientemente geral para que  $G_6$  e  $E_6$  não se intersectem. O mesmo raciocínio permite-nos encontrar uma única recta para além de  $E_1$  que intersecta as rectas  $G_2, G_3, G_4$  e  $G_6$  (mas não  $G_5$ ), que notamos por  $E_5$ . Analogamente se encontram as rectas  $E_2, E_3$  e  $E_4$  nas mesmas condições. É fácil verificar que as rectas  $E_1, \dots, E_6$  são enviesadas. Obtemos assim a configuração da figura 3.1.

Figura 3.1:



Resta-nos mostrar que existe uma única recta  $G_1$  que intersecta as rectas  $E_2, \dots, E_6$  e mais nenhuma das anteriores. Reparemos que as rectas  $E_2, E_3, E_4$  e  $E_5$  não estão contidas numa mesma quádrlica. Se assim não fosse, qualquer recta que intersectasse três destas intersectaria a quarta, o que contrariaria a configuração das rectas que obtivemos. Podemos exigir ainda que a generalidade da posição relativa das rectas  $G_2, \dots, G_5$  seja tal que a recta  $E_5$  não seja tangente à (única) quádrlica que contém as rectas  $E_2, E_3$  e  $E_4$ . Assim, tal como vimos na secção 2.4.1, há exactamente duas rectas que intersectam  $E_2, E_3, E_4$  e  $E_5$ . Uma delas é  $G_6$ . Tomamos a outra para  $G_1$ .

Figura 3.2: O duplo-seis de Schläfli.



Mostremos agora que  $G_1$  intersecta  $E_6$ . Escolhamos quatro pontos em  $E_1$  e três pontos em cada uma das rectas  $G_2, \dots, G_6$ , de tal forma que estes 19 pontos não coincidam com os pontos de intersecção da configuração anterior. Podemos tomar uma superfície cúbica  $S$  que contenha os 19 pontos considerados. Como a recta  $E_1$  tem quatro pontos em  $S$ , está contida nesta superfície. Mas então também cada uma das rectas  $G_2, \dots, G_6$  tem quatro pontos em  $S$ : os três mencionados e o ponto de intersecção com  $E_1$ . Assim, todas estas rectas estão contidas em  $S$ . Ora, mas assim, também as rectas  $E_2, \dots, E_6$  estão contidas em  $S$ , pois cada uma delas tem quatro pontos em  $S$  (os pontos de intersecção  $E_i \cap G_j$ , com  $i \neq j$ ). Finalmente, podemos deduzir que a recta  $G_1$  está também contida em  $S$ . Suponhamos que  $G_1$  não intersecta  $E_6$ . Existe então outra recta  $r$  que, tal como  $G_5$ , intersecta as quatro rectas  $E_2, E_3, E_4$  e  $E_6$  (podemos supor que  $r$  e  $G_5$  são, de facto, distintas, dada a generalidade das rectas  $G_2, \dots, G_6$ ). Como a recta  $r$  intersecta quatro rectas contidas em  $S$ , também está contida nesta superfície. Assim, as rectas  $E_2, E_3$  e  $E_4$  intersectam as quatro rectas  $r, G_1, G_5$  e  $G_6$ . Logo estas rectas estão contidas numa quádrlica  $Q$  e, sendo enviesadas, pertencem à mesma

família irredutível de rectas contidas em  $Q$ . Ora, cada recta da outra família intersecta estas quatro, logo tem quatro pontos distintos em  $S$ . Assim, cada uma destas rectas está contida em  $S$ , o que significa que a quádrlica  $Q$  está contida em  $S$ . Portanto,  $S$  é a união de  $Q$  com um plano  $\pi$ . Ora, como não há quatro das rectas  $G_2, \dots, G_6$  contidas numa mesma quádrlica, temos que apenas três delas poderão estar contidas em  $Q$ . Isto significa que as outras duas estão contidas em  $\pi$  e, portanto intersectam-se. Isto contradiz a configuração anterior, portanto concluímos que  $G_1$  intersecta  $E_6$ .

