



Física Geral para Arquitectura

Miguel António da Nova Araújo

Departamento de Física
Universidade de Évora

2011-2012

Índice

Bibliografia	4
0.1 Trigonometria	5
0.2 Adição de vectores	5
0.3 Teorema de Pitágoras generalizado	7
0.4 Exercícios:	8
0.5 Produto interno de vectores	8
0.6 Operações com potências	9
0.7 Exercícios:	9
1 Medidas Físicas	11
1.1 Unidades, dimensões e estimativas dimensionais	11
1.1.1 O pêndulo simples	13
1.1.2 Bola de fogo resultante de uma explosão	14
1.2 Exercícios	15
2 Forças e Estática	18
2.1 Algumas aplicações simples das leis de Newton	20
2.1.1 Corpo sobre uma mesa	20
2.1.2 Corpo suspenso por um fio	20
2.1.3 Corpo num plano inclinado	20
2.2 Forças de atrito	21
2.2.1 Atrito estático e atrito cinético	22
2.3 Exercícios	23
2.4 Momento de uma força	24
2.5 Cálculo do produto externo	24
2.6 Exercícios	26
3 Centro de massa de um Sistema de partículas	28
3.1 Centro de massa	28

3.2	Exercícios	29
4	Cinemática	33
4.1	Conceito de Mecânica (Cinemática e Dinâmica)	33
4.2	Noções de Cinemática	33
4.2.1	Posição	33
4.2.2	Deslocamento	34
4.2.3	Velocidade	35
4.2.4	Aceleração	36
4.3	Alguns exemplos de movimentos	38
4.3.1	Movimento retilíneo uniforme	38
4.3.2	Movimento retilíneo uniformemente acelerado	38
4.3.3	Movimento circular uniforme	38
4.4	Exercícios	39
5	Dinâmica da partícula	41
5.1	As três Leis de Newton	41
5.2	Aplicações simples das leis de Newton	43
5.2.1	Blocos ligados por fio	43
5.3	Impulso de uma força e Princípio da Conservação do Momento Linear . . .	44
5.4	Exercícios	45
6	Trabalho e Energia	46
6.1	Energia cinética e trabalho realizado por uma força	46
6.1.1	Definição de energia cinética	46
6.1.2	Definição de trabalho	46
6.1.3	Relação entre trabalho e variação da energia cinética	47
6.1.4	Trabalho realizado pela força gravítica. Energia potencial gravítica.	48
7	Fluidos	51
7.1	Conceito de pressão e de massa volúmica	51
7.1.1	Medição da pressão	51
7.1.2	Pressão num fluido	53
7.1.3	Equilíbrio de um fluido. Vasos comunicantes	53
7.2	Impulsão e Princípio de Arquimedes	54
7.2.1	Força de impulsão	54
7.2.2	Corpo menos denso do que o líquido	54

7.2.3	Utilização do Princípio de Arquimedes para a determinação do material que constitui um corpo.	55
7.3	Exercícios	56
8	Noções de Termodinâmica	57
8.1	Temperatura e calor	57
8.2	Capacidade calorífica, capacidade térmica mássica e calor de fusão	58
8.3	Expansão térmica	58
8.4	Condutividade térmica	59
8.5	Emissão e absorção de radiação	60
8.6	Entropia	61
8.6.1	Definição	61
8.6.2	Significado do conceito de entropia	61
8.7	Leis da Termodinâmica	62
8.7.1	Enunciado das Leis da Termodinâmica	62
8.7.2	Demonstração de que o calor passa do corpo mais quente para o mais frio	62
8.7.3	Cálculo da temperatura final de equilíbrio dos dois corpos	63
8.8	Exercícios	63
9	Deformações elásticas	65
9.1	Tipos de deformações	65
9.2	Coefficientes elásticos	65
9.2.1	Módulo de Young, Y	65
9.2.2	Coefficiente de Poisson, σ	66
9.2.3	Módulo de rigidez, μ	66
9.2.4	Módulo de compressibilidade	66
9.2.5	Relação entre coeficientes elásticos	66
9.3	Exercícios	67

Bibliografia

1. Marcelo Alonso e Edward Finn, *Física*, Addison-Wesley, 1999.
2. David Halliday e Robert Resnick, *Fundamentals of Physics*, 3 ed., Wiley, 1988. Existe uma tradução para português do Brasil desta referência.

A página de internet desta disciplina é: **<http://evunix.uevora.pt/~mana>**.

Lá podem ser encontradas informações sobre as datas e resultados dos testes, apontamentos para download e outras informações relevantes.

Noções básicas de Matemática

0.1 Trigonometria

As funções trigonométricas fundamentais para um ângulo são o *seno* e o *coseno* como se mostra na figura 1.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c} \quad (1)$$

Satisfazem o teorema fundamental da trigonometria: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Outras funções trigonométricas importantes são a *tangente* e a *cotangente*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$

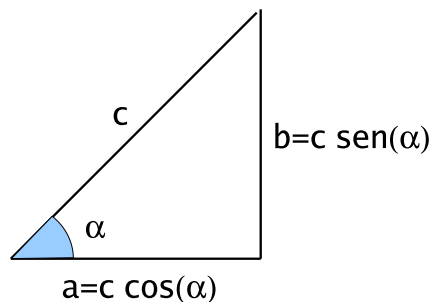


Figura 1: Funções seno e coseno para de um ângulo.

O seno e o coseno podem ser determinados geometricamente usando um círculo de raio 1, como se mostra na figura 2.

0.2 Adição de vectores

Um vector é um segmento de recta *orientado*. Como tal, ele tem de possuir três características:

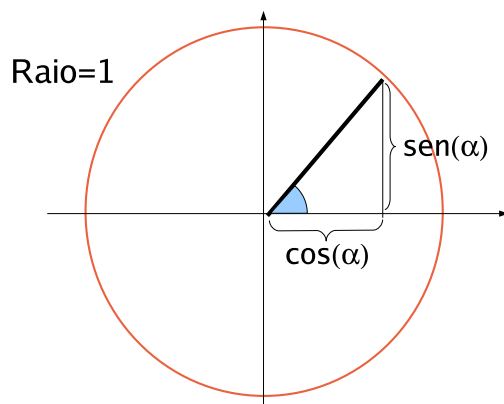


Figura 2: O seno e cosseno de um ângulo são os comprimentos dos catetos obtidos no círculo trigonométrico.

1. direcção: é a definida pela recta que contém o vector. De uma maneira geral, *direcção* é o que há de comum num feixe de rectas paralelas.
2. sentido: é a orientação dentro da direcção. Existem dois sentidos possíveis, uma vez definida a direcção.
3. módulo: é o comprimento do vector. Também se chama *norma*.

De uma maneira mais simples: um vector é uma seta.

Um vector representa-se por uma letra com uma seta por cima. Por exemplo, os vectores $\vec{u}$, $\vec{A}$, $\vec{b}$, etc.

Quando se multiplica um número (escalar) por um vector, o resultado é um novo vector com a mesma direcção. Se o escalar for positivo, o sentido será o mesmo; se o escalar for negativo, o sentido será o oposto. O comprimento do novo vector é igual ao comprimento do primeiro vector multiplicado pelo módulo do escalar.

Por exemplo, $-\vec{u}$ é um vector com a mesma direcção e comprimento do vector $\vec{u}$ mas com sentido oposto.

Por exemplo, $-2\vec{u}$ é um vector com a mesma direcção de $\vec{u}$, mas com o dobro do comprimento e sentido oposto.

Pode-se somar ou multiplicar dois vectores. Para somar dois vectores podem ser usadas duas regras:

1. Regra do paralelogramo: colocam-se os vectores na mesma origem; desenha-se um paralelogramo: o vector soma vai da origem dos dois vectores até ao vértice oposto do paralelogramo. Ver figura 3(a).

2. Outra regra é colocar a origem do segundo vector na extremidade do primeiro. Então a soma vai da origem do primeiro vector até à extremidade do segundo. Ver figura 3(b).

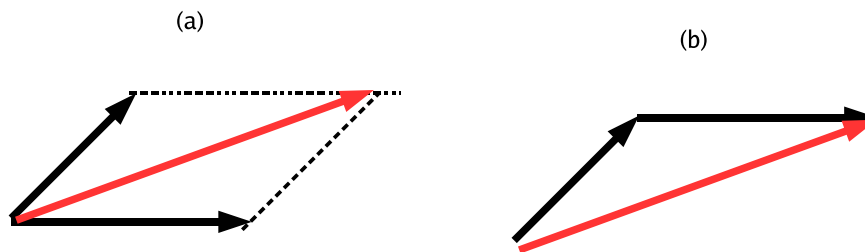
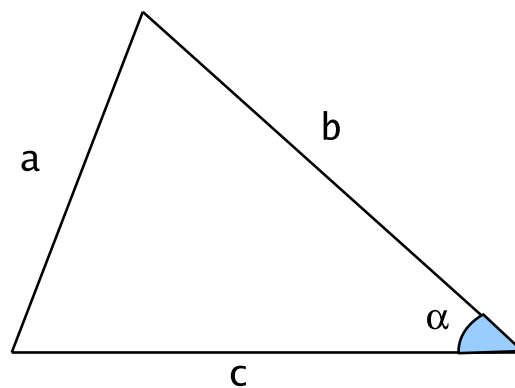


Figura 3: Duas regras para somar vectores. O resultado da soma é o vector a vermelho.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos(\alpha)$$

Figura 4: Teorema de Pitágoras generalizado para todos os triângulos.

0.3 Teorema de Pitágoras generalizado

Todos alunos devem conhecer o Teorema de Pitágoras para triângulos rectângulos: o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Se o triângulo não for rectângulo, existe uma fórmula mais geral. Pode-se calcular o tamanho de um lado qualquer sabendo o ângulo oposto e os outros dois lados. Ver figura 4.

Uma boa revisão sobre vectores pode ser encontrada no capítulo 3 do livro de Alonso e Finn.

