



# Física Geral

Miguel António da Nova Araújo

Departamento de Física  
Universidade de Évora

2007-2008

## Bibliografia

1. Marcelo Alonso e Edward Finn, *Física*, Addison-Wesley, 1999.
2. J. Dias-Deus, etc, *Introdução à Física*, McGraw-Hill
3. Jaime Vilate, *Electromagnetismo*, McGraw-Hill
4. Mendiratta, *Introdução ao Electromagnetismo*, Fundação Gulbenkian
5. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros*, Guanabara Koogan.

A página de internet desta disciplina é: **<http://evunix.uevora.pt/> mana.**

Lá podem ser encontradas informações sobre as datas e resultados dos testes, apontamentos para download e outras informações relevantes.

## Avaliações

A disciplina compõe-se de uma parte prática (laboratorial) e de uma parte teórica.

O aproveitamento pressupõe uma nota positiva tanto na parte prática como na parte teórica da disciplina.

A avaliação na componente prática é feita através de relatórios das experiências realizadas nas aulas laboratoriais.

A avaliação na componente teórica é a nota média obtida em frequências (mini-testes) ao longo do semestre ou, alternativamente, um exame. Recomenda-se que os alunos optem por fazer as frequências pois esta forma de avaliação contínua costuma dar melhores resultados.

Os alunos que realizaram as frequências não podem ir ao exame de época normal. Todos os alunos podem ir a exame de recurso para subir a nota.

A nota final será uma média ponderada das componentes teórica (2/3) e prática (1/3).

# Tema 1

## Medidas Físicas

### 1.1 Unidades, dimensões e estimativas dimensionais

Em física medem-se grandezas, as quais, em geral, possuem unidades. Nunca é excessivo enfatizar a importância de associar a respectiva unidade a uma grandeza determinada experimentalmente ou calculada teoricamente. Em particular, por uma facilidade de entendimento científico, pedagógico e até comercial é conveniente a utilização de um sistema internacional de unidades. Um caso recente paradigmático e, também, de consequências económicas e políticas relevantes foi a perda da sonda espacial da NASA *Mars Climate Orbiter* (no valor de 23,5 milhões de contos). Destinada a estudar o clima marciano, desapareceu dos radares a 23 de Setembro de 1999, na proximidade do planeta. A peritagem indica que a sonda se aproximou em demasia do planeta. A perda da nave teve origem num erro de unidades. A NASA calculou a potência de funcionamento dos propulsores responsáveis pelas correcções de trajectória no sistema métrico, usando dados aeronáuticos expressos no sistema anglo-saxónico. O vice-presidente da companhia que construiu a sonda, espantado, afirmou: “*Não pode ter sido uma coisa tão simples!*”. O director para a política espacial da Federação de Cientistas Americanos manifesta a seguinte opinião sobre a matéria:

*“Esta história vai ser o exemplo clássico para ensinar as diferenças entre o sistema métrico e o inglês, da escola primária até aos cursos de física na universidade, para toda a eternidade.”*

Uma grandeza física é qualquer entidade que se pode medir. O resultado da medição expressa-se sempre por um número seguido da unidade de medida utilizada. Exemplos de grandezas físicas podem ser: o comprimento de uma vara, a massa de um objecto, o tempo que demora um pêndulo a executar uma oscilação, a altura a que um animal consegue

| grandeza    | nome da unidade | símbolo da unidade | símbolo da dimensão |
|-------------|-----------------|--------------------|---------------------|
| comprimento | metro           | m                  | $L$                 |
| massa       | kilograma       | kg                 | $M$                 |
| tempo       | segundo         | s                  | $T$                 |
| temperatura | kelvin          | K                  | $\theta$            |

Tabela 1.1: Unidades do Sistema Internacional (SI) usadas neste curso.

saltar, etc. A cada grandeza física corresponde uma *dimensão*. As dimensões fundamentais são: comprimento, massa, tempo, temperatura e carga eléctrica. Quando, por exemplo, falamos da altura de uma pessoa, da largura de uma porta ou do comprimento de onda de uma radiação estamos a invocar sempre a mesma dimensão: o comprimento. A dimensão refere-se portanto à natureza da entidade que estamos a querer quantificar. Assim, podemos perguntar qual a duração de um dia mas não faz sentido perguntar a qual é massa de um dia.

A uma grandeza pode corresponder uma combinação das dimensões fundamentais acima mencionadas. A grandeza velocidade, por exemplo, resulta de dividir a distância percorrida pelo tempo correspondente. Diz-se então que a velocidade tem dimensões de comprimento dividido pelo tempo.

A cada dimensão está associada uma unidade. Na tabela 1.1 estão listados o nome, a unidade do sistema internacional (SI), o símbolo da unidade e o símbolo da dimensão das grandezas fundamentais usadas neste curso. Na tabela 1.2 listamos os prefixos usados pelo Sistema Internacional de Unidades. Podemos associar um símbolo a cada dimensão como mostra a tabela. Vejamos alguns exemplos. Para expressar que a posição  $x$  de uma partícula que se move ao longo do eixo  $Ox$  tem a dimensão de um comprimento escrevemos:

$$[x] = L.$$

A notação  $[x]$  significa "dimensão da grandeza  $x$ ". Para a velocidade escrevemos:

$$[v_x] = L \cdot T^{-1},$$

e dizemos que a velocidade, sendo um comprimento dividido por um tempo, tem dimensão 1 no comprimento e dimensão  $-1$  no tempo

De igual modo, outras grandezas físicas que encontraremos neste curso, como por exemplo a aceleração, o momento linear, o momento angular, a força e a energia, possuem as seguintes dimensões

$$[a] = \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] = L \cdot T^{-2}, \quad (1.1)$$

$$[mv] = M \cdot L \cdot T^{-1}, \quad (1.2)$$

$$[mvr] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}, \quad (1.3)$$

$$[ma] = M \cdot L \cdot T^{-2}, \quad (1.4)$$

$$[mv^2] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}, \quad (1.5)$$

respectivamente.

Não podemos adicionar grandezas com dimensões diferentes. Não faria sentido, por exemplo, somar um comprimento com uma massa. Assim, numa expressão onde apareça uma soma de vários termos, **estes deverão ter as mesmas dimensões e ambos os membros de uma equação devem ter as mesmas dimensões**. Um exemplo: o movimento rectilíneo uniforme de uma partícula com velocidade  $v$  ao longo do eixo  $Ox$  é descrito por

$$x = x_0 + vt.$$

Nesta equação  $x$ ,  $x_0$  e  $vt$  têm todos a mesma dimensão (comprimento):

$$[x] = [x_0] = [vt] = L.$$

Aqui podemos deixar um valioso conselho ao estudante: quando deduzir uma equação verifique, no fim, se as dimensões de ambos os membros são iguais. Se tal não acontecer então a equação está incorrecta.

A análise dimensional é uma ferramenta poderosa porque permite, em alguns casos, estabelecer equações mesmo que não se tenha um completo conhecimento dos mecanismos físicos envolvidos. É o que veremos nos três exemplos seguintes.

### 1.1.1 O pêndulo simples

Analisemos agora o movimento de um pêndulo gravítico simples. Queremos estabelecer uma equação para o período de oscilação  $P$ . As grandezas relevantes poderão ser a aceleração da gravidade,  $g$ , a massa do pêndulo,  $m$ , o comprimento do pêndulo,  $l$ , e o valor inicial do ângulo  $\theta_0$ . O período de oscilação do pêndulo, será à partida uma certa função destes parâmetros. Isto é,

$$P = f(g, m, l, \theta_0), \quad (1.6)$$

cujas dimensão é o tempo:  $[P] = T$ . As dimensões das restantes grandezas são:

$$[g] = L \cdot T^{-2}, \quad (1.7)$$

$$[l] = L, \quad (1.8)$$

$$[m] = M, \quad (1.9)$$

$$[\theta_0] = 1. \quad (1.10)$$

| factor    | prefixo | símbolo | factor     | prefixo | símbolo |
|-----------|---------|---------|------------|---------|---------|
| $10^{18}$ | exa-    | E       | $10^{-18}$ | ato-    | a       |
| $10^{15}$ | peta-   | P       | $10^{-15}$ | femto-  | f       |
| $10^{12}$ | tera-   | T       | $10^{-12}$ | pico-   | p       |
| $10^9$    | giga-   | G       | $10^{-9}$  | nano-   | n       |
| $10^6$    | mega-   | M       | $10^{-6}$  | micro-  | $\mu$   |
| $10^3$    | kilo-   | k       | $10^{-3}$  | mili-   | m       |
| $10^2$    | hecto-  | h       | $10^{-2}$  | centi-  | c       |
| $10^1$    | deca-   | da      | $10^{-1}$  | deci-   | d       |

Tabela 1.2: Prefixos usados no Sistema Internacional (SI).

O ângulo  $\theta_0$  é adimensional e portanto não contribui para as dimensões. O que temos de fazer agora é combinar as grandezas  $g, l, m$  de modo a que o resultado tenha dimensão de tempo. Começamos por escrever

$$P \propto g^\alpha l^\beta m^\gamma, \quad (1.11)$$

onde os expoentes  $\alpha, \beta, \gamma$  ainda não são conhecidos. Em termos de dimensões, a equação anterior escreve-se como

$$P = (LT^{-2})^\alpha L^\beta M^\gamma, \quad (1.12)$$

e só pode ser satisfeita com  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ . Assim, a equação (1.11) fica

$$P \propto \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.13)$$

A constante (adimensional) de proporcionalidade entre  $P$  e  $\sqrt{\frac{l}{g}}$  poderá eventualmente depender de  $\theta_0$  e por isso escrevemos a equação geral:

$$P = f(\theta_0) \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.14)$$

onde a função  $f(\theta_0)$  é ainda desconhecida e só poderá ficar estabelecida quando tivermos um conhecimento mais profundo dos mecanismos físicos que regem o movimento do pêndulo.

A análise dimensional permitiu concluir que o período das oscilações não depende da massa, é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio e inversamente proporcional à raiz quadrada da aceleração da gravidade.

### 1.1.2 Bola de fogo resultante de uma explosão

Quando se dá uma explosão (de uma bomba, por exemplo) surge uma bola de fogo que se expande em todas as direcções. Podemos perguntar como é que o seu raio  $R$  aumenta no

decorrer do tempo  $t$ . Suponhamos que a rapidez com que a bola se expande deve depender da densidade do ar  $\rho$ . Com efeito, é intuitivo que quanto mais denso for o ar, mais ele se opõe à expansão, retardando-a. Por outro lado, é natural supor que a expansão também depende da energia  $E$  que foi libertada na explosão. O raio  $R$  é portanto uma função de  $t, \rho, E$ . Começemos por escrever

$$R \propto t^\alpha \rho^\beta E^\gamma,$$

e determinemos os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  igualando as dimensões dos dois membros da equação:

$$\begin{aligned} [R] &= [t]^\alpha [\rho]^\beta [E]^\gamma \Leftrightarrow \\ L &= T^\alpha (ML^{-3})^\beta (ML^2T^{-2})^\gamma, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \alpha - 2\gamma &= 0, \\ \beta + \gamma &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha = \frac{2}{5}$ ,  $\beta = -\frac{1}{5}$ ,  $\gamma = \frac{1}{5}$  e assim obtemos o resultado

$$R = Ct^{2/5} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5},$$

onde  $C$  é uma constante adimensional. Concluimos que a bola de fogo cresce com  $t^{2/5}$ . Isto significa que o crescimento é inicialmente muito rápido e depois vai ficando mais lento.

### 1.1.3 O teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras consiste numa afirmação muito geral sobre triângulos rectângulos, relacionando o comprimento da hipotenusa com o dos catetos. Veremos que a análise dimensional permite estabelecer o teorema de Pitágoras. Consideremos o triângulo rectângulo  $T$  da figura 1.1, com hipotenusa  $c$  e catetos  $a$  e  $b$ .

É claro que a área do triângulo  $T$ ,  $A_T$ , é dada pela soma das áreas dos dois triângulos  $T1$  e  $T2$ . Por outro lado a área de um triângulo deverá ter dimensões de quadrado de comprimento.