É agora uma tarefa fácil verificar que  $G_1$  não intersecta nenhuma das rectas  $G_2, \dots, G_6$ . O facto de  $G_1$  não intersectar  $E_1$  é uma consequência de haver apenas duas rectas que intersectam  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_6$ : as rectas  $G_4$  e  $G_5$ .

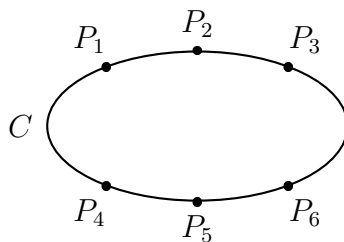
A recta  $G_1$  assim obtida permite-nos completar o duplo-seis de Schläfli.

### 3.2.2 Casos particulares, ou quando as rectas não são 27

Vejamos agora o que acontece quando as exigências que fizemos sobre os pontos  $P_1, \dots, P_6$  não são satisfeitas.

#### Os seis pontos pertencentes a uma mesma cónica

Suponhamos que os pontos  $P_1, \dots, P_6$  são não colineares três a três, mas pertencem a uma mesma cónica  $C$ .



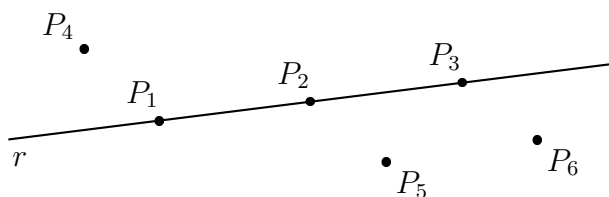
Esta cónica será necessariamente não singular, caso contrário, pelo menos três dos pontos seriam colineares. Portanto, para cada  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ , com  $i < j$ , a recta  $r_{ij}$  intersecta  $C$  apenas nos pontos  $P_i$  e  $P_j$ . Assim, o morfismo  $\psi : S' \rightarrow \mathbb{P}^3$ , induzido pelo sistema linear  $|\pi^*(3L) - E_1 - \dots - E_6|$ , não é um mergulho. No entanto, se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito da cónica  $C$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$  e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado estrito, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(C)$  e um aberto de  $S = \psi[S']$ . Assim, recorrendo à notação do teorema 3.15, as cónicas  $C_1, \dots, C_6$  são iguais a  $C$ . Restam então as rectas  $F_{ij}$ ,



com  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  e os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$ . A superfície cúbica  $S$  tem, neste caso, exactamente 21 rectas.

### Três pontos colineares

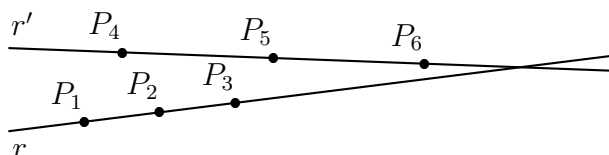
Suponhamos que três dos pontos, digamos  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , estão numa mesma recta  $r$ , mantendo-se as restantes condições.



Como no caso anterior, se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito da recta  $r$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$  e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(r)$  e um aberto de  $S$ . Assim, as cónicas que contêm os três pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  contêm  $r$  e temos  $C_4 = r \cup r_{56}$ ,  $C_5 = r \cup r_{46}$  e  $C_6 = r \cup r_{45}$ . Logo, os seus transformados estritos são os mesmos que os das rectas  $r_{56}, r_{46}$  e  $r_{45}$ . Restam então as rectas  $F_{ij}$ , com  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  e  $j > 3$ , os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$  e as rectas  $G_1, G_2$  e  $G_3$ . A superfície cúbica  $S$  tem, neste caso, também 21 rectas.

### Dois conjuntos de três pontos colineares

Suponhamos que os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  estão numa mesma recta  $r$  e os pontos  $P_4, P_5$  e  $P_6$  pertencem a uma recta  $r'$ , mantendo-se as restantes condições.