0.4 Exercícios:

1. Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm comprimentos de 6 e 9 unidades, respectivamente. Desenhe a soma $\vec{u} + \vec{v}$ e calcule $|\vec{u} + \vec{v}|$ nos casos em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fazem entre si um ângulo de: zero graus; 60° ; 90° ; 150° ; 180° .
2. Considere um sistema de eixos cartesianos, Ox e Oy. Determine as componentes segundo Ox e segundo Oy de um vector de 15 unidades de comprimento que forma, com o eixo Ox, um ângulo de 50° .
3. A soma de dois vectores, $\vec{u} + \vec{v}$, tem 30 unidades de comprimento. Forma com o vector $\vec{u}$ um ângulo de 25° e com o vector $\vec{v}$ um ângulo de 50° . Calcule os módulos de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$.
4. Dados os vectores:

$$\vec{A} = (3, 4) \quad \vec{B} = (-1, 2),$$

determine: $\vec{A} + \vec{B}$ e o seu módulo; $\vec{A} - \vec{B}$ e o seu módulo. Desenhe os vectores. Calcule o ângulo entre eles.

0.5 Produto interno de vectores

Acima vimos a soma de dois vectores. Agora veremos uma operação de multiplicação entre vectores que se chama *produto interno* ou *produto escalar*. Essa operação indica-se por um ponto entre os dois vectores: o produto escalar de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ representa-se por $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

O resultado do produto escalar de dois vectores é um número que se calcula da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

onde α é o ângulo entre os dois vectores. O ângulo α pode ir de zero a cento e oitenta graus e o seu coseno pode ser positivo, negativo ou nulo.

Se $0 < \alpha < 90^\circ$ então $\cos \alpha > 0$; se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ então $\cos \alpha < 0$.

Portanto, se os dois vectores formam um ângulo inferior a 90° , o seu produto interno é positivo; se os dois vectores formam um ângulo entre 90° e 180° , o seu produto interno é negativo.

0.6 Operações com potências

Quando um número é multiplicado por si próprio várias vezes, nós podemos indicar essa operação por meio de uma *potência*. Exemplos:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 \quad (4)$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \quad (5)$$

A potência tem uma *base* e um *expoente*. A base é o número que está a ser multiplicado. O expoente é o número de vezes que ele está a ser multiplicado.

Quando o expoente é negativo, isso quer dizer que temos de fazer o inverso:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} \quad (6)$$

Divisão de potências com a mesma base: mantém-se a base e subtraem-se os expoentes.

Exemplo:

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = 2^{-2} = 2^{3-5} \quad (7)$$

Um número elevado a zero dá 1: $3^0 = 1$, $10^0 = 1$, etc... Excepto no caso em que esse número é zero: 0^0 é indeterminado.

Multiplicação de potências como mesmo expoente: mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases.

Exemplo:

$$2^3 \cdot 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^3 = 6^3 \quad (8)$$

Quando se eleva uma potência a um expoente, multiplicam-se os expoentes:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}.$$

0.7 Exercícios:

1. Os vectores $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (2, 2)$. Calcule os comprimentos dos vectores e o ângulo que fazem entre si.
2. Desenhe dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fazendo um ângulo de 30 graus. Os comprimentos deles são $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 3$. Desenhe: $\vec{u} - \vec{v}$; $2\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - 2\vec{v}$.
3. Calcule:

$$\frac{2^3 \cdot 10^{1/2}}{2^5} = 2^? \cdot 5^? \quad \frac{10^3 \cdot 10^{1/2}}{10^{-5}} = ?$$

4. Escreva a raiz quadrada de 33 como uma potência.
5. Escreva a raiz cúbica de 10 como uma potência.
6. Usando a regra do quociente de potências, demonstre que um número elevado a zero dá 1.
7. Escreva em forma de uma potência:

$$\sqrt{\frac{3^2 \cdot 10^8}{3^{-3} \cdot 5^3 \cdot 2^3}}$$

8. Calcule:

$$\frac{10^2}{\sqrt{\frac{3^3 \cdot 10^2}{3^{-2} \cdot 5^{-3} \cdot 2^{-3}}}}$$

Tema 1

Medidas Físicas

1.1 Unidades, dimensões e estimativas dimensionais

Em física medem-se grandezas, as quais, em geral, possuem unidades. Nunca é excessivo enfatizar a importância de associar a respectiva unidade a uma grandeza determinada experimentalmente ou calculada teoricamente. Em particular, por uma facilidade de entendimento científico, pedagógico e até comercial é conveniente a utilização de um sistema internacional de unidades. Um caso recente paradigmático e, também, de consequências económicas e políticas relevantes foi a perda da sonda espacial da NASA *Mars Climate Orbiter* (no valor de 23,5 milhões de contos). Destinada a estudar o clima marciano, desapareceu dos radares a 23 de Setembro de 1999, na proximidade do planeta. A peritagem indica que a sonda se aproximou em demasia do planeta. A perda da nave teve origem num erro de unidades. A NASA calculou a potência de funcionamento dos propulsores responsáveis pelas correcções de trajectória no sistema métrico, usando dados aeronáuticos expressos no sistema anglo-saxónico. O vice-presidente da companhia que construiu a sonda, espantado, afirmou: “*Não pode ter sido uma coisa tão simples!*”. O director para a política espacial da Federação de Cientistas Americanos manifesta a seguinte opinião sobre a matéria:

“Esta história vai ser o exemplo clássico para ensinar as diferenças entre o sistema métrico e o inglês, da escola primária até aos cursos de física na universidade, para toda a eternidade.”

Uma grandeza física é qualquer entidade que se pode medir. O resultado da medição expressa-se sempre por um número seguido da unidade de medida utilizada. Exemplos de grandezas físicas podem ser: o comprimento de uma vara, a massa de um objecto, o tempo que demora um pêndulo a executar uma oscilação, a altura a que um animal consegue

grandeza	nome da unidade	símbolo da unidade	símbolo da dimensão
comprimento	metro	m	L
massa	kilograma	kg	M
tempo	segundo	s	T
temperatura	kelvin	K	θ

Tabela 1.1: Unidades do Sistema Internacional (SI) usadas neste curso.

saltar, etc. A cada grandeza física corresponde uma *dimensão*. As dimensões fundamentais são: comprimento, massa, tempo, temperatura e carga eléctrica. Quando, por exemplo, falamos da altura de uma pessoa, da largura de uma porta ou do comprimento de onda de uma radiação estamos a invocar sempre a mesma dimensão: o comprimento. A dimensão refere-se portanto à natureza da entidade que estamos a querer quantificar. Assim, podemos perguntar qual a duração de um dia mas não faz sentido perguntar a qual é massa de um dia.

A uma grandeza pode corresponder uma combinação das dimensões fundamentais acima mencionadas. A grandeza velocidade, por exemplo, resulta de dividir a distância percorrida pelo tempo correspondente. Diz-se então que a velocidade tem dimensões de comprimento dividido pelo tempo.

A cada dimensão está associada uma unidade. Na tabela 1.1 estão listados o nome, a unidade do sistema internacional (SI), o símbolo da unidade e o símbolo da dimensão das grandezas fundamentais usadas neste curso. Na tabela 1.2 listamos os prefixos usados pelo Sistema Internacional de Unidades. Podemos associar um símbolo a cada dimensão como mostra a tabela. Vejamos alguns exemplos. Para expressar que a posição x de uma partícula que se move ao longo do eixo Ox tem a dimensão de um comprimento escrevemos:

$$[x] = L.$$

A notação $[x]$ significa "dimensão da grandeza x ". Para a velocidade escrevemos:

$$[v_x] = L \cdot T^{-1},$$

e dizemos que a velocidade, sendo um comprimento dividido por um tempo, tem dimensão 1 no comprimento e dimensão -1 no tempo

De igual modo, outras grandezas físicas que encontraremos neste curso, como por exemplo a aceleração, o momento linear, o momento angular, a força e a energia, possuem as seguintes dimensões

$$[a] = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] = L \cdot T^{-2}, \quad (1.1)$$

$$[mv] = M \cdot L \cdot T^{-1}, \quad (1.2)$$

$$[mvr] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}, \quad (1.3)$$

$$[ma] = M \cdot L \cdot T^{-2}, \quad (1.4)$$

$$[mv^2] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}, \quad (1.5)$$

respectivamente.

Não podemos adicionar grandezas com dimensões diferentes. Não faria sentido, por exemplo, somar um comprimento com uma massa. Assim, numa expressão onde apareça uma soma de vários termos, **estes deverão ter as mesmas dimensões e ambos os membros de uma equação devem ter as mesmas dimensões**. Um exemplo: o movimento rectilíneo uniforme de uma partícula com velocidade v ao longo do eixo Ox é descrito por

$$x = x_0 + vt.$$

Nesta equação x , x_0 e vt têm todos a mesma dimensão (comprimento):

$$[x] = [x_0] = [vt] = L.$$

Aqui podemos deixar um valioso conselho ao estudante: quando deduzir uma equação verifique, no fim, se as dimensões de ambos os membros são iguais. Se tal não acontecer então a equação está incorrecta.

A análise dimensional é uma ferramenta poderosa porque permite, em alguns casos, estabelecer equações mesmo que não se tenha um completo conhecimento dos mecanismos físicos envolvidos. É o que veremos nos três exemplos seguintes.

1.1.1 O pêndulo simples

Analisemos agora o movimento de um pêndulo gravítico simples. Queremos estabelecer uma equação para o período de oscilação P . As grandezas relevantes poderão ser a aceleração da gravidade, g , a massa do pêndulo, m , o comprimento do pêndulo, l , e o valor inicial do ângulo θ_0 . O período de oscilação do pêndulo, será à partida uma certa função destes parâmetros. Isto é,

$$P = f(g, m, l, \theta_0), \quad (1.6)$$

cujas dimensões são o tempo: $[P] = T$. As dimensões das restantes grandezas são:

$$[g] = L \cdot T^{-2}, \quad (1.7)$$

$$[l] = L, \quad (1.8)$$

$$[m] = M, \quad (1.9)$$

$$[\theta_0] = 1. \quad (1.10)$$

factor	prefixo	símbolo	factor	prefixo	símbolo
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	ato-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^3	kilo-	k	10^{-3}	mili-	m
10^2	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^1	deca-	da	10^{-1}	deci-	d

Tabela 1.2: Prefixos usados no Sistema Internacional (SI).