O único ingrediente que falta é convencer-mos que um triângulo rectângulo fica univocamente definido se for dado o comprimento da hipotenusa e, por exemplo, o ângulo  $\alpha$  com o cateto que lhe é adjacente. Isto significa que a área só pode ser da forma

$$A_T = c^2 \times f(\alpha), \quad (1.15)$$

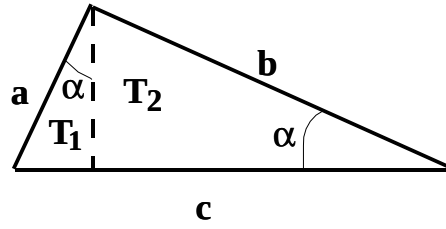


Figura 1.1: Triângulo rectângulo.

onde  $f(\alpha)$  é uma função adimensional que não pode ser determinada por análise dimensional, mas que, necessariamente, é a mesma para todos os triângulos rectângulos. De igual modo, as áreas dos triângulos  $T1$  e  $T2$  valem  $A_{T1} = a^2 \times f(\alpha)$  e  $A_{T2} = b^2 \times f(\alpha)$ , respectivamente. Logo

$$A_T = A_{T2} + A_{T1} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2. \quad (1.16)$$

## 1.2 Exercícios

1. Uma massa colocada na extremidade de uma mola elástica de constante  $k$  (lei da força  $F = -kx$ ) pode oscilar em torno da posição de equilíbrio. Mostre, por análise dimensional, que o período das oscilações,  $T$ , tem a forma  $T = C\sqrt{m/k}$ , onde  $C$  é uma constante adimensional.
2. Num gás a velocidade das ondas de som,  $v_s$ , só depende da pressão,  $p$ , e da densidade do gás,  $\rho$ . Derive, por análise dimensional, a expressão de  $v_s$ .
3. Um corpo de massa  $m$  é lançado, no campo gravítico, verticalmente, para baixo, partindo de uma altura  $h$  com velocidade inicial  $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_y$  m/s. Um grupo de estudantes propôs as seguintes equações para o tempo de queda,  $t_q$ , do corpo.

$$\begin{aligned} 1)t_q &= \sqrt{2mh/g}; & 2)t_q &= \sqrt{2h/g}; \\ 3)t_q &= \sqrt[3]{h^2/(v_0g)}; & 4)t_q &= \sqrt[3]{h^2/(v_0g)} + \sqrt{2h/g + (v_0^2/g)^2}; \\ 5)t_q &= v_0/g + \sqrt{2h/g + (v_0/g)^2}; & 6)t_q &= v_0 + \sqrt{2h/g + v_0^2}; \\ 7)t_q &= \sqrt{2h/g} + \sqrt{2h/g + v_0^2} + h. \end{aligned}$$

(a) Quais os parâmetros relevantes na determinação de  $t_q$  ?

$$v_0, g, h \text{ e } m; \quad v_0 \text{ e } g; \quad v_0, g \text{ e } m; \quad v_0, g \text{ e } h.$$

(b) Das equações listadas para  $t_q$ , indique as que estão dimensionalmente correctas.

4. Um corpo de massa  $m$  é colocado a oscilar numa mola de massa  $M$  e constante elástica  $k$ . Um conjunto de alunos sugeriu, com base em análise dimensional, as seguintes equações para o período,  $t_p$ , de oscilação do pêndulo ( $g$  é aceleração da gravidade):

$$\begin{array}{ll} 1)t_p = \sqrt{k/g} & 2)t_p = 2\pi\sqrt{(m + M/3)/k}; \\ 3)t_p = 2\pi\sqrt{(m + M/3)/g}; & 4)t_p = 2\pi\sqrt{m/k}; \\ 5)t_p = 2\pi\sqrt{k/m}; & 6)t_p = \alpha\sqrt{(\beta m + \gamma M)/k}; \end{array}$$

(a) Das equações listadas para  $t_p$ , indique as que estão dimensionalmente correctas.

(b) Das anteriores, indique qual a mais geral que se pode escrever com base em análise dimensional.

5. Um corpo de peso  $mg$  e volume  $V_c$  desconhecido, suspenso num dinamómetro, é mergulhado num líquido de massa volúmica conhecida  $\rho_l$ , passando o dinamómetro a marcar um valor  $f$ , para a força resultante. Um conjunto de alunos, propôs as seguintes relações para a massa volúmica  $\rho_c$  do corpo ( $g$  é aceleração da gravidade):

$$\begin{array}{ll} 1)\rho_c = \rho_f + \frac{f}{gV_c}; & 2)\rho_c = \rho_f + \frac{f}{V_c}; \\ 3)\rho_c = \rho_l \frac{mg}{mg - f}; & 4)\rho_c = \rho_l \frac{m}{m - f}; \\ 5)\rho_c = \rho_f \cos[mg/(mg - f)]; & 6)\rho_c = \frac{1}{\rho_l} \frac{m}{m - f}; \end{array}$$

(a) Das equações listadas para  $\rho_c$ , indique as que estão dimensionalmente correctas.

6. Um corpo tem peso  $mg$  e volume  $V_c$  desconhecido. Ele está suspenso num dinamómetro e é mergulhado num líquido de massa volúmica conhecida  $\rho_l$ , passando o dinamómetro a marcar um valor  $f$ , para a força resultante. Um conjunto de alunos, propôs as seguintes relações para a massa volúmica  $\rho_c$  do corpo ( $g$  é aceleração da gravidade):

$$\begin{array}{ll} 1)\rho_c = \rho_l \frac{mg}{mg - f}; & 2)\rho_c = \rho_l + \frac{f}{gV_c}; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
3)\rho_c &= \rho_f + \frac{f}{V_c}; & 4)\rho_c &= \rho_l \frac{m}{m-f}; \\
5)\rho_c &= \rho_l \cos[mg/(mg-f)]; & 6)\rho_c &= \frac{1}{\rho_l} \frac{m}{m-f};
\end{aligned}$$

(a) Das equações listadas para  $\rho_c$ , indique as que estão dimensionalmente correctas.

### 1.3 Algarismos significativos

Em Física trabalhamos com entidades que se podem medir (comprimentos, massas, tempos, etc). Mas os instrumentos de medida impõem sempre um limite na precisão das medições que efectuamos e por isso o nosso conhecimento sobre o valor que toma uma dada grandeza é limitado. Quando, por exemplo, se diz que um certo bloco pesa 2,5 Kg, não queremos dizer que aquele é a massa exacta do bloco. Uma balança mais sensível poderia indicar uma massa de 2,5013 Kg, por exemplo, e outra balança ainda mais sensível poderia indicar uma massa de 2,50130023001 Kg!

Quando escrevemos o resultado de uma medição podemos fazê-lo de modo a transmitir o nosso grau de conhecimento sobre o valor da grandeza medida. Isso faz-se através da quantidade de algarismos com que escrevemos o número. **Quanto maior for a precisão com que se conhece o valor da grandeza física, mais algarismos significativos se utilizam.**

Suponhamos que quatro cientistas pesaram o mesmo objecto e apresentaram os resultados da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
m=120 \text{ g} & \text{cientista 1,} \\
m=120,0 \text{ g} & \text{cientista 2,} \\
m=120,00 \text{ g} & \text{cientista 3,} \\
m=1,2 \times 10^2 \text{ g} & \text{cientista 4.}
\end{array}$$

O cientista 1 utilizou uma balança que dava uma incerteza *da ordem de* 1g. Ele portanto admite que o objecto possa ter, por exemplo, 121g ou talvez 119g. A balança do cientista 2 permitia fazer leituras com erro da ordem de 0,1g. O cientista 3 foi o que utilizou a melhor balança, pois permitia fazer leituras com erro da ordem de 0,01g. O cientista 3 admite a possibilidade de o objecto pesar 120,02g ou 119,97g, por exemplo. O cientista 4 foi o que usou a pior balança pois só podia fazer leituras com erro da ordem de 10g. Ele admite a possibilidade de o objecto pesar 133g, por exemplo. A lição que tiramos daqui é que escrever 120 não é o mesmo que escrever 120,0 ou 120,00 ou  $1,2 \times 10^2$ .

O cientista 1 escreveu o resultado com 3 algarismos, o cientista 2 escreveu 4 algarismos, o cientista 3 escreveu 5 algarismos e o cientista 4 escreveu 2 algarismos. Os algarismos

contam-se da esquerda para a direita e **começa-se a contar a partir do primeiro algarismo diferente de zero. Logo, os zeros do lado esquerdo não se contam.** Como exemplo, indicamos agora a quantidade de algarismos presentes em alguns números:

|                           |                                           |
|---------------------------|-------------------------------------------|
| $m=0,025g$                | 2 algarismos,                             |
| $m=2,5 \times 10^{-2}g$   | 2 algarismos (é equivalente ao anterior), |
| $m=0,0250g$               | 3 algarismos,                             |
| $m=2,50g \times 10^{-2}g$ | 3 algarismos (é equivalente ao anterior). |

Diz-se que o último algarismo (o que se encontra mais à direita) é *incerto* porque oferece dúvidas. Logo, quando escrevemos o resultado de uma medição devemos escrever os algarismos certos mais um algarismo incerto, que será o último.

É recomendável representar as grandezas medidas juntamente com a resolução do instrumento de medida. Isto é importante pois o valor de 120,0 g obtido pelo cientista 2 tanto poderia ter sido obtido com uma balança de 0,1 g de resolução como com uma de 0,2 g. Assim os resultados anteriores devem ser escritos como

|                                 |              |
|---------------------------------|--------------|
| $m=(120 \pm 1)g$                | cientista 1, |
| $m=(120,0 \pm 0,2)g$            | cientista 2, |
| $m=(120,00 \pm 0,05)g$          | cientista 3, |
| $m=(1,2 \pm 0,1) \times 10^2 g$ | cientista 4. |

## 1.4 Operações com algarismos significativos

Consideremos o seguinte problema: uma esfera de raio  $r = 1,52$  cm tem uma massa  $m = 3,0$  g. Determinar a massa volúmica  $\rho$ .

Sabemos que a massa volúmica é dada por

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}. \quad (1.17)$$

Os números 4,  $\pi$ , 3, são exactos e portanto a eles não se aplica a contagem de algarismos significativos. Mas os dados do problema referem-se a entidades físicas cuja medida esteve sujeita a erro e neste exemplo concreto  $r$  e  $m$  são números com 3 e dois algarismos respectivamente. Então a resposta final ao problema **deverá conter tantos algarismos quantos os que tinha o dado do problema com menor quantidade de algarismos.** Logo, neste caso só podemos determinar a massa volúmica  $\rho$  com 2 algarismos. A expressão (1.17) implica que iremos fazer várias operações aritméticas. Aqui indicamos uma regra que os alunos deverão seguir: **não se fazem arredondamentos nos cálculos intermédios. Devemos apenas efectuar um único arredondamento, no fim, para**

que o resultado tenha a quantidade de algarismos correcta. Neste caso temos:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{\frac{4}{3}\pi \times 1,52^3} = \frac{3}{14.71022695} = 0,2039397495 \rightarrow 0,20 \text{g.cm}^{-3}.$$

Qual é o valor do volume da esfera? A resposta só depende do raio, logo vai ter três algarismos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 14.71022695 \rightarrow 14,7 \text{cm}^3.$$

## 1.5 A equação de propagação dos erros

Por vezes indicamos explicitamente o erro associado a uma medição. Se, por exemplo, escrevermos o valor do raio de uma esfera como  $r = 1,52 \pm 0,01 \text{cm}$  isso quer dizer que o raio está compreendido entre 1,51cm e 1,53cm. Consideremos novamente o exemplo de uma esfera de raio  $r$  com massa  $m$  para a qual pretendemos determinar a densidade  $\rho$ . Os valores e as respectivas incertezas são:

$$r = 1,52 \pm 0,01 \text{cm}, \quad (1.18)$$

$$m = 3,0 \pm 0,5 \text{g}. \quad (1.19)$$

Então qual será o valor da incerteza na densidade? Para o determinar podemos recorrer a uma expressão que se chama equação de propagação dos erros. Suponhamos que pretendemos calcular uma grandeza que é uma função  $f(x_1, \dots, x_N)$  de  $N$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Supondo que a cada variável  $x_i$  corresponde uma incerteza  $\Delta x_i$  então a incerteza no valor da grandeza,  $\Delta f$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Continuando o exemplo acima, temos que a densidade é uma função de duas variáveis,  $r$  e  $m$ , expressa na equação (1.17). O erro na determinação da densidade será dado, de acordo com (1.20), por

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \Delta m \\ &= \frac{9m}{4\pi r^4} \Delta r + \frac{3}{4\pi r^3} \Delta m. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Usando agora os valores  $r = 1,52$ ,  $m = 3,0$ ,  $\Delta r = 0,01$ ,  $\Delta m = 0,5$ , obtemos:

$$\Delta \rho = 0,00403 + 0,03399 = 0,03802 \rightarrow 0,04 \text{ g.cm}^{-3}.$$

Finalmente escrevemos  $\rho = 0,20 \pm 0,04 \text{ g.cm}^{-3}$ .