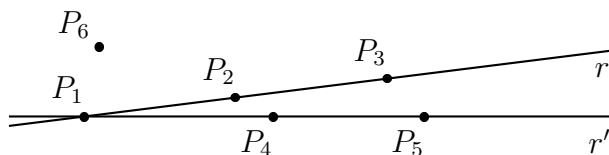


Neste caso,  $r \cup r'$  é uma cónica que contém os seis pontos. Se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito da cónica  $r \cup r'$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$

e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(r \cup r')$  e um aberto de  $S$ . Fazendo um raciocínio análogo aos anteriores, podemos ver que sobram em  $S$  os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$  e as rectas  $F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{34}, F_{35}$  e  $F_{36}$ . Assim, a superfície  $S$  tem exactamente 15 rectas.

### Três pontos colineares e outros dois colineares com um dos primeiros

Suponhamos que os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  estão numa mesma recta  $r$  e os pontos  $P_1, P_4$  e  $P_5$  pertencem a uma recta  $r'$ , mantendo-se as restantes condições.

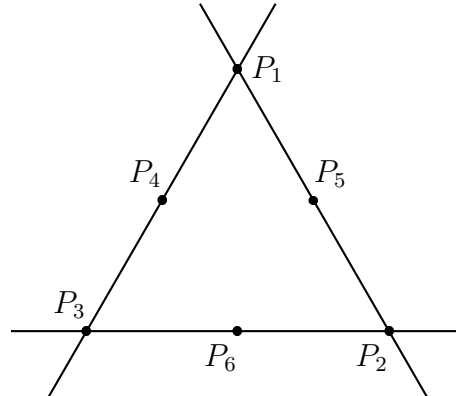


Neste caso,  $r \cup r'$  é uma cónica que contém estes cinco pontos. Se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito da cónica  $r \cup r'$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$  e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(r \cup r')$  e um aberto de  $S$ . As cónicas que contêm os três pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  contêm  $r$  e temos  $C_4 = r \cup r_{56}$ ,  $C_5 = r \cup r_{46}$  e  $C_6 = r \cup r'$ . Por outro lado, as cónicas que contêm os três pontos  $P_1, P_4$  e  $P_5$  contêm  $r'$  e temos ainda  $C_2 = r' \cup r_{36}$  e  $C_3 = r' \cup r_{26}$ . Vemos então que sobram em  $S$  os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$  e as rectas  $F_{16}, F_{24}, F_{25}, F_{26}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{46}, F_{56}$  e  $G_1$ . Assim, a superfície  $S$  tem exactamente 16 rectas.

### Três pontos como vértices de um triângulo e cada um dos restantes num dos seus lados

Suponhamos que o ponto  $P_5$  está na recta  $r_{12}$ , o ponto  $P_4$  está na recta  $r_{13}$  e o ponto  $P_6$  está na recta  $r_{23}$ , mantendo-se as restantes condições.

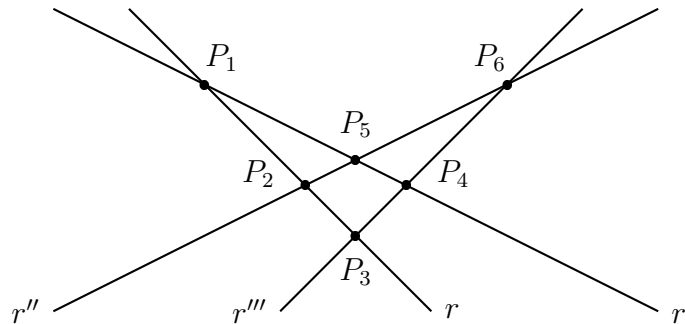
Mais uma vez, se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito de  $r_{12} \cup r_{13} \cup r_{23}$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$  e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(r_{12} \cup r_{13} \cup r_{23})$  e um aberto de  $S$ . Neste caso, as cónicas  $C_1, \dots, C_6$  são união de duas das rectas  $r_{12}, r_{13}$  e  $r_{23}$ . Vemos então que sobram em  $S$



os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$  e as rectas  $F_{16}, F_{24}, F_{35}, F_{45}, F_{46}$  e  $F_{56}$ . Assim, a superfície  $S$  tem exactamente 12 rectas.