O ângulo θ_0 é adimensional e portanto não contribui para as dimensões. O que temos de fazer agora é combinar as grandezas g, l, m de modo a que o resultado tenha dimensão de tempo. Começamos por escrever

$$P \propto g^\alpha l^\beta m^\gamma, \quad (1.11)$$

onde os expoentes α, β, γ ainda não são conhecidos. Em termos de dimensões, a equação anterior escreve-se como

$$P = (LT^{-2})^\alpha L^\beta M^\gamma, \quad (1.12)$$

e só pode ser satisfeita com $\gamma = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Assim, a equação (1.11) fica

$$P \propto \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.13)$$

A constante (adimensional) de proporcionalidade entre P e $\sqrt{\frac{l}{g}}$ poderá eventualmente depender de θ_0 e por isso escrevemos a equação geral:

$$P = f(\theta_0) \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.14)$$

onde a função $f(\theta_0)$ é ainda desconhecida e só poderá ficar estabelecida quando tivermos um conhecimento mais profundo dos mecanismos físicos que regem o movimento do pêndulo.

A análise dimensional permitiu concluir que o período das oscilações não depende da massa, é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio e inversamente proporcional à raiz quadrada da aceleração da gravidade.

1.1.2 Bola de fogo resultante de uma explosão

Quando se dá uma explosão (de uma bomba, por exemplo) surge uma bola de fogo que se expande em todas as direcções. Podemos perguntar como é que o seu raio R aumenta no

decorrer do tempo t . Suponhamos que a rapidez com que a bola se expande deve depender da densidade do ar ρ . Com efeito, é intuitivo que quanto mais denso for o ar, mais ele se opõe à expansão, retardando-a. Por outro lado, é natural supor que a expansão também depende da energia E que foi libertada na explosão. O raio R é portanto uma função de t, ρ, E . Começemos por escrever

$$R \propto t^\alpha \rho^\beta E^\gamma,$$

e determinemos os valores de α , β e γ igualando as dimensões dos dois membros da equação:

$$\begin{aligned} [R] &= [t]^\alpha [\rho]^\beta [E]^\gamma \Leftrightarrow \\ L &= T^\alpha (ML^{-3})^\beta (ML^2T^{-2})^\gamma, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \alpha - 2\gamma &= 0, \\ \beta + \gamma &= 0, \\ -3\beta + 2\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{5}$ e assim obtemos o resultado

$$R = Ct^{2/5} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5},$$

onde C é uma constante adimensional. Concluimos que a bola de fogo cresce com $t^{2/5}$. Isto significa que o crescimento é inicialmente muito rápido e depois vai ficando mais lento.

1.2 Exercícios

1. Uma massa colocada na extremidade de uma mola elástica de constante k (lei da força $F = -kx$) pode oscilar em torno da posição de equilíbrio. Mostre, por análise dimensional, que o período das oscilações, T , tem a forma $T = C\sqrt{m/k}$, onde C é uma constante adimensional.
2. Num gás a velocidade das ondas de som, v_s , só depende da pressão, p , e da densidade do gás, ρ . Derive, por análise dimensional, a expressão de v_s .
3. Um corpo de massa m é lançado, no campo gravítico, verticalmente, para baixo, partindo de uma altura h com velocidade inicial $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_y$ m/s. Um grupo de estudantes propôs as seguintes equações para o tempo de queda, t_q , do corpo.

$$\begin{aligned}
1)t_q &= \sqrt{2mh/g}; & 2)t_q &= \sqrt{2h/g}; \\
3)t_q &= \sqrt[3]{h^2/(v_0g)}; & 4)t_q &= \sqrt[3]{h^2/(v_0g)} + \sqrt{2h/g + (v_0^2/g)^2}; \\
5)t_q &= v_0/g + \sqrt{2h/g + (v_0/g)^2}; & 6)t_q &= v_0 + \sqrt{2h/g + v_0^2}; \\
7)t_q &= \sqrt{2h/g} + \sqrt{2h/g + v_0^2} + h.
\end{aligned}$$

(a) Quais os parâmetros relevantes na determinação de t_q ?

$$v_0, g, h \text{ e } m; \quad v_0 \text{ e } g; \quad v_0, g \text{ e } m; \quad v_0, g \text{ e } h.$$

(b) Das equações listadas para t_q , indique as que estão dimensionalmente correctas.

4. Um corpo de massa m é colocado a oscilar numa mola de massa M e constante elástica k . Um conjunto de alunos sugeriu, com base em análise dimensional, as seguintes equações para o período, t_p , de oscilação do pêndulo (g é aceleração da gravidade):

$$\begin{aligned}
1)t_p &= \sqrt{k/g} & 2)t_p &= 2\pi\sqrt{(m + M/3)/k}; \\
3)t_p &= 2\pi\sqrt{(m + M/3)/g}; & 4)t_p &= 2\pi\sqrt{m/k}; \\
5)t_p &= 2\pi\sqrt{k/m}; & 6)t_p &= \alpha\sqrt{(\beta m + \gamma M)/k};
\end{aligned}$$

(a) Das equações listadas para t_p , indique as que estão dimensionalmente correctas.

(b) Das anteriores, indique qual a mais geral que se pode escrever com base em análise dimensional.

5. Um corpo de peso mg e volume V_c desconhecido, suspenso num dinamómetro, é mergulhado num líquido de massa volúmica conhecida ρ_l , passando o dinamómetro a marcar um valor f , para a força resultante. Um conjunto de alunos, propôs as seguintes relações para a massa volúmica ρ_c do corpo (g é aceleração da gravidade):

$$\begin{aligned}
1)\rho_c &= \rho_f + \frac{f}{gV_c}; & 2)\rho_c &= \rho_f + \frac{f}{V_c}; \\
3)\rho_c &= \rho_l \frac{mg}{mg - f}; & 4)\rho_c &= \rho_l \frac{m}{m - f}; \\
5)\rho_c &= \rho_f \cos[mg/(mg - f)]; & 6)\rho_c &= \frac{1}{\rho_l} \frac{m}{m - f};
\end{aligned}$$

(a) Das equações listadas para ρ_c , indique as que estão dimensionalmente correctas.

6. Um corpo tem peso mg e volume V_c desconhecido. Ele está suspenso num dinamómetro e é mergulhado num líquido de massa volúmica conhecida ρ_l , passando o dinamómetro a marcar um valor f , para a força resultante. Um conjunto de alunos, propôs as seguintes relações para a massa volúmica ρ_c do corpo (g é aceleração da gravidade):

$$\begin{array}{ll}
 1)\rho_c = \rho_l \frac{mg}{mg - f}; & 2)\rho_c = \rho_l + \frac{f}{gV_c}; \\
 3)\rho_c = \rho_l + \frac{f}{V_c}; & 4)\rho_c = \rho_l \frac{m}{m - f}; \\
 5)\rho_c = \rho_l \cos[mg/(mg - f)]; & 6)\rho_c = \frac{1}{\rho_l} \frac{m}{m - f};
 \end{array}$$

- (a) Das equações listadas para ρ_c , indique as que estão dimensionalmente correctas.

Tema 2

Forças e Estática

Neste capítulo iremos estudar as *forças* para as aplicar a problemas de estática. Regressaremos ao tema das forças depois do estudo da cinemática para as aplicar ao movimento.

Todos nós temos uma noção intuitiva do que é uma força. Quando empurramos um objecto estamos a aplicar-lhe uma força. Consideremos um objecto que está sujeito a uma força, como na figura 2.1. Se o cubo na figura 2.1 estiver inicialmente parado, então,

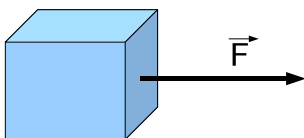


Figura 2.1: O cubo está a ser puxado para a direita por acção da força $\vec{F}$.

por acção da força $\vec{F}$ o cubo irá começar a mover-se para a direita. Ou seja, ele passa de um estado de repouso (isto é, parado) para um estado de movimento. Enquanto a força for actuando, o cubo irá deslocar-se com uma velocidade cada vez maior. A sua velocidade só pára de crescer se a força desaparecer. Outro efeito que uma força pode ter é o de deformar um corpo. Estudaremos esses efeitos num capítulo mais adiante. Por agora podemos definir força da seguinte forma: "Força é a causa da alteração do estado de movimento de um corpo ou da deformação deste."

Uma força representa-se matematicamente por um vector. Como tal, possui as seguintes características:

- direcção ou linha de acção (é a recta ao longo da qual a força actua);
- sentido;
- intensidade (módulo) cuja unidade é, no Sistema Internacional, o *newton* (N);
- ponto de aplicação (é o ponto do corpo onde ela está a ser exercida).

As forças podem-se somar tal como adicionamos vectores. Por exemplo se o cubo estiver sujeito a duas forças ao mesmo tempo, a força $\vec{F}_1$ e a força $\vec{F}_2$, isso é o mesmo que ele estar sujeito apenas a uma força dada pela soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, como se mostra na figura 2.2.

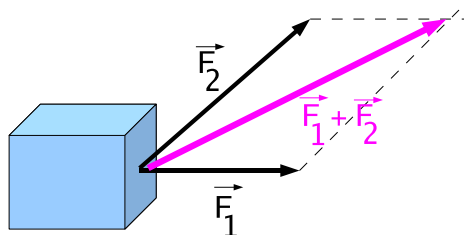


Figura 2.2: O cubo está a ser puxado simultaneamente por duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Tal situação é equivalente a existir apenas uma força igual a $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Mais adiante estudaremos a três leis que descrevem os efeitos das forças sobre o movimento dos corpos (leis de Newton). Por enquanto ficaremos com a primeira e a terceira lei de Newton:

- Primeira lei: para um corpo permanecer parado, a soma vectorial das forças que actuam sobre ele tem de ser nula.
- Terceira lei: se um corpo A exerce a força $\vec{F}$ sobre um corpo B, então o corpo B exerce a força $-\vec{F}$ sobre A. Diz-se que essas forças formam um par "acção-reacção". Uma delas (qualquer) é a acção, sendo a outra a reacção.

A soma vectorial de todas as forças que actuam numa partícula chama-se **força resultante**. Quando a resultante é nula diz-se que a partícula está em equilíbrio.