## 1.6 O nónio

A escala graduada de um instrumento de medição permite fazer leituras com um erro que, normalmente, se considera ser igual a metade da menor divisão da escala do aparelho. E podemos fazer “a olho” estimativas menores que a menor divisão da escala. Por exemplo, o diâmetro da esfera representada na figura 1.2 pode ser escrito como  $d = 2,7\text{mm}$ . O segundo algarismo foi obtido por estimativa.

O nónio é um instrumento que permite fazer leituras dentro da menor divisão da escala de uma régua. O nónio representado na figura 1.3 apresenta 10 divisões contra apenas 9 divisões da régua e vai permitir avaliar as décimas de milímetro. O diâmetro da esfera é seguramente igual a 2 mm mais algumas décimas. Quantas? Para o saber basta procurar **a primeira divisão do nónio coincidente com uma da régua**. No caso representado na figura 1.4 é a sétima divisão do nónio a primeira a coincidir com uma da régua. Logo  $d = 2,70\text{ mm}$ .

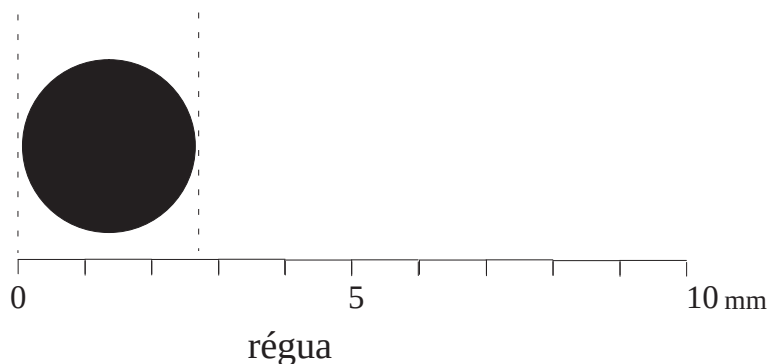


Figura 1.2: Leitura e estimativa de um comprimento.

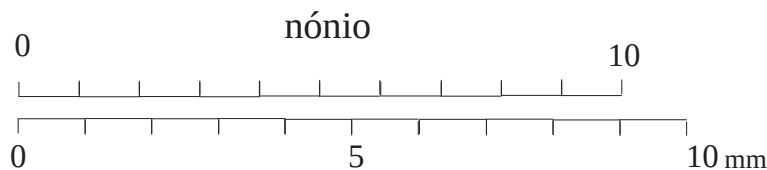


Figura 1.3: Esquema de um nónio.

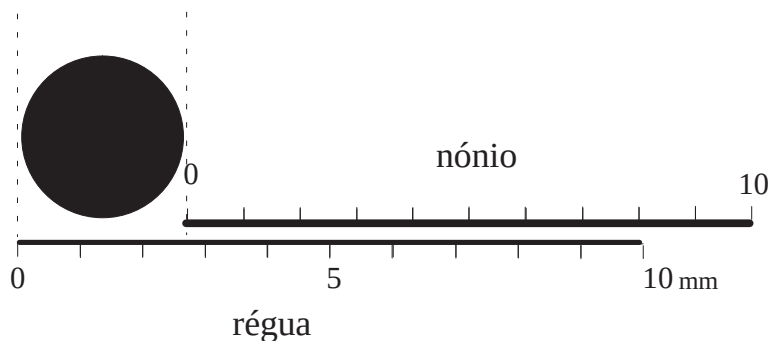


Figura 1.4: Medição com um nónio.

## 1.7 Exercícios

1. Converta as velocidades: 20m/s para cm/s; 100 Km/h para m/s.
2. Qual das seguintes grandezas não é fundamental: massa, comprimento, força, tempo ?
3. Uma milha tem 5280 pés, um pé tem 12 polegadas e uma polegada são 2,54cm. Calcule quanto vale uma milha em Kms.
4. Uma velocidade de 60 milhas por hora quanto vale em m/s?
5. Determine as dimensões da constante da gravitação.
6. Determine as dimensões da constante de estrutura fina  $\alpha = e^2/(2\varepsilon_0 hc)$ .
7. Determine as unidades das constantes  $C_1$  e  $C_2$  nas seguintes expressões de movimentos no S. I.:  $x = C_1 + C_2 t$ ;  $x = \frac{1}{2} C_1 t^2$ ;  $v = 2 C_2 x$ .
8. Quantos algarismos significativos têm os seguintes números: 38,9;  $4,5 \times 10^{-5}$ ; 0,00367.
9. Calcule  $0,378\pi$  tendo atenção aos algarismos significativos.
10. Um ano tropical demora 365,2422 dias. Converta num valor em dias horas, minutos e segundos.

## Tema 2

# Cinemática

### 2.1 Conceito de Mecânica (Cinemática e Dinâmica)

A **Mecânica** é o ramo da Física que estuda o movimento dos corpos. Ela inclui a **Cinemática** e a **Dinâmica**. A Cinemática ocupa-se apenas da descrição do movimento enquanto que a Dinâmica estuda a relação entre o movimento e as suas causas. Assim, os conceitos de velocidade e aceleração, por exemplo, fazem parte da Cinemática. A previsão de como um corpo se irá mover em consequência das forças que nele actuam faz parte da Dinâmica.

### 2.2 Noções de Cinemática

Chama-se **partícula** a um corpo que é muito pequeno comparado com as distâncias que percorre. Se estudarmos, por exemplo, o movimento de translação da Terra em torno do Sol então poderemos considerar a Terra como partícula. Mas se estivermos interessados em estudar o movimento de rotação da mesma sobre o seu eixo, já não a poderemos considerar uma partícula. Subjacente ao conceito de partícula está portanto a ideia de que a forma ou o tamanho do corpo não têm interesse para o tipo de movimento em estudo.

#### 2.2.1 Posição

A descrição do movimento de uma partícula faz-se indicando a posição da mesma em relação a um referencial. Existe grande liberdade na escolha do referencial. Este pode ser, por exemplo, um sistema de eixos  $Oxyz$  com origem  $O$  convenientemente escolhida num certo ponto do espaço. A posição que essa partícula ocupa num certo instante  $t$  é

então dada por um vector posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z, \quad (2.1)$$

o que corresponde a dizer que a partícula ocupa o ponto de coordenadas  $[x(t), y(t), z(t)]$  no instante  $t$ . Os valores de  $x$ , de  $y$  e de  $z$  devem ser expressos numa certa unidade de comprimento (em metros ou centímetros, por exemplo).

Chama-se **instante inicial** ao momento em que se inicia a descrição do movimento. Não quer dizer que a partícula estivesse parada antes. Quer dizer apenas que o seu movimento só foi observado a partir daquele momento.

### 2.2.2 Deslocamento

Se não estiver em repouso, a posição da partícula vai então variar no decorrer do tempo. O deslocamento efectuado entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  é um vector com origem na posição ocupada no instante  $t_1$  e extremidade na posição ocupada no instante  $t_2$ . É portanto a diferença entre os vectores posição  $\vec{r}(t_2)$  e  $\vec{r}(t_1)$ :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \quad (2.2)$$

De uma maneira mais informal: é uma "seta" que aponta da posição inicial para a posição final.

**Problema:** A posição de uma partícula em função do tempo é  $\vec{r}(t) = (2t + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y$ . O tempo e o espaço medem-se em segundos e metros.

1. Calcule a posição no instante  $t = 2\text{s}$ .

**Resolução:**  $\vec{r}(2) = (2 \times 2 + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y = 7\vec{u}_x + 5\vec{u}_y(\text{m})$ .

2. Calcule o deslocamento no intervalo de tempo entre  $t = 2\text{s}$  e  $t = 4\text{s}$ .

**Resolução:**  $\vec{r}(4) = (2 \times 4 + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y = 11\vec{u}_x + 5\vec{u}_y$ . Portanto o deslocamento efectuado é

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(4) - \vec{r}(2) = 4\vec{u}_x \text{ m}.$$

Note-se que **não interessa saber** por onde a partícula andou entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Por isso, não se deve confundir o deslocamento (ou o seu módulo) com o *espaço percorrido* no mesmo intervalo de tempo. O espaço percorrido é o comprimento de trajectória descrita (que na maior parte dos casos até é curva) e depende da forma desta. Repare-se também no seguinte: de acordo com a definição, se uma pessoa se deslocar de casa até à Lua(!) e em seguida voltar a casa então **o deslocamento total efectuado foi nulo**: porque a posição inicial e a posição final são a mesma.

É fácil verificar que o deslocamento efectuado num intervalo  $[t_1, t_2]$  somado com o deslocamento no intervalo  $[t_2, t_3]$  é igual ao deslocamento efectuado no intervalo  $[t_1, t_3]$

**Problema:** Continuando o problema acima, verifique que o deslocamento entre os instantes  $t=2\text{s}$  e  $t=10\text{s}$  é a soma dos deslocamentos entre  $t=2\text{s}$  e  $t=4\text{s}$  e entre  $t=4\text{s}$  e  $t=10\text{s}$ .

**Resolução:**

$$\Delta \vec{r}_{[2,10]} = \Delta \vec{r}_{[2,4]} + \Delta \vec{r}_{[4,10]} = 4\vec{u}_x + 12\vec{u}_x = 16\vec{u}_x(\text{m}) = \vec{r}(10) - \vec{r}(2)$$

### 2.2.3 Velocidade

Suponhamos que uma partícula em movimento se encontra nas posições  $\vec{r}(t_i)$  e  $\vec{r}(t_f)$  nos instantes  $t_i$  e  $t_f$  respectivamente. Chama-se velocidade média ao deslocamento realizado, em média, por unidade de tempo. Assim,

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}. \quad (2.3)$$

**Problema:** Calcule a velocidade média da partícula do problema anterior entre os instantes  $t=2\text{s}$  e  $t=4\text{s}$ .

**Resolução:**

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(4) - \vec{r}(2)}{4 - 2} = 2\vec{u}_x \text{ m.s}^{-1}.$$

A velocidade instantânea da partícula num certo instante  $t$  é a velocidade média num intervalo de tempo infinitesimal que contém o instante  $t$ . A velocidade instantânea no instante  $t$  é assim definida como

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}. \quad (2.4)$$

A *velocidade instantânea* passará a partir de agora a ser designada, mais simplesmente, por *velocidade*. Na expressão (2.4) o aluno deve reconhecer a definição matemática de derivada de uma função. Neste caso é a função  $\vec{r}(t)$  que está a ser derivada em ordem a  $t$ . A derivação de um vector  $\vec{r}(t)$  faz-se derivando cada uma das suas coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \\ &= [x'(t), y'(t), z'(t)]. \end{aligned}$$

Portanto a velocidade é a derivada da posição em ordem ao tempo. Mede a rapidez com que a partícula muda de posição. O vector velocidade é sempre tangente à trajectória descrita como mostra a figura 2.1.

**Problema:** Calcule a velocidade da partícula do problema anterior no instante  $t=5\text{s}$ .

**Resolução:**  $\vec{v}(5) = \frac{d(2t+3)}{dt}\vec{u}_x + \frac{d(5)}{dt}\vec{u}_y = 2\vec{u}_x \text{ m.s}^{-1}.$

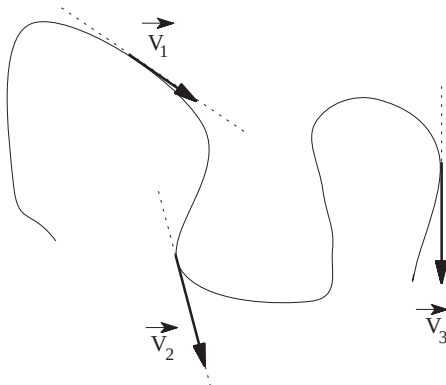


Figura 2.1: O vector velocidade em alguns pontos da trajectória.