### Os seis pontos como vértices de um quadrilátero

Suponhamos que uma recta  $r$  contém os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , uma recta  $r'$  contém os pontos  $P_1, P_4$  e  $P_5$ , uma recta  $r''$  contém os pontos  $P_2, P_5$  e  $P_6$  e uma recta  $r'''$  contém os pontos  $P_3, P_4$  e  $P_6$ , mantendo-se as restantes condições.



Como anteriormente, se um ponto  $P$  não estiver no transformado estrito de  $r \cup r' \cup r'' \cup r'''$ , os pontos  $P_1, \dots, P_6$  e  $P$  estão nas condições da proposição 3.10. Portanto, se excluirmos este transformado, obtemos um isomorfismo entre  $S' \setminus \pi^*(r \cup r' \cup r'' \cup r''')$  e um aberto de  $S$ . Neste caso, as cónicas  $C_1, \dots, C_6$

são união de duas das rectas  $r, r', r''$  e  $r'''$ . Vemos então que sobram em  $S$  apenas os divisores excepcionais  $E_1, \dots, E_6$  e as rectas  $F_{16}, F_{24}$  e  $F_{35}$ . Assim, a superfície  $S$  tem nove rectas.

Nos restantes casos, temos mais de três pontos colineares e, portanto, deixamos de estar nas condições da proposição 3.11.

### 3.3 “Quantas” rectas estão contidas numa hipersuperfície cúbica de $\mathbb{P}^4$ ?

Para sabermos “quantas” rectas tem uma hipersuperfície cúbica de  $\mathbb{P}^4$ , mostremos primeiro o seguinte resultado sobre um ponto singular de uma superfície cúbica de  $\mathbb{P}^3$ .

**Proposição 3.17** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície cúbica e  $P \in S$  um seu ponto singular. Então existem seis rectas, contadas com multiplicidades, contidas em  $S$  que passam por  $P$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $P = [1 : 0 : 0 : 0]$ . Seja  $f$  um polinómio de  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  tal que  $S = \mathbb{V}(f)$ . Escrevamos  $f$  na forma

$$f = h_0 X_0^3 + h_1 X_0^2 + h_2 X_0 + h_3,$$

onde  $h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$  são polinómios homogêneos de graus zero, um, dois e três, respectivamente.

Do facto de  $P$  ser singular em  $S$  concluímos que os polinómios  $h_0$  e  $h_1$  são nulos, donde

$$f = h_2 X_0 + h_3.$$

Se  $Q \in S$  for um ponto distinto de  $P$  tal que  $P \in T_Q S$ , então a recta  $r$  que passa por  $P$  e  $Q$  está contida em  $T_Q S$  e em  $T_P S$ , portanto é tangente a  $S$  em dois pontos; assim, o número de intersecção  $r \cdot S$  é superior a três e, como  $S$  tem grau três, temos  $r \subset S$ .

Reciprocamente, seja  $r$  uma recta que passa por  $P$  e seja  $Q$  um qualquer ponto de  $r$ . Então  $r \subset T_Q S$  e, em particular,  $P \in T_Q S$ .

Assim, para encontrar as rectas que estão contidas em  $S$  e passam por  $P$ , temos apenas de encontrar os pontos  $Q$  tais que  $P \in T_Q S$ .

Seja  $Q \in S$  qualquer, com  $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ . O espaço tangente  $T_Q S$  é o conjunto dos zeros do polinómio

$$\begin{aligned} h_2(Q)X_0 + \left( q_0 \frac{\partial h_2}{\partial X_1}(Q) + \frac{\partial h_3}{\partial X_1}(Q) \right) X_1 + \left( q_0 \frac{\partial h_2}{\partial X_2}(Q) + \frac{\partial h_3}{\partial X_2}(Q) \right) X_2 + \\ + \left( q_0 \frac{\partial h_2}{\partial X_3}(Q) + \frac{\partial h_3}{\partial X_3}(Q) \right) X_3. \end{aligned}$$

Logo, para que  $P \in T_Q S$ , temos de ter  $h_2(Q) = 0$  e, como

$$0 = f(Q) = h_2(Q)q_0 + h_3(Q),$$

temos também  $h_3(Q) = 0$ .