Também sabemos que os corpos, quando largados, caem. Isso deve-se a uma força de gravidade que a Terra exerce sobre eles. Chama-se peso à força gravítica exercida pela Terra sobre um corpo. Essa força está dirigida para o centro da Terra (direcção vertical, sentido para baixo) e a sua intensidade é dada pelo produto mg , onde m é a massa do corpo (expressa em quilogramas) e g denota a "aceleração da gravidade" e tem o valor $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Assim, por exemplo, um corpo de massa 1Kg está sujeito à força de gravidade de 9,8 N dirigida de cima para baixo, na vertical.

2.1 Algumas aplicações simples das leis de Newton

2.1.1 Corpo sobre uma mesa

Consideremos o caso de um bloco de massa m pousado numa mesa (ver figura 2.3). Como se explica, invocando as forças, que ele esteja parado? Estar parado implica, pela primeira lei de Newton, que a resultante das forças que nele actuam é nula. Sobre ele actuam duas forças: o peso $\vec{F}_g$, exercido pela Terra, que o puxa para baixo; e uma força que a mesa lhe exerce e que tem de contrariar o efeito do peso: trata-se da reacção normal da mesa sobre ele, $\vec{N}$. Então temos $\vec{F}_g = -\vec{N}$ de modo que a resultante $\vec{F}_g + \vec{N} = 0$. A " reacção

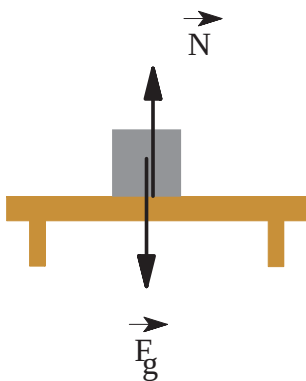


Figura 2.3: Forças exercidas num bloco em repouso sobre uma mesa.

normal" chama-se "normal" porque é perpendicular à superfície da mesa ("normal" = perpendicular). É " reacção" porque corresponde à força aplicada *no* bloco *pela* mesa em virtude de o bloco estar a exercer na mesa uma força igual a $\vec{F}_g$ (acção aplicada *na* mesa). Há portanto um par de forças acção-reacção entre o bloco e a mesa (terceira lei de Newton).

2.1.2 Corpo suspenso por um fio

A força que o fio exerce *no* corpo é $\vec{T}$ e vai ter de compensar o peso do corpo $\vec{F}_g$. Portanto $\vec{T} + \vec{F}_g = 0$. O corpo exerce *no* fio uma força igual a $-\vec{T}$. A força $\vec{T}$ chama-se "tensão" do fio. Esta situação está representada na figura 2.4.

2.1.3 Corpo num plano inclinado

Neste caso a reacção normal do plano sobre o bloco está inclinada como mostra a figura 2.5. Aqui é conveniente decompor as forças segundo a direcção do plano e segundo a direcção normal ao plano. Não é preciso decompor $\vec{N}$ porque já está segundo a normal

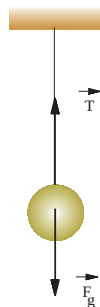


Figura 2.4: Forças exercidas numa esfera suspensa de um fio.

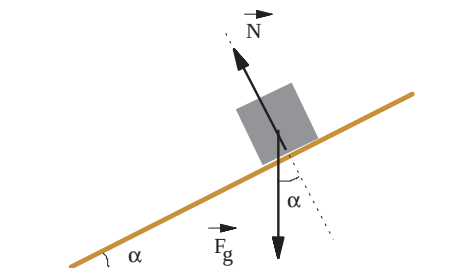


Figura 2.5: Forças exercidas num bloco num plano inclinado.

ao plano. Então é preciso decompor somente a força gravítica $\vec{F}_g$. A projecção de $\vec{F}_g$ segundo a normal tem módulo $|\vec{F}_g| \cos(\alpha)$ e vai cancelar a força $\vec{N}$ (para que não exista movimento segundo a normal ao plano).

A componente do peso segundo a direcção do plano tem intensidade $|\vec{F}_g| \sin(\alpha)$ e é a única componente eficaz do peso que realmente vai fazer o bloco descer o plano.

2.2 Forças de atrito

No caso mais simples o atrito (ou fricção) entre duas superfícies em contacto é uma força que se opõe ao movimento dessas superfícies dificultando o escorregamento de uma sobre a outra, e é **sempre paralela às superfícies**. O atrito existe por duas razões: por um lado, as superfícies apresentam pequenas rugosidades, invisíveis à vista desarmada; por outro lado, estabelecem-se ligações (forças de atracção) entre as moléculas das duas superfícies. Assim, com o polimento das superfícies as rugosidades diminuem, diminuindo portanto o atrito. Mas se aumentarmos o grau de polimento então, a partir de certo ponto, o atrito começará a aumentar novamente. Isto acontece porque, ficando as superfícies muito lisas, mais ligações moleculares se irão estabelecer entre elas.

Em certos casos o atrito é responsável pelo movimento dos corpos. Um exemplo é o de um bloco de mármore em cima de um camião: o bloco avança com o camião devido à força de atrito entre os dois.

2.2.1 Atrito estático e atrito cinético

A força de atrito que impede que as superfícies iniciem o movimento chama-se **atrito estático**. Considere um bloco pousado numa mesa, sobre o qual está a ser exercida uma força $\vec{F}$ horizontal. Se houver atrito entre o bloco e a mesa então a intensidade da força $\vec{F}$ terá de ser maior do que um certo valor mínimo para se conseguir movimentar o bloco. Enquanto isso não acontecer a mesa exerce uma força de atrito no bloco, $\vec{A}$, tal que $\vec{A} = -\vec{F}$ e o bloco não se move porque o atrito cancela a força $\vec{F}$. A intensidade mínima de $\vec{F}$ necessária para movimentar o bloco é dada pela expressão:

$$|\vec{F}|_{min} = \mu_e |\vec{N}| \quad (2.1)$$

onde $|\vec{N}|$ é a intensidade da reacção normal da mesa sobre o bloco. μ_e é o **coeficiente de atrito estático** e é um número (adimensional) que depende da natureza das superfícies e do seu estado de polimento. Também se conclui que $\mu_e |\vec{N}|$ é o valor máximo que o atrito estático pode tomar.

Se o bloco estiver em movimento sobre a mesa então a força de atrito $\vec{A}$ é contrária ao vector velocidade e tem uma certa intensidade dada por:

$$|\vec{A}| = \mu_c |\vec{N}| \quad (2.2)$$

onde μ_c é o **coeficiente de atrito cinético**. Em termos qualitativos o que se descreveu acima pode ser representado pela figura 2.6.

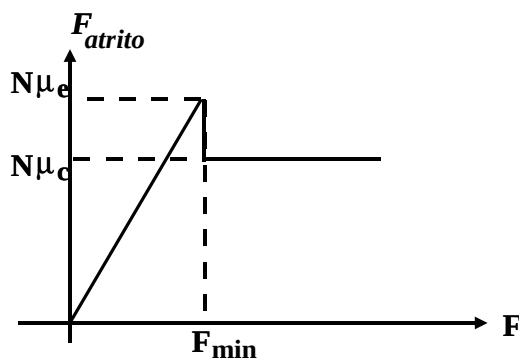
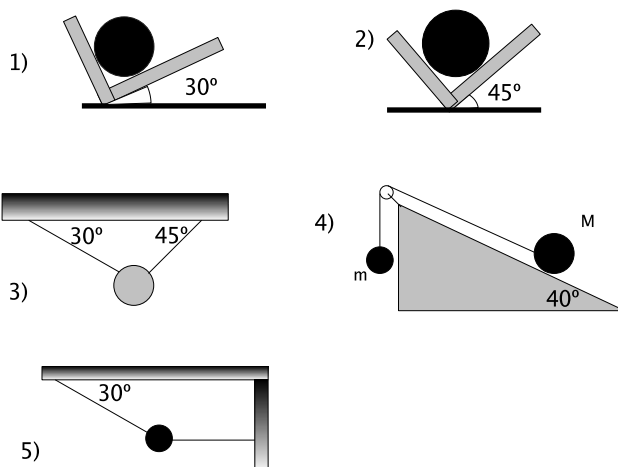


Figura 2.6: Variação da força de atrito com o valor da força aplicada ao bloco. A partir de F_{min} o corpo entra em movimento.

2.3 Exercícios

- Um corpo de massa 30Kg está suspenso do tecto por uma corrente. Esta tem massa de 1Kg.
 - Que força está a ser exercida no tecto?
 - Quais as forças aplicadas no corpo?
 - Quais as forças aplicadas na corrente?
- Um bloco de 1500 N está colocado numa superfície. O coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0.5$ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0.4$.
 - Que força tem de ser exercida para se arrastar horizontalmente o bloco?
 - Se o empurrarmos com força de 650N, qual será a intensidade da força de atrito?
- Considere as situações 1 e 2 representadas na Figura. Supondo que a massa vale $m = 2\text{Kg}$, determine os módulos das reacções normais das superfícies.



- Considere um objecto suspenso por dois fios como se mostra na situação 3 representada na Figura. Supondo que a massa vale 1,5 Kg, calcule os valores das tensões nos fios.
- Relativamente à situação 4 representada na Figura:
 - Se não houver atrito, qual a relação entre as massas m e M para que haja equilíbrio?

- (b) Supondo que $m = 1\text{Kg}$, $M = 2\text{Kg}$ e que $\mu_e = 0,5$, haverá equilíbrio?
- (c) Supondo que $m = 1\text{Kg}$ e que $M = 2\text{Kg}$, qual é o valor mínimo do atrito estático que garante o equilíbrio?
6. Relativamente à situação 5 representada na Figura: determine as tensões nos fios supondo que a massa vale 1Kg .

2.4 Momento de uma força

Seja $\vec{F}$ uma força aplicada num ponto $\vec{r}$ de um corpo. O momento da força, $\vec{M}$, é definido como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.3)$$

O símbolo $\times$ representa o *produto vectorial* ou *produto externo* dos vectores.

2.5 Cálculo do produto externo

O produto externo dos dois vectores origina um terceiro vector $\vec{M}$, perpendicular ao plano formado pelos dois vectores originais. O sentido do vector é definido pela *regra da mão direita*: colocando o polegar ao longo do primeiro vector e o indicador ao longo do segundo vector, então o dedo médio dará o sentido do terceiro vector. A situação encontra-se representada na figura 2.7.