**Problema:** A posição de uma partícula é dada por

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 5t)\vec{u}_y + \text{sen}(t)\vec{u}_z.$$

Calcule a velocidade em qualquer instante  $t$ .

**Resolução:**  $\vec{v}(t) = (4t + 5)\vec{u}_y + \cos(t)\vec{u}_z$ .

Existe um conceito importante relacionado com o de velocidade: o de **momento linear** (ou **quantidade de movimento**). Este é definido como o produto da massa da partícula pela sua velocidade. Trata-se portanto de um vector:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Se considerarmos um sistema constituído por várias partículas então podemos definir a quantidade de movimento total do sistema com sendo a soma das quantidades de movimento de cada uma das partículas que o constituem:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots \end{aligned}$$

### 2.2.4 Aceleração

Aceleração significa variação de velocidade. A aceleração instantânea, ou mais simplesmente, aceleração, é definida como a derivada da velocidade em ordem ao tempo (ou a segunda derivada da posição):

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ &= [x''(t), y''(t), z''(t)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Mede portanto a rapidez de variação da velocidade.

É costume dividir o vector aceleração em duas componentes: uma tangente à trajectória e que se chama **aceleração tangencial**; outra perpendicular à trajectória, a **aceleração normal**. A **aceleração tangencial** mede a rapidez de variação do módulo da velocidade. Se a aceleração tangencial não for zero isso quer dizer que a partícula poderá estar a mover-se cada vez mais depressa (se a componente tangencial tiver o mesmo sentido que a velocidade) ou a mover-se cada vez mais devagar (se a componente tangencial tiver sentido contrário ao da velocidade). A **aceleração normal** mede a rapidez de variação da direcção da velocidade. Se a aceleração normal não for nula isso significa que o movimento vai mudando de direcção, ou seja, que a trajectória é curvilínea. Em particular, se a partícula se move ao longo de uma linha recta então podemos concluir que é nula a componente normal da aceleração. A aceleração normal **aponta sempre** para a parte de dentro da curva. O seu módulo é igual a  $v^2/R$  onde  $R$  é o raio de curvatura da trajectória no ponto onde se encontra a partícula. Tudo isto se pode expressar matematicamente por:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

onde  $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  é o versor de  $\vec{v}$  e  $\vec{u}_n$  é o vector unitário perpendicular à trajectória (no ponto onde se encontra a partícula) apontando para dentro da curva. A figura 2.2 ilustra o que atrás ficou dito.

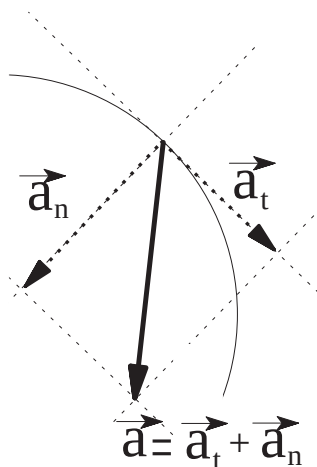


Figura 2.2: Decomposição do vector aceleração segundo a direcção normal e a direcção tangente à trajectória.

## 2.3 Alguns exemplos de movimentos

### 2.3.1 Movimento rectilíneo uniforme

É o movimento de uma partícula que se desloca ao longo de uma linha recta com velocidade constante. Pode expressar-se por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

de modo que  $\vec{v}(t) = \vec{v}$  não varia no tempo. Podemos tomar a direcção do movimento como eixo  $Ox$  e então a coordenada da partícula em função do tempo é dada por

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (2.7)$$

**Problema:** Verifique que a aceleração é nula.

**Resolução:**  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ .

### 2.3.2 Movimento rectilíneo uniformemente acelerado

Neste caso a partícula tem aceleração constante igual a  $a$ . A sua posição no eixo  $Ox$  é dada por

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad (2.8)$$

e a velocidade vai aumentando linearmente com o tempo:

$$v(t) = v_0 + at. \quad (2.9)$$

**Problema:** Usando (2.8) demonstre a equação (2.9).

**Resolução:**  $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$ .

### 2.3.3 Movimento circular uniforme

É o caso em que uma partícula descreve uma circunferência com velocidade constante em módulo. Supondo que o movimento se dá no plano  $Oxy$  e a trajectória está centrada na origem  $O$  e tem raio  $R$ , as coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t), \\ y(t) &= R \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

O ângulo que o vector posição faz com o eixo  $Ox$  é  $\omega t$  e portanto aumenta linearmente com o tempo.  $\omega$  é a *velocidade angular* e corresponde ao ângulo varrido pelo vector posição na unidade de tempo.

Uma vez que o módulo da velocidade não varia (por isso se diz que o movimento é uniforme) a aceleração tangencial é então nula. Mas a aceleração normal não é nula porque o vector velocidade vai mudando de direcção no decorrer do tempo. Conclui-se assim que neste caso o **vector aceleração aponta sempre para o centro da circunferência**. Esta situação está representada na figura 2.3. Diz-se que a aceleração é *centrípeta*. O módulo da aceleração é dado por:

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}.$$

A relação entre a velocidade e a velocidade angular é:

$$v = \omega R.$$

**Problema:** Usando (2.10) verifique que  $v = \omega R$ .

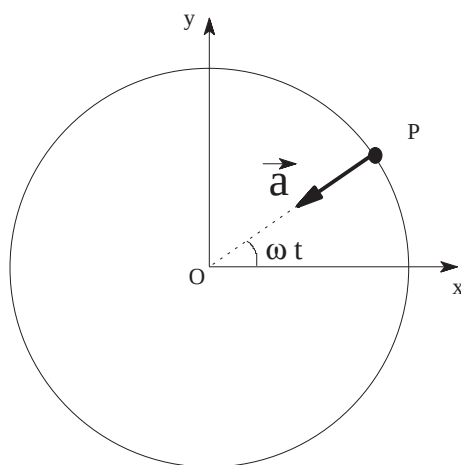


Figura 2.3: Aceleração no movimento circular uniforme.

**Resolução:**

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y = \\ &= -R\omega \sin(\omega t) \vec{u}_x + R\omega \cos(\omega t) \vec{u}_y. \end{aligned}$$

Portanto  $v^2 = R^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + R^2\omega^2 \cos^2(\omega t) = R^2\omega^2$ , logo  $v = \omega R$ .

## 2.4 Exercícios

1. Dois comboios circulam na mesma linha a 30 km/h em sentidos opostos e estão separados por 60 km. Um pássaro voa a 60 km/h entre os dois comboios. Sempre que encontra um dos comboios volta para atrás até encontrar o outro e vai repetindo

este movimento até que os dois comboios se encontram. Qual é a distância total percorrida pelo pássaro?

2. Um automóvel, partindo do repouso, atingiu a velocidade de 40 km/h em 10 s. (a) calcule a aceleração média; (b) supondo que a aceleração foi constante, determine a posição no instante  $t = 10$  s.
3. A lei do movimento de uma partícula é

$$\vec{r}(t) = (6t - 1)\vec{u}_x + 3t^3\vec{u}_z \text{ (m)}. \quad (2.11)$$

(a) Calcule o deslocamento entre os instantes  $t = 1$  s e  $t = 3$  s; (b) calcule a velocidade média nesse intervalo; (c) calcule a velocidade instantânea em  $t = 1$  s;

4. Um movimento no eixo Ox é dado por:  $x(t) = 6t^2 - 2t + 1$ .
  - (a) Represente graficamente  $x(t)$ .
  - (b) Determine a velocidade média no intervalo de entre  $t = 0$  e  $t = 1$ .
  - (c) Determine a velocidade instantânea  $v(t)$ .
  - (d) A partir de que momento se move o corpo no sentido positivo?
5. Um corpo desloca-se com velocidade constante no eixo Ox. Passa no ponto  $x=2$ m no instante  $t=2$ s e no ponto  $x=10$ m que  $t=3$ s.
  - (a) Calcule a velocidade.
  - (b) Represente o gráfico  $x(t)$ .
  - (c) O que significam a ordenada na origem e o declive da recta que traçou?
6. Um corpo cai, na vertical, com aceleração  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . No instante  $t = 2$  s atinge o solo. Determine: (a) a altura de que caiu a bola, supondo que partiu do repouso; (b) a velocidade da bola em função da altura ao solo.
7. É costume dizer-se que, para os automobilistas, a *distância de travagem*,  $d_T$ , é  $d_T = v^2/100$  com  $v$  expresso em  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$  e a distância  $d_T$  em metros. A que aceleração, suposta constante, é que isto corresponde?
8. Um corpo é lançado verticalmente para cima com velocidade de 3 m/s. Até que altura sobe?
9. Represente graficamente  $x(t)$  para um corpo que se desloca com velocidade constante no eixo Ox, com velocidade -4 m/s e que passa no ponto  $x=-1$  no instante  $t=0$ . Qual a posição dele no instante  $t=11$ s ?

10. Suponha que a Terra executa um movimento circular uniforme em torno do Sol. A distância do Sol é 149600 mil quilômetros. Determine:
- (a) a velocidade angular da Terra;
  - (b) a velocidade da Terra;
  - (c) a aceleração da Terra.
11. Um ponto no equador da Terra executa um movimento circular uniforme, devido à rotação desta, de raio 6378 Km. Determine:
- (a) a velocidade angular de rotação da Terra;
  - (b) a velocidade do ponto;
  - (c) a aceleração do ponto.

## Tema 3

# Dinâmica da partícula

### 3.1 As três Leis de Newton

O capítulo anterior foi dedicado apenas à descrição do movimento de uma partícula. Agora ir-se-á relacionar esse movimento com as suas causas. O conceito mais importante a ser introduzido é o de **força**. A teoria da Mecânica Clássica (não relativista) assenta nas seguintes três **Leis de Newton**:

1. Enquanto sobre uma partícula não actuarem quaisquer forças (ou a força resultante for nula), esta permanecerá em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme.
2. A força que actua numa partícula é igual à derivada em ordem ao tempo do seu momento linear. Isto expressa-se pela fórmula:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.1)$$

3. Se uma partícula A exerce uma força sobre uma partícula B então esta exerce, simultaneamente, uma força com a mesma intensidade mas de sentido oposto sobre a partícula A. Estas duas forças constituem um par “acção-reacção”.

A primeira lei diz que se um corpo está parado ou se move com velocidade  $\vec{v}$  constante então a soma (vectorial) de todas as forças que actuam sobre ele é zero. Ou porque não há nenhuma força ou porque elas se anulam uma às outras. Um exemplo é o seguinte: se um objecto está parado em cima de uma mesa isso quer dizer que a soma de todas as forças que estão a actuar sobre ele é nula. Dito de outra maneira, a primeira lei diz que os estados de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme não têm uma causa. Uma dessas forças é o peso do corpo (exercida pela Terra sobre ele) e outra é a reacção normal da mesa sobre esse corpo.

A segunda lei diz que a força  $\vec{F}$  é igual a

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Como  $\vec{p} = m\vec{v}$  então concluímos (para  $m$  constante) que

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Portanto, neste caso, a força é o produto da massa pela aceleração. Repare-se que na segunda lei surge o conceito de força como **causa** da modificação do estado de movimento dos corpos (isto é, da velocidade). A massa  $m$  chama-se massa inercial e é uma característica do corpo que determina se ele vai acelerar mais ou menos quando sujeito a uma certa força. Quanto maior a massa ou inércia do corpo, menor será a sua aceleração.

Uma força representa-se matematicamente por um vector. Como tal, possui as seguintes características:

- direcção ou linha de acção (é a recta ao longo da qual a força actua);
- sentido;
- intensidade (módulo) cuja unidade é, no Sistema Internacional, o *newton* (N);
- ponto de aplicação (é o ponto do corpo onde ela está a ser exercida).

Se sobre uma partícula actuarem várias forças então aquela irá sofrer uma aceleração que é a soma das acelerações que cada força provocaria separadamente. Este resultado constitui o princípio da independência das forças e pode ser demonstrado como se segue: sejam  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  as forças aplicadas numa partícula de massa  $m$ . Então a sua aceleração será

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

onde

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m} \quad \text{e} \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m},$$

são as acelerações que  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  provocariam separadamente. A soma vectorial de todas as forças que actuam numa partícula chama-se **força resultante**. Quando a resultante é nula diz-se que a partícula está em equilíbrio. Uma partícula em equilíbrio pode portanto estar parada ou em movimento rectilíneo uniforme.