No plano  $q_0 = 0$ , há seis pontos nestas condições, contados com multiplicidades: os pontos de intersecção entre uma cónica e uma cúbica plana. A cada um destes pontos corresponde uma das rectas que procuramos.

Caso  $q_0 \neq 0$ , podemos escrever

$$Q = [q_0 : 0 : 0 : 0] + [0 : q_1 : q_2 : q_3] = P + \hat{Q},$$

onde  $\hat{Q} = [0 : q_1 : q_2 : q_3]$  é um dos seis pontos acima mencionados. Logo  $Q$  pertence à recta  $P\hat{Q}$ , uma das já consideradas.

Assim, as rectas contidas em  $S$  que passam por  $P$  são as seis rectas do tipo  $P\hat{Q}$ , contadas com multiplicidades.  $\square$

Tomemos agora uma hipersuperfície cúbica  $S$  em  $\mathbb{P}^4$  e consideremos um ponto  $P$  de  $S$ . Uma recta que esteja contida em  $S$  e passe por  $P$  está necessariamente contida em  $T_P S$ . Ora  $\hat{S} := S \cap T_P S$  é uma superfície cúbica que, por uma mudança de coordenadas, podemos considerar contida em  $\mathbb{P}^3$ . Mais: o ponto  $P$  é singular em  $\hat{S}$ , pois

$$T_P \hat{S} = T_P(S \cap T_P S) = T_P S \cap T_P(T_P S) = T_P S.$$

Assim, por cada ponto  $P \in S$ , passam seis rectas contidas em  $S$ , contadas com multiplicidades.

---

# Apêndice

## Condições de Schubert

Consideremos as aplicações  $\psi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $\tilde{\psi} : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{G}(k, n)$  e  $\varphi : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^N$  e a matriz  $S = [s_{ij}]$ , tal como foram definidas na demonstração da proposição 2.2. Para cada  $i_0, \dots, i_k, j_0, \dots, j_k \in \{0, \dots, n\}$ , seja  $S_{j_0 \dots j_k}^{i_0 \dots i_k}$  a matriz obtida a partir das entradas comuns às linhas  $i_0, \dots, i_k$  e às colunas  $j_0, \dots, j_k$  de  $S$ . Tomemos  $x \in G_{k,n}$  e seja  $F \in \mathbb{G}(k, n)$  o subespaço de  $\mathbb{P}^n$  correspondente. Consideremos uma base  $(v_0, \dots, v_k)$  de  $F$  tal que, para cada  $j_0, \dots, j_k \in \{0, \dots, n\}$ , tenhamos  $x_{j_0 \dots j_k} = |A_{j_0 \dots j_k}|$ , onde  $A$  é a matriz

$$\begin{bmatrix} v_{00} & \cdots & v_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k0} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix}.$$

Seja, para cada  $l \in \{0, \dots, k\}$ ,

$$w_l = \psi(v_l).$$

Então, para cada  $m \in \{0, \dots, n\}$ , temos

$$w_{lm} = \sum_{p=0}^n s_{mp} v_{lp}.$$

Assim sendo, as coordenadas de Plücker de  $\tilde{\psi}(F)$  são dadas por

$$\begin{aligned} y_{j_0 \dots j_k} &= \begin{vmatrix} w_{0j_0} & \cdots & w_{0j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{kj_0} & \cdots & w_{kj_k} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} w_{0j_{\sigma_0}} \cdots w_{kj_{\sigma_k}} = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \left( \sum_{p_0=0}^n s_{j_{\sigma_0} p_0} v_{0p_0} \right) \cdots \left( \sum_{p_k=0}^n s_{j_{\sigma_k} p_k} v_{kp_k} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sum_{p_0=0}^n \cdots \sum_{p_k=0}^n S_{j_{\sigma_0} p_0} v_{0 p_0} \cdots S_{j_{\sigma_k} p_k} v_{k p_k} = \\
&= \sum_{p_0=0}^n \cdots \sum_{p_k=0}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} S_{j_{\sigma_0} p_0} v_{0 p_0} \cdots S_{j_{\sigma_k} p_k} v_{k p_k} = \\
&= \sum_{p_0=0}^n \cdots \sum_{p_k=0}^n v_{0 p_0} \cdots v_{k p_k} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} S_{j_{\sigma_0} p_0} \cdots S_{j_{\sigma_k} p_k} = \\
&= \sum_{p_0=0}^n \cdots \sum_{p_k=0}^n v_{0 p_0} \cdots v_{k p_k} \left| S_{p_0 \cdots p_k}^{j_0 \cdots j_k} \right|.
\end{aligned}$$