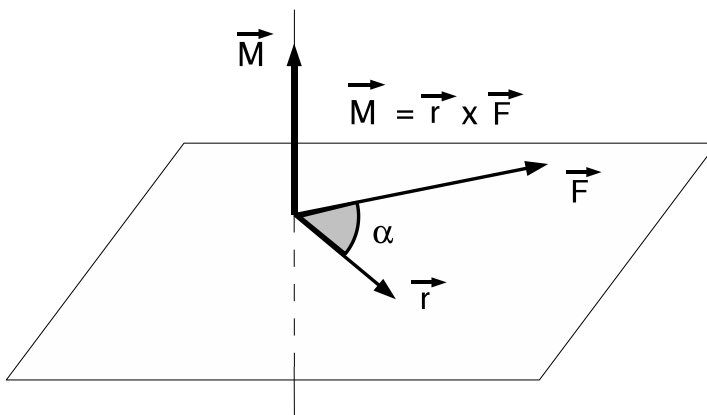


Figura 2.7: Produto externo dos vectores $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

O módulo de $\vec{M}$ é dado por:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin(\alpha) \quad (2.4)$$

Consideremos a situação representada na figura 2.8. A força está aplicada no ponto $\vec{r}$. Diz-se que o momento da força está a ser calculado em relação ao ponto O , porque é com origem nesse ponto que estamos a desenhar o vector posição $\vec{r}$. Define-se o *braço* da força como a distância da sua linha de acção ao ponto O . Essa distância é dada por $|\vec{r}| \sin(\alpha)$. Pela equação (2.4) vemos então que o módulo do momento é dado pelo produto da força pelo braço:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \sin(\alpha) = \text{força} \times \text{braço} \quad (2.5)$$

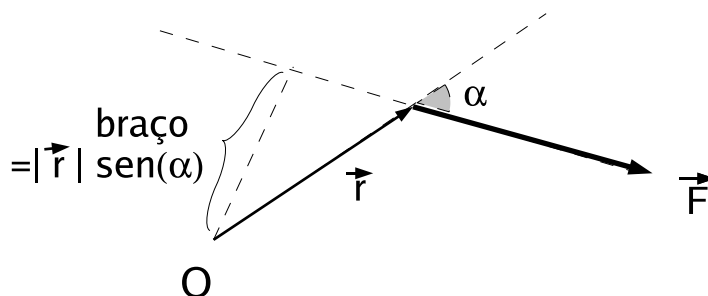


Figura 2.8: Momento da força $\vec{F}$ calculado em relação ao ponto O .

Porque nos interessa o conceito de momento de uma força? Suponha uma força aplicada num objecto, como na figura 2.9: o bloco vai ter tendência para rodar em torno do ponto O se o momento da força em relação a O não for nulo.

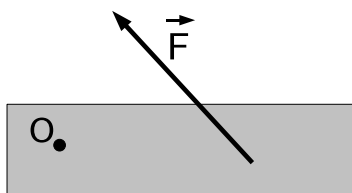


Figura 2.9: Força $\vec{F}$ vai provocar rotação do objecto em torno do ponto O .

Iremos aplicar estas noções a problemas de estática. Para que um corpo permaneça em repouso, é necessário que se verifiquem duas condições:

1. A soma (vectorial) das forças tem de ser nula;

2. a soma dos momentos das forças em relação a um ponto (qualquer) tem de se nula.

Um exemplo de aplicação: na figura 2.10 encontra-se representada uma tábua de peso desprezável, sobre a qual se pousou um objecto. Pretende-se calcular as reacções normais nos pontos de apoio na tábua. A primeira condição é que a soma das reacções normais

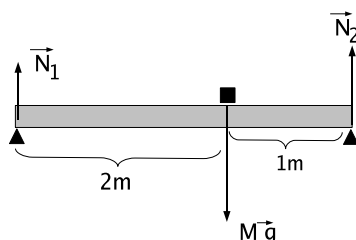


Figura 2.10: Quanto valem as reacções normais $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$?

tem de compensar o peso Mg :

$$N_1 + N_2 = Mg$$

Sabemos a soma $N_1 + N_2$ mas ainda não sabemos quanto valem cada uma dessas forças. Agora, iremos considerar os momentos das forças e para isso podemos escolher um ponto qualquer: o extremo esquerdo da tábua, por exemplo. Os momentos das forças em relação a esse ponto são:

- o momento de $\vec{N}_1$ é nulo porque a força $\vec{N}_1$ tem braço nulo;
- o momento de $M\vec{g}$ tem módulo $Mg \times \text{braço} = 2Mg$;
- o momento de $\vec{N}_2$ tem módulo $N_2 \times \text{braço} = 3N_2$;

O momento de $M\vec{g}$ tende a rodar a tábua para baixo enquanto que o momento de $\vec{N}_2$ tende a rodar a tábua para cima. Esses momentos têm de se anular um ao outro e, para isso,

$$2Mg = 3N_2$$

Logo, ficámos a saber que $N_2 = \frac{2}{3}Mg$. Então vem que $N_1 = Mg - N_2 = \frac{1}{3}Mg$. O ponto de apoio esquerdo suporta 1/3 do peso do objecto e o ponto de apoio direito suporta 2/3 do peso.

2.6 Exercícios

1. Determine:

- (a) $\vec{u}_x \times \vec{u}_y$; $\vec{u}_x \times \vec{u}_z$; $\vec{u}_y \times \vec{u}_z$.
- (b) Verifique que $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = -\vec{u}_y \times \vec{u}_x$.

- (c) Determine $(2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y) \times \vec{u}_z$, usando a propriedade distributiva.
2. Uma tábua, de comprimento 2m e massa 3Kg, está encostada a uma parede fazendo com esta um ângulo α . O atrito com o solo impede que a tábua deslize.
- (a) Identifique as forças que actuam na tábua.
- (b) Determine as reacções normais entre a parede e a tábua, entre o chão e a tábua, e a força de atrito.
- (c) Qual é o valor mínimo que o atrito estático pode tomar?
- (d) Supondo que $\mu_e = \sqrt{24}$, qual é o valor máximo do ângulo α sem que a tábua escorregue?
3. Relativamente à figura 2.10, suponha que o peso da tábua são 20N e calcule novamente as reacções normais.

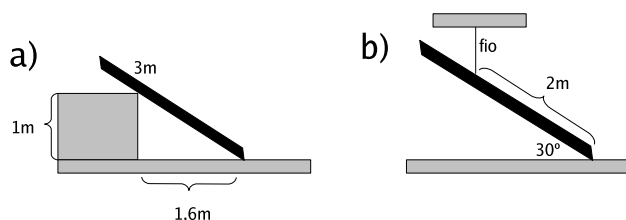


Figura 2.11:

4. Relativamente à figura 2.11, a situação (a) representa uma tábua de massa 2Kg. Determine as forças que actuam nela. Qual o valor mínimo do atrito estático para que a situação seja possível?
5. Relativamente à figura 2.11, a situação (b) representa uma tábua de massa 5Kg com 3 metros de comprimento. O fio está na vertical. Determine as forças que actuam na tábua. Se o fio estivesse inclinado seria necessário haver atrito com o solo? Justifique.

Tema 3

Centro de massa de um Sistema de partículas

Um corpo possui **dois movimentos: o de rotação e o de translação**. O movimento de translação é o movimento do seu **centro de massa**.

3.1 Centro de massa

Considere-se um sistema de N partículas de massas $m_1, m_2, \dots, m_N$, que ocupam as posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$. O *centro de massa do conjunto de partículas* é um ponto que se encontra na posição $\vec{r}_{CM}$ definida como:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}. \quad (3.1)$$

Portanto $\vec{r}_{CM}$ é uma média ponderada (pelas massas) das posições das partículas.

Por exemplo, o centro de massa de duas partículas encontra-se na linha que as une. Se as partículas tiverem a mesma massa então o centro de massa estará exactamente a meio entre elas. Se tiverem massas diferentes então o centro de massa estará mais próximo da partícula mais pesada.

Problema: Duas partículas de massas 1 Kg e 6 Kg estão a uma distância de 4 m uma da outra. Calcule a posição do seu centro de massa.

Resolução: Podemos considerar que elas se encontram no eixo dos $X's$ e começar a contar as distâncias a partir da partícula de 1 Kg. Ou seja, esta está na origem e a outra está na posição $x=4$ metros. Utilizando a expressão (3.1) obtemos

$$x_{CM} = \frac{1 \times 0 + 6 \times 4}{1 + 6} = \frac{24}{7} \approx 3,43.$$

Portanto o centro de massa está a 3,43 m da partícula de massa 1 Kg.

Problema: Três partículas de massas 2 Kg, 5Kg e 6 Kg estão, respectivamente, nas posições $\vec{r}_1 = -2\vec{u}_x$, $\vec{r}_2 = 3,7\vec{u}_x$ e $\vec{r}_3 = 7\vec{u}_y + \vec{u}_z$.

Resolução: Utilizando a expressão (3.1) obtemos

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2 \times (-2) + 5 \times 3,7}{2 + 5 + 6} \vec{u}_x + \frac{6 \times 7}{2 + 5 + 6} \vec{u}_y + \frac{6 \times 1}{2 + 5 + 6} \vec{u}_z.$$

Sendo um corpo formado por muitas partículas, a força da gravidade total é a soma das forças de gravidade que actuam nas partículas que o constituem (ver a figura 3.1). Iremos demonstrar agora este resultado: *A força de gravidade total do corpo está aplicada no seu centro de massa.*

Para tal, temos de verificar duas condições:

1. A força da gravidade total é a soma das forças gravitacionais elementares nas partículas: na i -ésima partícula actua a força gravitacional $m_i \vec{g}$. Somando essas forças elementares,

$$\sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g},$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa total. Portanto $M \vec{g}$ é a força gravitacional resultante.

2. A força gravitacional resultante tem de estar aplicada num ponto tal que o momento dessa força é o mesmo que a soma dos momentos das forças elementares. Esta soma é dada por

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} \\ &= M \vec{R} \times \vec{g} \quad \text{porque} \quad \sum_i m_i \vec{r}_i = M \vec{R} \\ &= \vec{R} \times (M \vec{g}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\vec{R}$ é a posição do centro de massa.