Chama-se peso à força gravítica exercida pela Terra sobre um corpo.<sup>1</sup> Aponta para o centro da Terra (direcção vertical) e a sua intensidade é igual a  $mg$  com  $g \simeq 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  sendo a aceleração da gravidade e  $m$  a massa do corpo. Todos os corpos caem com a mesma aceleração  $g$  independentemente da sua massa.

---

<sup>1</sup>Existe uma definição mais elaborada de peso que pretende ter em conta o efeito da rotação da Terra além da força da gravidade.

## 3.2 Algumas aplicações simples das leis de Newton

### 3.2.1 Corpo sobre uma mesa

Consideremos o caso de um bloco de massa  $m$  pousado numa mesa (ver figura 3.1). Se o bloco estiver parado isso quer dizer, pela primeira lei de Newton, que a resultante das forças que nele actuam é nula. Sobre ele actuam duas forças: o peso  $\vec{F}_g$  e a reacção normal da mesa sobre ele  $\vec{N}$ . E então temos  $\vec{F}_g = -\vec{N}$ . A "reacção normal" chama-se "normal"

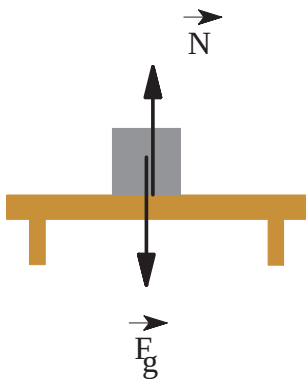


Figura 3.1: Forças exercidas num bloco em repouso sobre uma mesa.

porque é perpendicular à superfície da mesa ("normal" = perpendicular). É "reacção" porque corresponde à força aplicada *no* bloco *pela* mesa em virtude de o bloco estar a exercer na mesa uma força igual a  $-\vec{N} = \vec{F}_g$  (acção aplicada *na* mesa). Há portanto um par de forças acção-reacção entre o bloco e a mesa (terceira lei de Newton).

Se agora exercermos no bloco uma força  $\vec{F}$  horizontal, como se mostra na figura 3.2, então a resultante das forças será  $\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{F} = \vec{F}$ . Ele mover-se-á com aceleração dada por  $\vec{a} = \vec{F}/m$ .

### 3.2.2 Corpo num plano inclinado

Neste caso a reacção normal do plano sobre o bloco está inclinada como mostra a figura 3.3. Aqui é conveniente decompor as forças segundo a direcção do plano e segundo a direcção normal ao plano. Não é preciso decompor  $\vec{N}$  porque já está segundo a normal ao plano. Então é preciso decompor somente a força gravítica  $\vec{F}_g$ . A projecção de  $\vec{F}_g$  segundo a normal tem módulo  $|\vec{F}_g| \cos(\alpha)$  e vai cancelar a força  $\vec{N}$  (para que não exista movimento segundo a normal ao plano).

A componente do peso segundo a direcção do plano tem intensidade  $|\vec{F}_g| \sin(\alpha)$  e é a única componente eficaz do peso que realmente vai fazer o bloco descer o plano. O

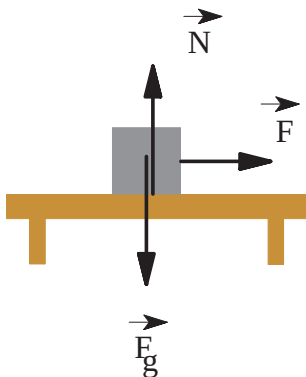


Figura 3.2: Bloco sobre uma mesa é arrastado por acção de uma força.

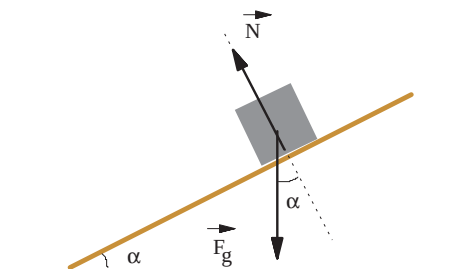


Figura 3.3: Forças exercidas num bloco num plano inclinado.

movimento de descida tem aceleração constante igual a

$$a = \frac{|\vec{F}_g| \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

### 3.2.3 Corpo suspenso por um fio

A força que o fio exerce *no* corpo é  $\vec{T}$  e vai ter de compensar o peso do corpo  $\vec{F}_g$ . Portanto  $\vec{T} + \vec{F}_g = 0$ . O corpo exerce *no* fio uma força igual a  $-\vec{T}$ . A força  $\vec{T}$  chama-se "tensão" do fio. Esta situação está representada na figura 3.4.

### 3.2.4 Blocos ligados por fio

Consideremos dois blocos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , em cima de uma mesa, ligados por um fio. O sistema vai ser arrastado por uma força exterior  $\vec{F}$  que actua num dos blocos, como mostra a figura 3.5. No bloco 1 estão aplicadas as forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{T}$  (esta última é-lhe exercida pelo fio). Sobre o bloco 2 só actua a força  $\vec{T}$  (exercida pelo fio)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>O fio exerce forças de igual intensidade nos dois blocos porque a sua massa é desprezável.

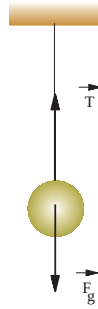


Figura 3.4: Forças exercidas numa esfera suspensa de um fio.

Como a força externa que arrasta o sistema constituído pelos blocos é  $\vec{F}$  e tem de arrastar uma massa total de  $m_1 + m_2$  então a aceleração com que se move o sistema é

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2}. \quad (3.2)$$

Também podemos aplicar a segunda lei de Newton para cada bloco:

$$\begin{aligned} \vec{F} - \vec{T} &= m_1 \vec{a} && \text{para o bloco 1,} \\ \vec{T} &= m_2 \vec{a} && \text{para o bloco 2.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

A resolução deste sistema permite determinar a aceleração  $\vec{a}$  e a tensão  $\vec{T}$  conhecendo  $m_1$  e  $m_2$ .

**Problema:** Seja  $|\vec{F}| = 10$  N,  $m_1 = 2$  Kg e  $m_2 = 3$  Kg. Calcular  $a$  e  $|\vec{T}|$ .

**Resolução:** Pela equação (3.2) temos que  $a = 10/(2 + 3) = 2\text{ms}^{-2}$ . Da segunda equação do sistema (3.3) também se obtém  $T = m_2 a = 3 \times 2 = 6\text{N}$ .

Alternativamente podemos resolver o problema através do sistema de equações (3.3) para calcular  $a$  e  $|\vec{T}|$ :

$$\begin{cases} 10 - |\vec{T}| &= 2a \\ |\vec{T}| &= 3a. \end{cases}$$

Cuja solução é de facto  $a = 2\text{ms}^{-2}$  e  $|\vec{T}| = 6$  N.

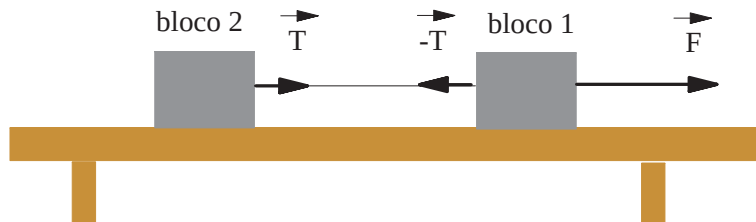


Figura 3.5: Blocos ligados por um fio são arrastados sobre uma mesa horizontal por acção da força  $\vec{F}$ .

### 3.3 Impulso de uma força e Princípio da Conservação do Momento Linear

Suponhamos que uma força constante  $\vec{F}$  actua numa partícula durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . O produto da força por  $\Delta t$  chama-se impulso da força naquele intervalo de tempo. A aceleração da partícula foi  $\vec{a} = \vec{F}/m$  e portanto a variação da sua velocidade no intervalo de tempo  $\Delta t$  foi  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{a}\Delta t$ . Então podemos escrever que o impulso é igual a

$$\begin{aligned}\vec{I} = \vec{F}\Delta t &= m\vec{a}\Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \\ &= \vec{p}_f - \vec{p}_i.\end{aligned}$$

Ou seja, o **impulso de uma força num certo intervalo de tempo é igual à variação do momento linear naquele intervalo de tempo.**

**Problema:** Sobre uma partícula de massa 6 Kg actua a força  $\vec{F} = 10\vec{u}_x$  N durante 8 s. Sabendo que a partícula tinha inicialmente a velocidade  $\vec{v} = 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , calcule a velocidade final da partícula.

**Resolução:** Utilizando a lei do impulso temos que:

$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \Leftrightarrow 10 \times 8\vec{u}_x = 6(\vec{v}_f - 2\vec{u}_y) \Leftrightarrow 80\vec{u}_x = 6\vec{v}_f - 12\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{v}_f = \frac{40}{3}\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Alternativamente podemos resolver o problema através das fórmulas de cinemática. A aceleração (constante) é  $\vec{a} = \frac{10}{6}\vec{u}_x \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Portanto ao fim de  $\Delta t = 8\text{ s}$  a velocidade variou desde o valor inicial  $\vec{v} = 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  até  $\vec{v}_f = 2\vec{u}_y + 8 \times \frac{10}{6}\vec{u}_x = \frac{40}{3}\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Consideremos agora um sistema constituído por duas partículas, 1 e 2, que exercem forças uma na outra. As forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  aplicadas na partícula 1 e na partícula 2 respectivamente constituem um par acção-reacção, pela terceira lei de Newton. As forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  dizem-se forças interiores ao sistema porque são as forças que as partículas desse sistema exercem entre si. Como irá variar o momento linear do sistema num certo intervalo de tempo  $\Delta t$ ? Suponhamos que inicialmente o momento linear total é  $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$ . A variação do momento linear da partícula 1 é igual ao impulso de  $\vec{F}$  e a variação do momento linear da partícula 2 é igual ao impulso de  $-\vec{F}$ . Ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1f} &= \vec{p}_{1i} + \vec{F}\Delta t, \\ \vec{p}_{2f} &= \vec{p}_{2i} - \vec{F}\Delta t.\end{aligned}$$

Somando as duas equações obtemos  $\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$ , isto é,

$$\vec{P}_{total}(inicial) = \vec{P}_{total}(final). \quad (3.4)$$

A equação (3.4) traduz o princípio da conservação do momento linear: **se num sistema só actuarem forças interiores, o momento linear total do sistema não irá variar no tempo.**

A equação (3.4) aplica-se, por exemplo, ao problema da explosão de uma granada (a quantidade de movimento total dos fragmentos tem de ser igual à quantidade de movimento da granada antes da explosão) ou ao problema de determinar a velocidade de recuo de uma arma de fogo.

Se existirem forças externas a actuarem nas partículas então (3.4) já não será válida.

### 3.4 Forças de atrito

No caso mais simples o atrito (ou fricção) entre duas superfícies em contacto é uma força que se opõe ao movimento dessas superfícies dificultando o escorregamento de uma sobre a outra, e é **sempre paralela às superfícies**. O atrito existe por duas razões: por um lado, as superfícies apresentam pequenas rugosidades, invisíveis à vista desarmada; por outro lado, estabelecem-se ligações (forças de atracção) entre as moléculas das duas superfícies. Assim, com o polimento das superfícies as rugosidades diminuem, diminuindo portanto o atrito. Mas se aumentarmos o grau de polimento então, a partir de certo ponto, o atrito começará a aumentar novamente. Isto acontece porque, ficando as superfícies muito lisas, mais ligações moleculares se irão estabelecer entre elas.

Em certos casos o atrito é responsável pelo movimento dos corpos. Um exemplo é o de um bloco de mármore em cima de um camião: o bloco avança com o camião devido à força de atrito entre os dois.

#### 3.4.1 Atrito estático e atrito cinético

A força de atrito que impede que as superfícies iniciem o movimento chama-se **atrito estático**. Considere um bloco pousado numa mesa, sobre o qual está a ser exercida uma força  $\vec{F}$  horizontal. Se houver atrito entre o bloco e a mesa então a intensidade da força  $\vec{F}$  terá de ser maior do que um certo valor mínimo para se conseguir movimentar o bloco. Enquanto isso não acontecer a mesa exerce uma força de atrito no bloco,  $\vec{A}$ , tal que  $\vec{A} = -\vec{F}$  e o bloco não se move porque o atrito cancela a força  $\vec{F}$ . A intensidade mínima de  $\vec{F}$  necessária para movimentar o bloco é dada pela expressão:

$$|\vec{F}|_{min} = \mu_e |\vec{N}| \quad (3.5)$$

onde  $|\vec{N}|$  é a intensidade da reacção normal da mesa sobre o bloco.  $\mu_e$  é o **coeficiente de atrito estático** e é um número (adimensional) que depende da natureza das superfícies

e do seu estado de polimento. Também se conclui que  $\mu_e |\vec{N}|$  é o valor máximo que o atrito estático pode tomar.