Nesta última soma, para cada conjunto de índices  $l_0, \dots, l_k \in \{0, \dots, n\}$ , com  $l_0 < \dots < l_k$ , há  $(k+1)!$  parcelas do tipo

$$(-1)^{\sigma} v_{0 l_{\sigma_0}} \cdots v_{k l_{\sigma_k}} \left| S_{l_0 \cdots l_k}^{j_0 \cdots j_k} \right|.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
y_{j_0 \cdots j_k} &= \sum_{0 \leq l_0 < \cdots < l_k \leq n} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} v_{0 l_{\sigma_0}} \cdots v_{k l_{\sigma_k}} \left| S_{l_0 \cdots l_k}^{j_0 \cdots j_k} \right| = \\
&= \sum_{0 \leq l_0 < \cdots < l_k \leq n} \left| S_{l_0 \cdots l_k}^{j_0 \cdots j_k} \right| \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} v_{0 l_{\sigma_0}} \cdots v_{k l_{\sigma_k}} = \\
&= \sum_{0 \leq l_0 < \cdots < l_k \leq n} \left| S_{l_0 \cdots l_k}^{j_0 \cdots j_k} \right| |A_{l_0 \cdots l_k}| = \\
&= \sum_{0 \leq l_0 < \cdots < l_k \leq n} \left| S_{l_0 \cdots l_k}^{j_0 \cdots j_k} \right| x_{l_0 \cdots l_k}.
\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação  $\hat{\psi} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$  definida pela matriz

$$\begin{bmatrix}
\left| S_{0 \cdots k}^{0 \cdots k} \right| & \cdots & \left| S_{n-k \cdots n}^{0 \cdots k} \right| \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\left| S_{0 \cdots k}^{n-k \cdots n} \right| & \cdots & \left| S_{n-k \cdots n}^{n-k \cdots n} \right|
\end{bmatrix}$$

satisfaz a condição  $\hat{\psi} \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{\psi}$ , como queríamos. Resta mostrar que  $\hat{\psi}$  é invertível. Ora, os  $N+1$  pontos  $[1 : 0 : \cdots : 0], \dots, [0 : \cdots : 0 : 1]$  estão em  $G_{k,n}$ . Como  $G_{k,n}$  está contido na imagem de  $\hat{\psi}$ , e esta aplicação é induzida por um endomorfismo de  $\mathbb{K}^{N+1}$ ,  $\hat{\psi}$  é sobrejectiva e, portanto, bijectiva.



# Bibliografia

- [GH94] P. Griffiths e J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [Har92] J. Harris, *Algebraic geometry, a first course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, 1992.
- [Har93] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1993.
- [HCV52] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, 1952.
- [HP53] W. V. D. Hodge e D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge University Press, 1953.
- [KL72] S. L. Kleiman e D. Laksov, *Schubert calculus*, American Mathematical Monthly **79** (1972), 1061–1082.
- [MPM97] António Monteiro, Gonçalo Pinto, e Catarina Marques, *Álgebra linear e geometria analítica – problemas e exercícios*, McGraw-Hill, 1997.
- [Rei94] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, London Mathematical Society Students Texts, vol. 12, Cambridge University Press, 1994.
- [SK98] J. G. Semple e G. T. Kneebone, *Algebraic projective geometry*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press, Oxford University Press, 1998.
- [SKKT00] K. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen, e W. Traves, *An invitation to algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2000.