3.2 Exercícios

1. Calcule o centro de massa do seguinte conjunto de 3 massas: $m_1 = 3\text{Kg}$ na posição $\vec{r}_1 = (2, 14)$, $m_2 = 1\text{Kg}$ na posição $\vec{r}_2 = (0, 01)$, $m_3 = 1\text{Kg}$ na posição $\vec{r}_3 = (1, 1, 2)$.
2. Uma tábua de massa desprezável tem uma massa de 3Kg numa extremidade e 7Kg na outra. O comprimento da tábua é de 2 metros.
 - (a) Calcule em que ponto da tábua é preciso segurar para que ela fique em equilíbrio.

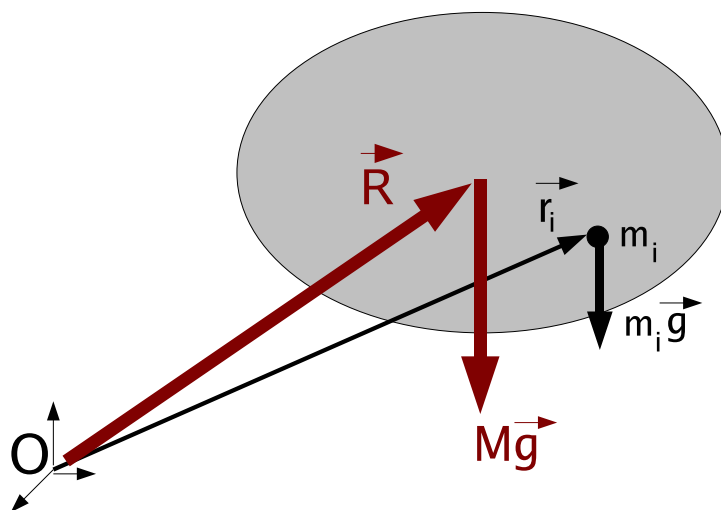


Figura 3.1:

- (b) Calcule os momentos dos pesos das massas em relação a esse ponto.
3. Repita o exercício anterior supondo que a tábua tem uma massa de 20Kg.
 4. Três blocos iguais estão empilhados como mostra a figura 3.2. Calcule a distância máxima a que pode ser colocado o terceiro bloco sem que este caia.
 5. Observe a figura 3.3: calcule as reacções normais nos pontos de apoio. A massa de cada bloco é de 30 Kg.
 6. Observe a figura 3.4: calcule o valor máximo da distância que é possível deslocar a tábua para fora da mesa, sem que caia.
 7. Observe a figura 3.5: calcule o ponto de apoio da tábua para que eles possam se balançar normalmente. A tábua tem 15 metros de comprimento.

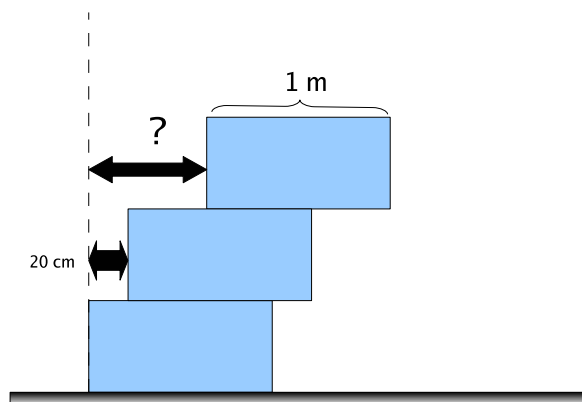


Figura 3.2:

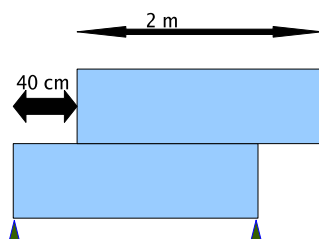


Figura 3.3:

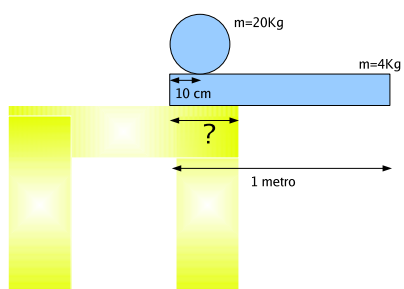


Figura 3.4:

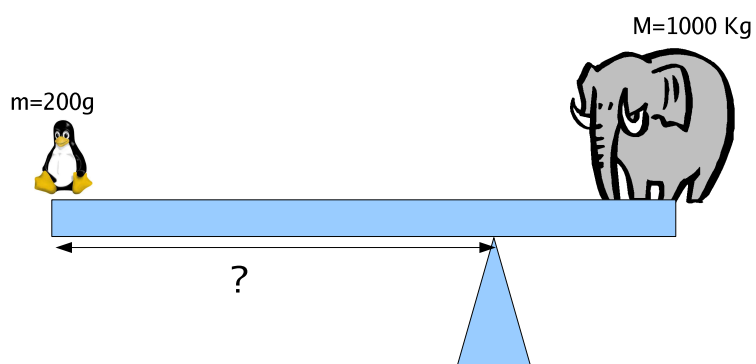


Figura 3.5:

Tema 4

Cinemática

4.1 Conceito de Mecânica (Cinemática e Dinâmica)

A **Mecânica** é o ramo da Física que estuda o movimento dos corpos. Ela inclui a **Cinemática** e a **Dinâmica**. A Cinemática ocupa-se apenas da descrição do movimento enquanto que a Dinâmica estuda a relação entre o movimento e as suas causas. Assim, os conceitos de velocidade e aceleração, por exemplo, fazem parte da Cinemática. A previsão de como um corpo se irá mover em consequência das forças que nele actuam faz parte da Dinâmica.

4.2 Noções de Cinemática

Chama-se **partícula** a um corpo que é muito pequeno comparado com as distâncias que percorre. Se estudarmos, por exemplo, o movimento de translação da Terra em torno do Sol então poderemos considerar a Terra como partícula. Mas se estivermos interessados em estudar o movimento de rotação da mesma sobre o seu eixo, já não a poderemos considerar uma partícula. Subjacente ao conceito de partícula está portanto a ideia de que a forma ou o tamanho do corpo não têm interesse para o tipo de movimento em estudo.

4.2.1 Posição

A descrição do movimento de uma partícula faz-se indicando a posição da mesma em relação a um referencial. Existe grande liberdade na escolha do referencial. Este pode ser, por exemplo, um sistema de eixos $Oxyz$ com origem O convenientemente escolhida num certo ponto do espaço. A posição que essa partícula ocupa num certo instante t é

então dada por um vector posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z, \quad (4.1)$$

o que corresponde a dizer que a partícula ocupa o ponto de coordenadas $[x(t), y(t), z(t)]$ no instante t . Os valores de x , de y e de z devem ser expressos numa certa unidade de comprimento (em metros ou centímetros, por exemplo).

Chama-se **instante inicial** ao momento em que se inicia a descrição do movimento. Não quer dizer que a partícula estivesse parada antes. Quer dizer apenas que o seu movimento só foi observado a partir daquele momento.

4.2.2 Deslocamento

Se não estiver em repouso, a posição da partícula vai então variar no decorrer do tempo. O deslocamento efectuado entre dois instantes t_1 e t_2 é um vector com origem na posição ocupada no instante t_1 e extremidade na posição ocupada no instante t_2 . É portanto a diferença entre os vectores posição $\vec{r}(t_2)$ e $\vec{r}(t_1)$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \quad (4.2)$$

De uma maneira mais informal: é uma "seta" que aponta da posição inicial para a posição final.

Problema: A posição de uma partícula em função do tempo é $\vec{r}(t) = (2t + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y$. O tempo e o espaço medem-se em segundos e metros.

1. Calcule a posição no instante $t = 2\text{s}$.

Resolução: $\vec{r}(2) = (2 \times 2 + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y = 7\vec{u}_x + 5\vec{u}_y(\text{m})$.

2. Calcule o deslocamento no intervalo de tempo entre $t = 2\text{s}$ e $t = 4\text{s}$.

Resolução: $\vec{r}(4) = (2 \times 4 + 3)\vec{u}_x + 5\vec{u}_y = 11\vec{u}_x + 5\vec{u}_y$. Portanto o deslocamento efectuado é

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(4) - \vec{r}(2) = 4\vec{u}_x \text{ m}.$$

Note-se que **não interessa saber** por onde a partícula andou entre os instantes t_1 e t_2 . Por isso, não se deve confundir o deslocamento (ou o seu módulo) com o *espaço percorrido* no mesmo intervalo de tempo. O espaço percorrido é o comprimento de trajectória descrita (que na maior parte dos casos até é curva) e depende da forma desta. Repare-se também no seguinte: de acordo com a definição, se uma pessoa se deslocar de casa até à Lua(!) e em seguida voltar a casa então **o deslocamento total efectuado foi nulo**: porque a posição inicial e a posição final são a mesma.

É fácil verificar que o deslocamento efectuado num intervalo $[t_1, t_2]$ somado com o deslocamento no intervalo $[t_2, t_3]$ é igual ao deslocamento efectuado no intervalo $[t_1, t_3]$

Problema: Continuando o problema acima, verifique que o deslocamento entre os instantes $t=2\text{s}$ e $t=10\text{s}$ é a soma dos deslocamentos entre $t=2\text{s}$ e $t=4\text{s}$ e entre $t=4\text{s}$ e $t=10\text{s}$.

Resolução:

$$\Delta \vec{r}_{[2,10]} = \Delta \vec{r}_{[2,4]} + \Delta \vec{r}_{[4,10]} = 4\vec{u}_x + 12\vec{u}_x = 16\vec{u}_x(\text{m}) = \vec{r}(10) - \vec{r}(2)$$

4.2.3 Velocidade

Suponhamos que uma partícula em movimento se encontra nas posições $\vec{r}(t_i)$ e $\vec{r}(t_f)$ nos instantes t_i e t_f respectivamente. Chama-se velocidade média ao deslocamento realizado, em média, por unidade de tempo. Assim,

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}. \quad (4.3)$$

Problema: Calcule a velocidade média da partícula do problema anterior entre os instantes $t=2\text{s}$ e $t=4\text{s}$.