Se o bloco estiver em movimento sobre a mesa então a força de atrito  $\vec{A}$  é contrária ao vector velocidade e tem uma certa intensidade dada por:

$$|\vec{A}| = \mu_c |\vec{N}| \quad (3.6)$$

onde  $\mu_c$  é o **coeficiente de atrito cinético**. Em termos qualitativos o que se descreveu acima pode ser representado pela figura 3.6.

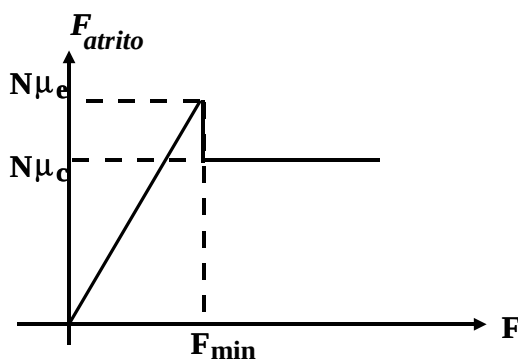
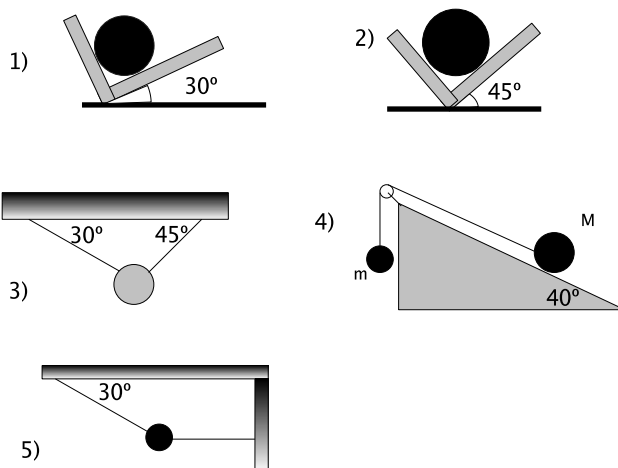


Figura 3.6: Variação da força de atrito com o valor da força aplicada ao bloco. A partir de  $F_{\text{min}}$  o corpo entra em movimento.

### 3.5 Exercícios

- Uma partícula de massa 3Kg está sujeita a uma força  $\vec{F} = 3\vec{u}_x$ .
  - Calcule a aceleração.
  - Supondo no instante  $t = 0$  ela se encontra em repouso, calcule a sua velocidade quando  $t = 2\text{s}$ .
  - Suponha agora que no instante inicial  $t = 0$  ela se encontra na origem com velocidade  $\vec{v}_o = 2\vec{u}_x + \vec{u}_y$ . Calcule  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{v}(t)$ .
- Um corpo de massa 1Kg está sujeito a uma força  $\vec{F} = 2\vec{u}_x$ . Como se moverá ele, sabendo que partiu do repouso?
- Um partícula executa um movimento circular uniforme de raio 1m. A velocidade vale 3m/s.
  - Calcule o período do movimento.

- (b) Determine a velocidade angular.
- (c) Represente num esquema a força que age sobre a partícula e calcule o valor da aceleração.
4. Um corpo de massa 30Kg está suspenso do tecto por uma corrente. Esta tem massa de 1Kg.
- (a) Que força está a ser exercida no tecto?
- (b) Quais as forças aplicadas no corpo?
- (c) Quais as forças aplicadas na corrente?
5. Um bloco de 1500 N está colocado numa superfície. O coeficiente de atrito estático é  $\mu_e = 0.5$  e o coeficiente de atrito cinético é  $\mu_c = 0.4$ .
- (a) Que força tem de ser exercida para se arrastar horizontalmente o bloco?
- (b) Se o empurrarmos com força de 800N, qual será a aceleração?
6. Considere as situações 1 e 2 representadas na Figura. Supondo que a massa vale  $m = 2\text{Kg}$ , determine os módulos das reacções normais das superfícies.



7. Considere um objecto suspenso por dois fios como se mostra na situação 3 representada na Figura. Supondo que a massa vale 1,5 Kg, calcule os valores das tensões nos fios.
8. Relativamente à situação 4 representada na Figura:

- (a) Se não houver atrito, qual a relação entre as massas  $m$  e  $M$  para que haja equilíbrio?
- (b) Supondo que  $m = 1\text{Kg}$ ,  $M = 2\text{Kg}$  e que  $\mu_e = 0,5$ , haverá equilíbrio?
- (c) Supondo que  $m = 1\text{Kg}$  e que  $M = 2\text{Kg}$ , qual é o valor mínimo do atrito estático que garante o equilíbrio?
9. Relativamente à situação 5 representada na Figura: determine as tensões nos fios supondo que a massa vale  $1\text{Kg}$ .
10. Uma partícula de massa  $m = 3\text{ kg}$  executa um movimento descrito pelas seguintes equações

$$x = 2t, \quad y = -t^2, \quad (3.7)$$

- com  $x$  em metros e  $t$  em segundos. a) Calcule a aceleração de movimento. b) Determine o valor da força que actua na partícula e represente-a num esquema. c) Suponha que essa força deixou de existir no instante  $t = 10\text{ s}$ . Como se moverá a partícula a partir desse instante?
11. Um sistema constituído por dois blocos de massas  $m_1 = 1\text{ kg}$  e  $m_2 = 2\text{ kg}$  ligados por um fio de massa desprezável é puxado, sobre uma mesa lisa, com força  $F = 3\text{ N}$ . a) Determine a aceleração do sistema. Faça o esquema das forças. b) Determine a tensão no fio. c) Suponha que, a certa altura, a força  $F$  deixa de existir. Como se moverá o sistema? Qual será o valor da tensão no fio?
12. Uma partícula executa um movimento circular uniforme. O raio da circunferência é  $R = 1\text{ m}$  e a velocidade da partícula é  $v = 3\text{ m/s}$ . a) Calcule o período do movimento. b) Determine a velocidade angular. c) Represente a força que actua na partícula, num dado instante. d) Determine a força que actua na partícula.
13. Uma partícula de massa  $m = 3\text{ kg}$  executa um movimento descrito pelas seguintes equações

$$x = 5 \cos(2t), \quad y = 5 \sin(2t), \quad (3.8)$$

- com  $x$  em metros e  $t$  em segundos. a) Identifique o tipo de movimento. b) Determine o valor da força que actua na partícula e represente-a num esquema. c) Suponha que essa força deixou de existir no instante  $t = \pi\text{ s}$ . Como se moverá a partícula a partir desse instante?
14. Um sistema constituído por dois blocos de massas  $m_1 = 1\text{ kg}$  e  $m_2 = 2\text{ kg}$  ligados por um fio de massa desprezável é puxado, sobre uma mesa lisa, com força  $F = 3\text{ N}$ . a) Determine a aceleração do sistema. Faça o esquema das forças. b) Determine

a tensão no fio. c) Suponha que, a certa altura, a força  $F$  deixa de existir. Como se moverá o sistema? Qual será o valor da tensão no fio.

## Tema 4

# Trabalho e Energia

### 4.1 Energia cinética e trabalho realizado por uma força

#### 4.1.1 Definição de energia cinética

Consideremos uma partícula de massa  $m$  que se desloca com velocidade  $\vec{v}$ . A *energia cinética*,  $E_c$ , é definida como

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad (4.1)$$

e a unidade no Sistema Internacional é o *joule* ( $J$ ). Portanto o joule é equivalente ao  $\text{Kg.m}^2.\text{s}^{-2}$ . A energia cinética está associada ao movimento da partícula.

#### 4.1.2 Definição de trabalho

Consideremos uma partícula, sujeita a uma força constante  $\vec{F}$ , que num dado intervalo de tempo efectua um deslocamento  $\vec{\Delta r}$ . O trabalho realizado pela força nesse deslocamento,  $W$ , é definido como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}. \quad (4.2)$$

A unidade em que se exprime o trabalho no Sistema Internacional é o *joule* ( $J$ ). Se o vector força e o vector deslocamento fizerem entre si um ângulo  $\alpha$  então

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta r}| \cos(\alpha).$$

O ângulo  $\alpha$  varia entre 0 e 180 graus. Se  $\alpha < 90^\circ$  então a força está **a favor** do deslocamento (porque a sua componente segundo  $\vec{\Delta r}$  tem o mesmo sentido que  $\vec{\Delta r}$ ) e realiza um trabalho **positivo**. Se  $\alpha > 90^\circ$  então a força está a **contrariar** o deslocamento (porque a sua componente segundo  $\vec{\Delta r}$  é oposta a  $\vec{\Delta r}$ ) e realiza um trabalho **negativo**. Estas duas situações estão representadas na figura 4.1.

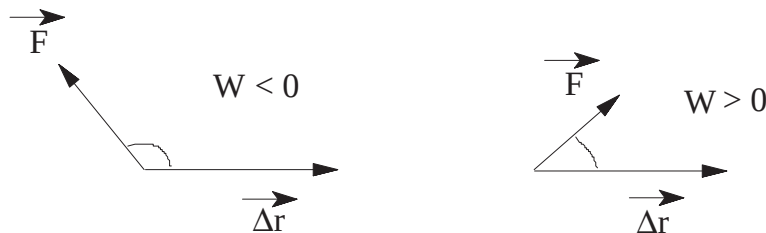


Figura 4.1: O ângulo entre a força e o deslocamento determina o sinal do trabalho.

Se existirem várias forças a actuar sobre a partícula então o trabalho total (da resultante) é a soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças:

$$\begin{aligned} W &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \cdot \vec{\Delta r} \\ &= \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_3 \cdot \vec{\Delta r} + \dots \\ &= W_1 + W_2 + W_3 + \dots \end{aligned}$$

Se a força (resultante) que actua na partícula for variável então, para calcular o trabalho num certo deslocamento  $\vec{\Delta r}$ , devemos dividir esse deslocamento numa soma de muitos deslocamentos pequenos,  $\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_1 + \vec{\Delta r}_2 + \vec{\Delta r}_3 + \dots$ . Cada um dos deslocamentos parciais  $\vec{\Delta r}_i$  é suficientemente pequeno para que a força se possa considerar aproximadamente constante durante esse deslocamento  $\vec{\Delta r}_i$ . O trabalho será então igual à soma dos trabalhos realizados em cada deslocamento parcial:

$$W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta r}_i.$$

Fazendo  $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow \infty$  a soma anterior converte-se num integral e o trabalho escreve-se como

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

### 4.1.3 Relação entre trabalho e variação da energia cinética

Existe uma relação importante entre o trabalho da resultante das forças que actua numa partícula e a sua energia cinética. A força produz uma aceleração que pode alterar o valor da velocidade da partícula. Daí decorre também uma variação da energia cinética. **O trabalho realizado pela resultante das forças sobre uma partícula é igual à variação da sua energia cinética:**

$$W = \Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{inicial}). \quad (4.3)$$

Verifiquemos o resultado anterior para um caso particular. Consideremos uma partícula que parte do repouso e percorre a distância  $d$  sujeita a uma força  $\vec{F}$  constante. Admitindo que a força actua na direcção do versor  $\vec{u}_x$ , a equação das posições é dada por

$$x = \frac{F}{2m}t^2,$$

e ao fim da distância  $d$  a velocidade é  $v_x = \sqrt{2dF/m}$  (obtenha este resultado), pelo que a variação da energia cinética é dada por

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{inicial}) = \frac{1}{2}m\frac{2dF}{m} - 0 = F \cdot d = W. \quad (4.4)$$

**Exemplo:** Sobre uma partícula de massa 6 Kg actua a força  $\vec{F} = 12\vec{u}_x$  N. Sabendo que a partícula tinha inicialmente a velocidade  $\vec{v} = 2\vec{u}_x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,

1. calcule a velocidade ao fim de 2 segundos;

**Resolução:** O movimento processa-se ao longo do eixo dos  $xx'$ . A aceleração é de  $F/m = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Então a velocidade final é de

$$v_f = v_i + at = 2 + 2 \times 2 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. verifique que o trabalho foi igual à variação da energia cinética.

**Resolução:** A variação de energia cinética foi de  $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 108 - 12 = 96 \text{ J}$ .

Como o deslocamento foi de  $v_it + \frac{1}{2}at^2 = 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 8 \text{ m}$ , então o trabalho foi  $W = F\Delta x = 12 \times 8 = 96 \text{ J}$ . Logo  $W = \Delta E_c$ .

#### 4.1.4 Trabalho realizado pela força gravítica. Energia potencial gravítica.

À superfície da Terra a força da gravidade é constante e actua segundo a vertical do lugar. Suponhamos que uma partícula se desloca da altura  $h_i$  para a altura  $h_f$  como mostra a figura 4.2. O trabalho realizado pela gravidade é então

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_g} &= \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r} = mg |\Delta \vec{r}| \cos(\alpha) \\ &= mg(h_i - h_f). \end{aligned}$$

Pela relação existente entre trabalho e energia cinética exposta na secção anterior, podemos escrever:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_g} &= mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ \Leftrightarrow mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 &= mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2. \end{aligned}$$

À quantidade  $mgh$  passaremos a chamar energia potencial gravítica. A soma da energia potencial gravítica com a energia cinética é a energia mecânica. A equação anterior diz

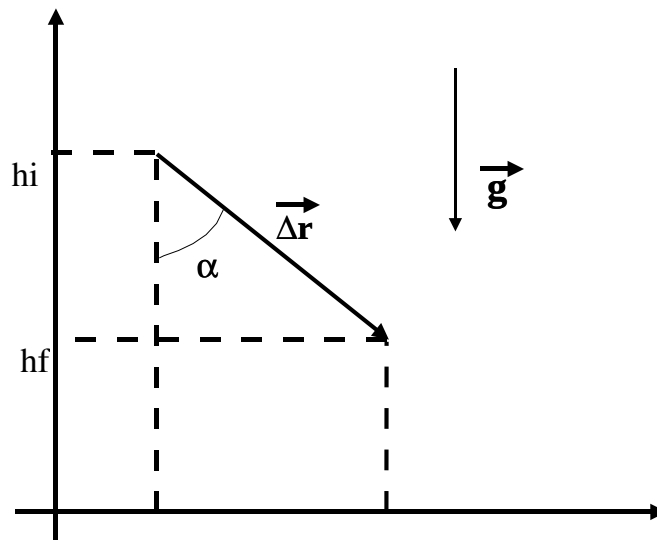


Figura 4.2: Deslocamento de uma partícula entre dois pontos a diferentes alturas, no campo gravítico.

que a energia mecânica inicial é igual à energia mecânica final. Isto é, **quando uma partícula se desloca por acção da gravidade a sua energia mecânica não varia**. Assim, se um corpo cai ele vai perdendo altura (e energia potencial) mas simultaneamente ganha velocidade (e energia cinética). A soma da energia potencial com a energia cinética mantém-se constante durante a queda. Porque a energia mecânica se conserva diz-se que a força da gravidade é conservativa.

Quando um corpo se move sobre um plano inclinado ou está suspenso por um fio (no caso do pêndulo) existe uma força adicional para além da gravidade. Trata-se da reacção normal do plano sobre o corpo ou da tensão no fio, conforme o caso. Mas estas forças **não realizam trabalho porque são sempre perpendiculares ao vector velocidade do corpo**. No caso do plano inclinado é óbvio que a reacção normal não realiza trabalho. Mas se se tratar de um pêndulo ou de uma superfície curva então podemos considerar o deslocamento do corpo como a soma de muitos deslocamentos parciais pequenos. Em cada um desses deslocamentos infinitesimais o trabalho realizado pela reacção normal da superfície é nulo por ser sempre perpendicular a esses deslocamentos (os quais são paralelos à velocidade). Assim, mesmo que o corpo desça por uma superfície encurvada a sua energia mecânica conserva-se permitindo-nos determinar o valor da velocidade em qualquer ponto da trajectória. Por exemplo, no caso da figura 4.3, se o corpo partiu de uma altura inicial  $h_i$  com velocidade  $\vec{v}_i$  então a sua velocidade  $\vec{v}_f$  num ponto à altura  $h_f$

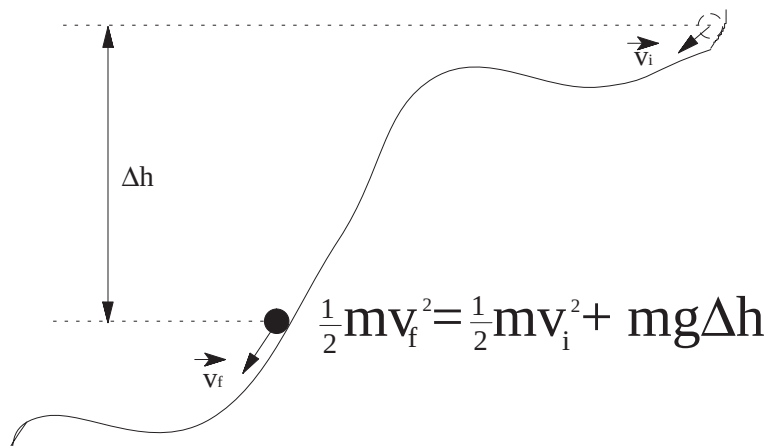


Figura 4.3: Conservação da energia mecânica na descida

é tal que

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_i - h_f)}.$$

**Problema:** Um pêndulo de comprimento  $l = 50$  cm é largado de um ângulo de  $30^\circ$ .

1. Calcule a velocidade  $v$  com que passa no ponto mais baixo da trajectória.

**Resolução:** Como apenas a força gravítica realiza trabalho, a energia mecânica é conservada. O seu valor é portanto igual à energia potencial à altura de que foi largado (já que a velocidade ali era nula):

$$E_{mec} = E_p(\text{inicial}) = mgl(1 - \cos(30^\circ)) = m \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esta energia será convertida em energia cinética no ponto mais baixo da trajectória (estamos a considerar que este se encontra à altura zero). Logo

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 = m \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2 \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Calcule a tensão no fio no ponto mais baixo da trajectória supondo que a massa do pêndulo é de 2 Kg.

**Resolução:** A trajectória é circular logo existe aceleração normal. No ponto mais baixo as forças  $\vec{F}_g$  e  $\vec{T}$  encontram-se segundo a vertical logo não pode ali haver aceleração tangencial. Assim,  $\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}_n$ . Tendo em conta que a tensão e a aceleração apontam para cima e a gravidade

aponta para baixo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} T - F_g &= ma_n = m \frac{v^2}{l} = 2 \times \frac{2 \times 10 \times 0,5 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}{0,5} . \\ T &= 25N . \end{aligned}$$

### Exercícios:

- Um corpo de massa 2Kg cai de uma altura de 5m.
  - Determine a duração da queda usando a lei do impulso.
  - Determine a velocidade de impacto com o solo usando conservação de energia.
- Um corpo de massa 3Kg deslocou-se da posição (0,1,2)m para a posição (2,-3,6)m sujeito a uma força constante  $\vec{F} = (8,1,2)\text{N}$ .
  - Determine o trabalho.
  - Se a velocidade inicial era de 1m/s, qual é a velocidade final?
- Um partícula sobe uma rampa com inclinação de 30 graus e a velocidade inicial é de 5 m/s. Até que altura subirá ela, se estiver sujeita apenas gravidade?
- Um corpo de massa 2Kg, está sujeito a uma força  $\vec{F} = (2, 1, 1)\text{N}$ . No instante inicial a velocidade era de  $\vec{v}_0 = (1, 1, 0)\text{m/s}$ .
  - O impulso nos primeiros 5 segundos.
  - A velocidade ao fim de 5 segundos.
  - O trabalho ao fim de 5 segundos.
- Um corpo é lançado ao ar verticalmente com velocidade de 3 m/s.
  - Determine a altura até que sobe usando conservação de energia.
  - Determine o tempo que demora a subir usando a lei do impulso .
- Um corpo tem energia cinética 6J e quantidade de movimento 3Kg m /s. Calcule a velocidade.
- Um corpo de massa 2Kg tem velocidade de 3 m/s. A certa altura exerce-se sobre ela uma força em sentido contrário ao movimento até ela parar.
  - Calcule a distância percorrida até parar.
  - Calcule o trabalho da força.

8. Um bloco de massa  $6\text{Kg}$  é arrastado sobre uma mesa com velocidade constante e o coeficiente de atrito cinético é de  $0,5$ . Determine o trabalho realizado pelo atrito quando o bloco se desloca de  $1$  metro.
9. Uma pedra, de massa  $2,0\text{ kg}$ , descreve uma trajectória circular, num plano vertical, presa a um fio de comprimento  $l = 80\text{ cm}$ . (a) Mostre que o valor mínimo de energia mecânica que é necessário fornecer à pedra para que a pedra siga a trajectória descrita é  $5mgl/2$ , onde  $m$ ,  $g$  e  $l$  são a massa da pedra, a aceleração da gravidade e o comprimento do fio, respectivamente; (b) Qual o valor da velocidade da pedra no ponto mais alto da trajectória?

## Tema 5

# Movimento relativo

### Exercícios:

1. A origem de um sistema de eixos  $xyz$  tem movimento  $\vec{OO'} = (2, -3t^2, -5t)$  relativamente a um sistema XYZ fixo. O vector posição de uma partícula  $\vec{r} = (\sin t, -\cos t, e^{-t})$  no sistema  $xyz$ . Calcule: *a)*  $d\vec{r}/dt$  no sistema fixo; *b)*  $d\vec{r}/dt$  no sistema móvel; *c)*  $d^2\vec{r}/dt^2$  no sistema fixo; *d)*  $d^2\vec{r}/dt^2$  no sistema móvel; *e)* os dois observadores concordam quanto às forças que actuam na partícula?
2. O condutor de um carro que se desloca a 60 Km/h reduz a velocidade para 30 Km/h em apenas 5s. Determine: *a)* as forças a que ele se sente sujeito; *b)* as forças a que ele está sujeito na opinião de quem está fora do carro a ver.
3. Uma bola está pousada no chão de uma carruagem de um comboio. Quando este arranca, o passageiro vê a bola começar a deslocar-se. *a)* Em que sentido se desloca a bola vista pelo passageiro? *b)* Em que sentido se desloca a bola vista por uma pessoa fora da carruagem?
4. Um indivíduo está parado sobre uma plataforma circular giratória a 3 metros do centro desta. A velocidade angular da plataforma é de 2 rotações por minuto. Se ele pousar uma bola no chão esta fica parada ao pé dele?
5. Uma pessoa pesa 70Kg e a aceleração da gravidade é  $g=9,8\text{ms}^{-2}$ . Se se colocar em cima de uma balaça no equador, o peso indicado seria o mesmo que se estivesse no pólo norte?
6. Quando vamos a descer num elevador e este trava, parece que nos sentimos mais pesados. Porquê?

## Tema 6

# Dinâmica de rotação

Ir-se-ão definir três novos conceitos: momento angular, momento de uma força e momento de inércia. No estudo do movimento de rotação de um corpo o momento angular e momento de inércia desempenham papéis semelhantes aos conceitos de quantidade de movimento e de massa no estudo do movimento de uma partícula. Em particular, a relação entre momento de uma força e momento angular é equivalente à relação entre força e quantidade de movimento para uma partícula (segunda lei de Newton).