Resolução:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(4) - \vec{r}(2)}{4 - 2} = 2\vec{u}_x \text{ m.s}^{-1}.$$

A velocidade instantânea da partícula num certo instante t é a velocidade média num intervalo de tempo infinitesimal que contém o instante t . A velocidade instantânea no instante t é assim definida como

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}. \quad (4.4)$$

A *velocidade instantânea* passará a partir de agora a ser designada, mais simplesmente, por *velocidade*. Na expressão (4.4) o aluno deve reconhecer a definição matemática de derivada de uma função. Neste caso é a função $\vec{r}(t)$ que está a ser derivada em ordem a t . A derivação de um vector $\vec{r}(t)$ faz-se derivando cada uma das suas coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \\ &= [x'(t), y'(t), z'(t)]. \end{aligned}$$

Portanto a velocidade é a derivada da posição em ordem ao tempo. Mede a rapidez com que a partícula muda de posição. O vector velocidade é sempre tangente à trajectória descrita como mostra a figura 4.1.

Problema: Calcule a velocidade da partícula do problema anterior no instante $t=5\text{s}$.

Resolução: $\vec{v}(5) = \frac{d(2t+3)}{dt}\vec{u}_x + \frac{d(5)}{dt}\vec{u}_y = 2\vec{u}_x \text{ m.s}^{-1}.$

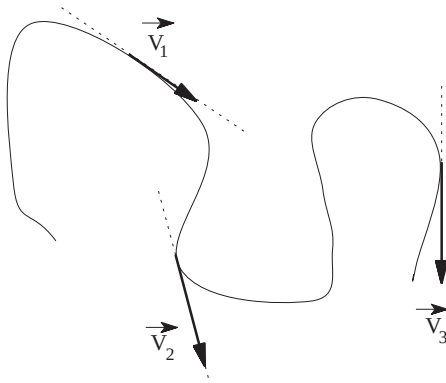


Figura 4.1: O vector velocidade em alguns pontos da trajectória.

Problema: A posição de uma partícula é dada por

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 5t)\vec{u}_y + \sin(t)\vec{u}_z.$$

Calcule a velocidade em qualquer instante t .

Resolução: $\vec{v}(t) = (4t + 5)\vec{u}_y + \cos(t)\vec{u}_z$.

Existe um conceito importante relacionado com o de velocidade: o de **momento linear** (ou **quantidade de movimento**). Este é definido como o produto da massa da partícula pela sua velocidade. Trata-se portanto de um vector:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (4.5)$$

Se considerarmos um sistema constituído por várias partículas então podemos definir a quantidade de movimento total do sistema com sendo a soma das quantidades de movimento de cada uma das partículas que o constituem:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots \end{aligned}$$

4.2.4 Aceleração

Aceleração significa variação de velocidade. A aceleração instantânea, ou mais simplesmente, aceleração, é definida como a derivada da velocidade em ordem ao tempo (ou a segunda derivada da posição):

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ &= [x''(t), y''(t), z''(t)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mede portanto a rapidez de variação da velocidade.

É costume dividir o vector aceleração em duas componentes: uma tangente à trajectória e que se chama **aceleração tangencial**; outra perpendicular à trajectória, a **aceleração normal**. A **aceleração tangencial** mede a rapidez de variação do módulo da velocidade. Se a aceleração tangencial não for zero isso quer dizer que a partícula poderá estar a mover-se cada vez mais depressa (se a componente tangencial tiver o mesmo sentido que a velocidade) ou a mover-se cada vez mais devagar (se a componente tangencial tiver sentido contrário ao da velocidade). A **aceleração normal** mede a rapidez de variação da direcção da velocidade. Se a aceleração normal não for nula isso significa que o movimento vai mudando de direcção, ou seja, que a trajectória é curvilínea. Em particular, se a partícula se move ao longo de uma linha recta então podemos concluir que é nula a componente normal da aceleração. A aceleração normal **aponta sempre** para a parte de dentro da curva. O seu módulo é igual a v^2/R onde R é o raio de curvatura da trajectória no ponto onde se encontra a partícula. Tudo isto se pode expressar matematicamente por:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

onde $\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor de $\vec{v}$ e $\vec{u}_n$ é o vector unitário perpendicular à trajectória (no ponto onde se encontra a partícula) apontando para dentro da curva. A figura 4.2 ilustra o que atrás ficou dito.

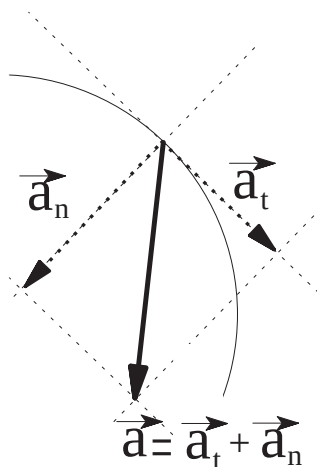


Figura 4.2: Decomposição do vector aceleração segundo a direcção normal e a direcção tangente à trajectória.

4.3 Alguns exemplos de movimentos

4.3.1 Movimento rectilíneo uniforme

É o movimento de uma partícula que se desloca ao longo de uma linha recta com velocidade constante. Pode expressar-se por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t.$$

de modo que $\vec{v}(t) = \vec{v}$ não varia no tempo. Podemos tomar a direcção do movimento como eixo Ox e então a coordenada da partícula em função do tempo é dada por

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (4.7)$$

Problema: Verifique que a aceleração é nula.

Resolução: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$.

4.3.2 Movimento rectilíneo uniformemente acelerado

Neste caso a partícula tem aceleração constante igual a a . A sua posição no eixo Ox é dada por

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad (4.8)$$

e a velocidade vai aumentando linearmente com o tempo:

$$v(t) = v_0 + at. \quad (4.9)$$

Problema: Usando (4.8) demonstre a equação (4.9).

Resolução: $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$.

4.3.3 Movimento circular uniforme

É o caso em que uma partícula descreve uma circunferência com velocidade constante em módulo. Supondo que o movimento se dá no plano Oxy e a trajectória está centrada na origem O e tem raio R , as coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t), \\ y(t) &= R \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

O ângulo que o vector posição faz com o eixo Ox é ωt e portanto aumenta linearmente com o tempo. ω é a *velocidade angular* e corresponde ao ângulo varrido pelo vector posição na unidade de tempo.

Uma vez que o módulo da velocidade não varia (por isso se diz que o movimento é uniforme) a aceleração tangencial é então nula. Mas a aceleração normal não é nula porque o vector velocidade vai mudando de direcção no decorrer do tempo. Conclui-se assim que neste caso o **vector aceleração aponta sempre para o centro da circunferência**. Esta situação está representada na figura 4.3. Diz-se que a aceleração é *centrípeta*. O módulo da aceleração é dado por:

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}.$$

A relação entre a velocidade e a velocidade angular é:

$$v = \omega R.$$

Problema: Usando (4.10) verifique que $v = \omega R$.

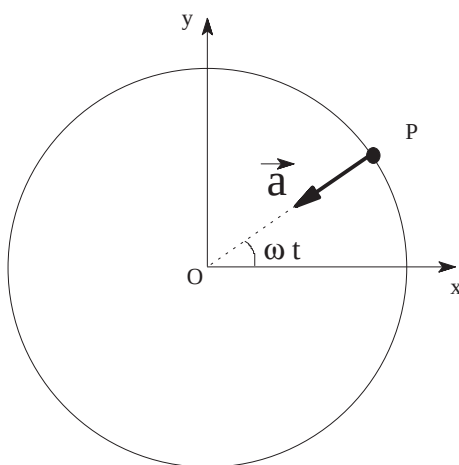


Figura 4.3: Aceleração no movimento circular uniforme.

Resolução:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y = \\ &= -R\omega \sin(\omega t) \vec{u}_x + R\omega \cos(\omega t) \vec{u}_y. \end{aligned}$$

Portanto $v^2 = R^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + R^2\omega^2 \cos^2(\omega t) = R^2\omega^2$, logo $v = \omega R$.

4.4 Exercícios

1. Dois comboios circulam na mesma linha a 30 km/h em sentidos opostos e estão separados por 60 km. Um pássaro voa a 60 km/h entre os dois comboios. Sempre que encontra um dos comboios volta para atrás até encontrar o outro e vai repetindo

este movimento até que os dois comboios se encontram. Qual é a distância total percorrida pelo pássaro?

2. Um automóvel, partindo do repouso, atingiu a velocidade de 40 km/h em 10 s. (a) calcule a aceleração média; (b) supondo que a aceleração foi constante, determine a posição no instante $t = 10$ s.
3. A lei do movimento de uma partícula é

$$\vec{r}(t) = (6t - 1)\vec{u}_x + 3t^3\vec{u}_z \text{ (m)}. \quad (4.11)$$

- (a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ s e $t = 3$ s; (b) calcule a velocidade média nesse intervalo; (c) calcule a velocidade instantânea em $t = 1$ s;
4. Um movimento no eixo Ox é dado por: $x(t) = 6t^2 - 2t + 1$.
 - (a) Represente graficamente $x(t)$.
 - (b) Determine a velocidade média no intervalo de entre $t = 0$ e $t = 1$.
 - (c) Determine a velocidade instantânea $v(t)$.
 - (d) A partir de que momento se move o corpo no sentido positivo?
5. Um corpo desloca-se com velocidade constante no eixo Ox. Passa no ponto $x=2$ m no instante $t=2$ s e no ponto $x=10$ m que $t=3$ 0s.
 - (a) Calcule a velocidade.
 - (b) Represente o gráfico $x(t)$.
 - (c) O que significam a ordenada na origem e o declive da recta que traçou?
6. Um corpo cai, na vertical, com aceleração $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. No instante $t = 2$ s atinge o solo. Determine: (a) a altura de que caiu a bola, supondo que partiu do repouso; (b) a velocidade da bola em função da altura ao solo.
7. É costume dizer-se que, para os automobilistas, a *distância de travagem*, d_T , é $d_T = v^2/100$ com v expresso em $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ e a distância d_T em metros. A que aceleração, suposta constante, é que isto corresponde?
8. Um corpo é lançado verticalmente para cima com velocidade de 3 m/s. Até que altura sobe?
9. Represente graficamente $x(t)$ para um corpo que se desloca com velocidade constante no eixo Ox, com velocidade -4 m/s e que passa no ponto $x=-1$ no instante $t=0$. Qual a posição dele no instante $t=11$ s ?