### 6.1 Cálculo do produto externo

O produto externo de dois vectores origina um terceiro vector  $\vec{M}$ , perpendicular ao plano formado pelos dois vectores originais. Sejam dois vectores  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  (por exemplo, força e posição) tais que, em termos das suas componentes, se escrevem como

$$\vec{F} = \vec{u}_x F_x + \vec{u}_y F_y + \vec{u}_z F_z, \quad \vec{r} = \vec{u}_x x + \vec{u}_y y + \vec{u}_z z, \quad (6.1)$$

então, o produto externo de  $\vec{r}$  por  $\vec{F}$ ,  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , é definido por

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (yF_z - zF_y)\vec{u}_x + (zF_x - xF_z)\vec{u}_y + (xF_y - yF_x)\vec{u}_z. \quad (6.2)$$

O vector  $\vec{M}$  é tal que

$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \theta_{(\vec{r}, \vec{F})}, \quad \vec{M} \cdot \vec{F} = \vec{M} \cdot \vec{r} = 0. \quad (6.3)$$

**Problema:** Sendo  $\vec{a} = 2\vec{u}_x + \vec{u}_y$  e  $\vec{b} = -\vec{u}_y + 10\vec{u}_z$  calcular  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned} (2\vec{u}_x + \vec{u}_y) \times (-\vec{u}_y + 10\vec{u}_z) &= 2\vec{u}_x \times (-\vec{u}_y) + 2\vec{u}_x \times 10\vec{u}_z + \vec{u}_y \times (-\vec{u}_y) + \vec{u}_y \times 10\vec{u}_z = \\ -2\vec{u}_z - 20\vec{u}_y + 0 + 10\vec{u}_x &= 10\vec{u}_x - 20\vec{u}_y - 2\vec{u}_z \end{aligned}$$

## 6.2 Momento angular. Momento de inércia

### 6.2.1 Uma partícula

Consideremos uma partícula de massa  $m$ , na posição  $\vec{r}$  com velocidade  $\vec{v}$ . O momento angular é um vector,  $\vec{l}$ , que se define por:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}. \quad (6.4)$$

A unidade S.I. do momento angular é  $\text{Kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Da definição concluímos que  $\vec{l}$  depende de onde se encontra a origem do referencial, uma vez que depende de  $\vec{r}$ .

No caso do movimento circular uniforme o momento angular em relação ao centro da circunferência é perpendicular ao plano da circunferência e o seu valor é

$$l = mvr = mr^2\omega.$$

A quantidade  $mr^2$  chama-se momento de inércia da partícula em relação ao centro da circunferência e costuma ser representada pela letra  $I$ . Assim temos:

$$l = I\omega. \quad (6.5)$$

### 6.2.2 Corpo em rotação em torno de um eixo fixo

O momento angular de um corpo em rotação é a soma dos momentos angulares das partículas que o constituem. Se o corpo estiver a girar sobre um eixo em relação ao qual tem simetria de revolução então o vector momento angular está ao longo desse eixo. O momento de inércia do corpo é a soma dos momentos de inércia das partículas que o constituem.

O momento angular do corpo relativamente ao eixo de rotação é dado por

$$\vec{L}_{corpo} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m \sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (6.6)$$

No caso em que o eixo de rotação é um eixo de simetria do corpo, como no caso nas figuras 6.1 e 6.2, o momento angular está dirigido segundo o eixo dos  $Z'$ s e é dado por

$$\vec{L}_{corpo} = m \sum_i (R_i^2) \omega \vec{u}_z = I_{corpo} \omega \vec{u}_z, \quad (6.7)$$

onde  $R_i$  é a distância  $R_i$  ao eixo de rotação. Consideremos, por exemplo, um disco a girar com velocidade angular  $\omega$ . O valor do momento angular é dado por

$$l = I_{disco} \omega,$$

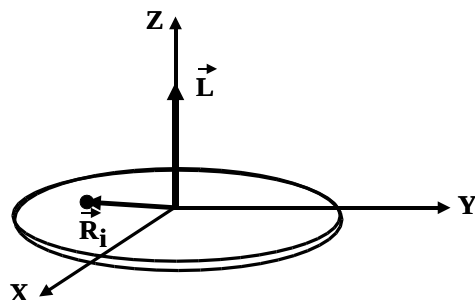


Figura 6.1: Movimento de rotação de um objecto plano em torno de um eixo fixo.

| Sólido | I                 |
|--------|-------------------|
| anel   | $MR^2$            |
| disco  | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| esfera | $\frac{2}{5}MR^2$ |

Tabela 6.1: Momento de inércia de alguns sólidos geométricos.  $R$  é o raio e  $L$  é o comprimento.

onde  $I_{disco}$  é o momento de inércia do disco em relação ao eixo de rotação. Cada uma das partículas que constituem o disco executa um movimento circular e  $I_{disco}$  é a soma dos momentos de inércia de todas as partículas:

$$I_{disco} = \sum_i m_i R_i^2.$$

O momento de inércia do disco depende da sua massa e do raio.

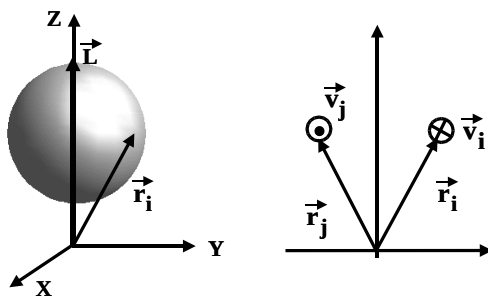


Figura 6.2: Movimento de rotação de um objecto em torno de um eixo fixo de simetria. Da figura da direita fica claro que as componentes do momento angular que não estão dirigidas segundo o eixo dos  $Z$ 's, das duas partículas indicadas, cancelam.

## 6.3 Momento de uma força

### 6.3.1 Definição para uma partícula

Consideremos uma partícula na posição  $\vec{r}$  sujeita à força  $\vec{F}$ . O momento da força em relação à origem é

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6.8)$$

O módulo de  $\vec{M}$  é  $rF\sin\alpha$ , de acordo com as propriedades do produto externo introduzidas anteriormente. Mas  $r\sin\alpha \equiv b$  é a distância da linha de acção da força à origem e a essa distância chamamos braço da força, como se ilustra na figura 6.3. Assim, o valor do

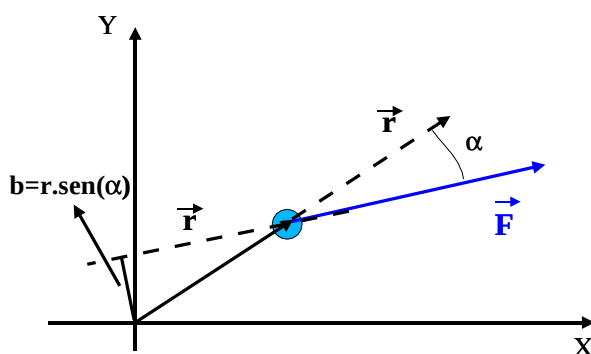


Figura 6.3: Representação geométrica do braço de uma força. O ângulo  $\alpha$  é definido como o menor ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ .

momento é igual à intensidade da força vezes o braço.

Existe uma relação importante entre o momento da força e o momento angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}. \quad (6.9)$$

Esta relação pode demonstrar-se facilmente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{porque } \vec{v} \times \vec{p} = 0 \\ &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}. \end{aligned}$$

A equação (6.9) é equivalente à lei de Newton  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

### 6.3.2 Aplicação ao movimento circular

Consideremos uma partícula a mover-se numa trajectória circular de raio  $R$  mas com aceleração tangencial constante  $a_t$ . Então os módulos da velocidade e da aceleração normal

aumentarão no decorrer do tempo:

$$\begin{aligned} v &= v_o + a_t t, \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(v_o + a_t t)^2}{R}. \end{aligned}$$

Consequentemente o módulo da força que actua na partícula também aumenta:

$$F = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2} = m\sqrt{\left[\frac{(v_o + a_t t)^2}{R}\right]^2 + a_t^2}.$$

O momento da força em relação ao centro da circunferência é

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times (\vec{a}_n + \vec{a}_t) = m\vec{r} \times \vec{a}_t.$$

Logo  $M = mRa_t$ . Mas como  $a_t = \frac{dv}{dt}$  e  $l = mRv$  então

$$M = \frac{dl}{dt}.$$

Portanto verifica-se a equação (6.9). Por outro lado a relação entre os valores da velocidades linear e angular é:

$$v = \omega R,$$

e derivando ambos os membros em ordem ao tempo obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = a_t = R \frac{d\omega}{dt}.$$

A variação de velocidade angular por unidade de tempo,  $\frac{d\omega}{dt}$ , é a aceleração angular que se representa por  $\alpha$ . Portanto verifica-se a relação:

$$M = I\alpha.$$

### 6.3.3 Sistema de partículas. Conservação do momento angular.

Consideremos um sistema de partículas nas posições  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ , etc, sobre as quais actua as forças  $\vec{F}_1$  (na partícula 1),  $\vec{F}_2$  (na partícula 2), etc. A soma de todos os momentos de forças é

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots &= \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \dots \\ &= \frac{d\vec{l}_{\text{sistema}}}{dt}. \end{aligned}$$

Portanto a derivada em ordem ao tempo do momento angular de um sistema é igual à soma dos momentos de todas as forças que sobre ele actua. Entre essas forças temos

apenas de considerar aquelas que são externas já que o momento total das forças internas é nulo. Para verificarmos isto basta considerar duas partículas sujeitas a forças internas  $\vec{F}$  como se mostra na figura 6.4. Essas forças internas decorrem da interação entre as duas partículas, formando um par acção-reacção (terceira lei de Newton) pelo que o momento que actua nas duas partículas devido apenas a essas duas forças é

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = 0, \quad (6.10)$$

pois o vector  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  é paralelo à linha de acção de ambas forças como se vê da figura 6.4.

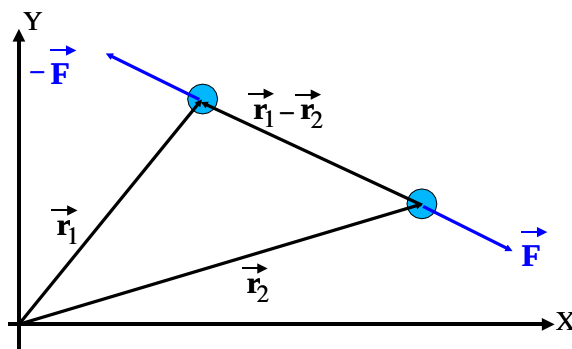


Figura 6.4: Representação geométrica das forças internas num sistema de duas partículas.

Daqui decorre que as forças internas a um sistema não fazem alterar o seu momento angular. Temos assim a **lei de conservação do momento angular**: se num sistema não actuarem forças exteriores então o seu momento angular não varia no tempo.

Um exemplo desta lei é o movimento de rotação de uma bailarina. O momento angular da bailarina com os braços abertos é

$$l = I\omega.$$

A bailarina encolhe os braços devido apenas a forças internas e o momento de inércia diminui para um valor  $I'$  tal que  $I' < I$ . Como  $L$  se mantém então a velocidade angular aumenta para  $\omega' > \omega$  tal que :

$$l = I\omega = I'\omega'.$$

Um outro exemplo é a variação da velocidade orbital da Terra ao longo do ano. Como a força entre o Sol e a Terra é colinear com o raio vector que une o Sol à Terra,  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ . Por outro lado, o comprimento desse raio vector não é sempre o mesmo ao longo da trajectória (órbita elíptica) pelo que a velocidade tem que variar de modo a ter-se  $l = rmv\sin\alpha = C^{\text{te}}$ .

### 6.3.4 Corpo em rotação

Consideremos agora um objecto em rotação sujeito a uma força externa. O momento dessa força calculado em relação ao eixo de rotação é igual à derivada em ordem ao tempo do momento angular. Como este é dado por  $I\omega$  então

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

O momento  $M$  é dado pelo valor da força vezes o seu braço (distância ao eixo de rotação).

Por exemplo, no caso de um cilindro em rotação o momento da força é  $FR$ , a força vezes o raio se a força estiver a ser exercida tangencialmente à face do cilindro. Então

$$FR = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}.$$

#### Exercícios:

1. Uma bola tem momento de inércia  $I=2\text{Kgm}^2$  e roda com velocidade angular  $3\text{s}^{-1}$ . Calcule o momento angular.
2. O momento de inércia de um cilindro é de  $30\text{g}\cdot\text{cm}^2$  e roda com uma velocidade angular de 2 rotações por minuto. Calcule o momento angular.
3. Num movimento circular uniforme de raio 2m, uma partícula tem velocidade de 10 m/s. Calcule o seu momento angular e o momento da força que actua sobre ela.
4. Num movimento circular uniforme de raio 2m, uma partícula tem velocidade de 10t m/s. Calcule o momento da força que actua sobre ela.
5. Um disco de massa 120g e raio 20cm é posto a rodar com velocidade angular de 33 rotações por minuto. Usando a tabela 6.1, calcule:
  - (a) o momento angular do disco em rotação;
  - (b) o momento das forças que actuaram no disco, sabendo que ele demorou 2s a atingir aquela velocidade angular.
6. Para abrir uma porta é mais fácil empurrar a sua extremidade do que junto à dobradiça . Porquê?