Tema 5

Dinâmica da partícula

5.1 As três Leis de Newton

O capítulo anterior foi dedicado apenas à descrição do movimento de uma partícula. Agora ir-se-á relacionar esse movimento com as suas causas. O conceito mais importante a ser introduzido é o de **força**. A teoria da Mecânica Clássica (não relativista) assenta nas seguintes três **Leis de Newton**:

1. Enquanto sobre uma partícula não actuarem quaisquer forças (ou a força resultante for nula), esta permanecerá em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme.
2. A força que actua numa partícula é igual à derivada em ordem ao tempo do seu momento linear. Isto expressa-se pela fórmula:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.1)$$

3. Se uma partícula A exerce uma força sobre uma partícula B então esta exerce, simultaneamente, uma força com a mesma intensidade mas de sentido oposto sobre a partícula A. Estas duas forças constituem um par “acção-reacção”.

A primeira lei diz que se um corpo está parado ou se move com velocidade $\vec{v}$ constante então a soma (vectorial) de todas as forças que actuam sobre ele é zero. Ou porque não há nenhuma força ou porque elas se anulam uma às outras. Um exemplo é o seguinte: se um objecto está parado em cima de uma mesa isso quer dizer que a soma de todas as forças que estão a actuar sobre ele é nula. Dito de outra maneira, a primeira lei diz que os estados de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme não têm uma causa. Uma dessas forças é o peso do corpo (exercida pela Terra sobre ele) e outra é a reacção normal da mesa sobre esse corpo.

A segunda lei diz que a força $\vec{F}$ é igual a

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Como $\vec{p} = m\vec{v}$ então concluímos (para m constante) que

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Portanto, neste caso, a força é o produto da massa pela aceleração. Repare-se que na segunda lei surge o conceito de força como **causa** da modificação do estado de movimento dos corpos (isto é, da velocidade). A massa m chama-se massa inercial e é uma característica do corpo que determina se ele vai acelerar mais ou menos quando sujeito a uma certa força. Quanto maior a massa ou inércia do corpo, menor será a sua aceleração.

Uma força representa-se matematicamente por um vector. Como tal, possui as seguintes características:

- direcção ou linha de acção (é a recta ao longo da qual a força actua);
- sentido;
- intensidade (módulo) cuja unidade é, no Sistema Internacional, o *newton* (N);
- ponto de aplicação (é o ponto do corpo onde ela está a ser exercida).

Se sobre uma partícula actuarem várias forças então aquela irá sofrer uma aceleração que é a soma das acelerações que cada força provocaria separadamente. Este resultado constitui o princípio da independência das forças e pode ser demonstrado como se segue: sejam $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ as forças aplicadas numa partícula de massa m . Então a sua aceleração será

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

onde

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m} \quad \text{e} \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m},$$

são as acelerações que $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ provocariam separadamente. A soma vectorial de todas as forças que actuam numa partícula chama-se **força resultante**. Quando a resultante é nula diz-se que a partícula está em equilíbrio. Uma partícula em equilíbrio pode portanto estar parada ou em movimento rectilíneo uniforme.

Chama-se peso à força gravítica exercida pela Terra sobre um corpo.¹ Aponta para o centro da Terra (direcção vertical) e a sua intensidade é igual a mg com $g \simeq 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ sendo a aceleração da gravidade e m a massa do corpo. Todos os corpos caem com a mesma aceleração g independentemente da sua massa.

¹Existe uma definição mais elaborada de peso que pretende ter em conta o efeito da rotação da Terra além da força da gravidade.

5.2 Aplicações simples das leis de Newton

5.2.1 Blocos ligados por fio

Consideremos dois blocos de massas m_1 e m_2 , em cima de uma mesa, ligados por um fio. O sistema vai ser arrastado por uma força exterior $\vec{F}$ que actua num dos blocos, como mostra a figura 5.1. No bloco 1 estão aplicadas as forças $\vec{F}$ e $-\vec{T}$ (esta última é-lhe exercida pelo fio). Sobre o bloco 2 só actua a força $\vec{T}$ (exercida pelo fio)².

Como a força externa que arrasta o sistema constituído pelos blocos é $\vec{F}$ e tem de arrastar uma massa total de $m_1 + m_2$ então a aceleração com que se move o sistema é

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2}. \quad (5.2)$$

Também podemos aplicar a segunda lei de Newton para cada bloco:

$$\begin{aligned} \vec{F} - \vec{T} &= m_1 \vec{a} && \text{para o bloco 1,} \\ \vec{T} &= m_2 \vec{a} && \text{para o bloco 2.} \end{aligned} \quad (5.3)$$

A resolução deste sistema permite determinar a aceleração $\vec{a}$ e a tensão $\vec{T}$ conhecendo m_1 e m_2 .

Problema: Seja $|\vec{F}| = 10$ N, $m_1 = 2$ Kg e $m_2 = 3$ Kg. Calcular a e $|\vec{T}|$.

Resolução: Pela equação (5.2) temos que $a = 10/(2 + 3) = 2\text{ms}^{-2}$. Da segunda equação do sistema (5.3) também se obtém $T = m_2 a = 3 \times 2 = 6\text{N}$.

Alternativamente podemos resolver o problema através do sistema de equações (5.3) para calcular a e $|\vec{T}|$:

$$\begin{cases} 10 - |\vec{T}| &= 2a \\ |\vec{T}| &= 3a. \end{cases}$$

Cuja solução é de facto $a = 2\text{ms}^{-2}$ e $|\vec{T}| = 6$ N.

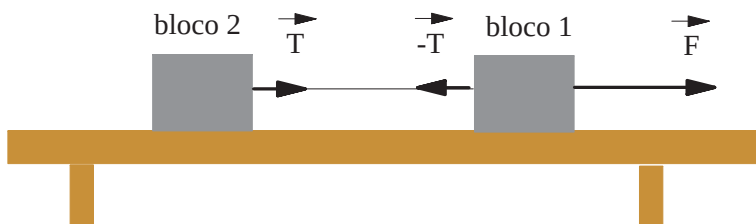


Figura 5.1: Blocos ligados por um fio são arrastados sobre uma mesa horizontal por acção da força $\vec{F}$.

²O fio exerce forças de igual intensidade nos dois blocos porque a sua massa é desprezável.

5.3 Impulso de uma força e Princípio da Conservação do Momento Linear

Suponhamos que uma força constante $\vec{F}$ actua numa partícula durante um intervalo de tempo Δt . O produto da força por Δt chama-se impulso da força naquele intervalo de tempo. A aceleração da partícula foi $\vec{a} = \vec{F}/m$ e portanto a variação da sua velocidade no intervalo de tempo Δt foi $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{a}\Delta t$. Então podemos escrever que o impulso é igual a

$$\begin{aligned}\vec{I} = \vec{F}\Delta t &= m\vec{a}\Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \\ &= \vec{p}_f - \vec{p}_i.\end{aligned}$$

Ou seja, o **impulso de uma força num certo intervalo de tempo é igual à variação do momento linear naquele intervalo de tempo.**

Problema: Sobre uma partícula de massa 6 Kg actua a força $\vec{F} = 10\vec{u}_x$ N durante 8 s. Sabendo que a partícula tinha inicialmente a velocidade $\vec{v} = 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, calcule a velocidade final da partícula.

Resolução: Utilizando a lei do impulso temos que:

$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \Leftrightarrow 10 \times 8\vec{u}_x = 6(\vec{v}_f - 2\vec{u}_y) \Leftrightarrow 80\vec{u}_x = 6\vec{v}_f - 12\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{v}_f = \frac{40}{3}\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Alternativamente podemos resolver o problema através das fórmulas de cinemática. A aceleração (constante) é $\vec{a} = \frac{10}{6}\vec{u}_x \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Portanto ao fim de $\Delta t = 8\text{ s}$ a velocidade variou desde o valor inicial $\vec{v} = 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ até $\vec{v}_f = 2\vec{u}_y + 8 \times \frac{10}{6}\vec{u}_x = \frac{40}{3}\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Consideremos agora um sistema constituído por duas partículas, 1 e 2, que exercem forças uma na outra. As forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ aplicadas na partícula 1 e na partícula 2 respectivamente constituem um par acção-reacção, pela terceira lei de Newton. As forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ dizem-se forças interiores ao sistema porque são as forças que as partículas desse sistema exercem entre si. Como irá variar o momento linear do sistema num certo intervalo de tempo Δt ? Suponhamos que inicialmente o momento linear total é $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$. A variação do momento linear da partícula 1 é igual ao impulso de $\vec{F}$ e a variação do momento linear da partícula 2 é igual ao impulso de $-\vec{F}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1f} &= \vec{p}_{1i} + \vec{F}\Delta t, \\ \vec{p}_{2f} &= \vec{p}_{2i} - \vec{F}\Delta t.\end{aligned}$$

Somando as duas equações obtemos $\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$, isto é,

$$\vec{P}_{total}(inicial) = \vec{P}_{total}(final). \quad (5.4)$$

A equação (5.4) traduz o princípio da conservação do momento linear: **se num sistema só actuarem forças interiores, o momento linear total do sistema não irá variar no tempo.**

A equação (5.4) aplica-se, por exemplo, ao problema da explosão de uma granada (a quantidade de movimento total dos fragmentos tem de ser igual à quantidade de movimento da granada antes da explosão) ou ao problema de determinar a velocidade de recuo de uma arma de fogo.

Se existirem forças externas a actuarem nas partículas então (5.4) já não será válida.

5.4 Exercícios

1. Um bloco de 1500 N está colocado numa superfície. O coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0.5$ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0.4$. Se o empurrarmos com força de 800N, qual será a aceleração?
2. Uma partícula de massa $m = 3$ kg executa um movimento descrito pelas seguintes equações

$$x = 2t, \quad y = -t^2, \quad (5.5)$$

com x em metros e t em segundos. a) Calcule a aceleração de movimento. b) Determine o valor da força que actua na partícula e represente-a num esquema. c) Suponha que essa força deixou de existir no instante $t = 10$ s. Como se moverá a partícula a partir desse instante?

3. Um sistema constituído por dois blocos de massas $m_1 = 1$ kg e $m_2 = 2$ kg ligados por um fio de massa desprezável é puxado, sobre uma mesa lisa, com força $F = 3$ N. a) Determine a aceleração do sistema. Faça o esquema das forças. b) Determine a tensão no fio. c) Suponha que, a certa altura, a força F deixa de existir. Como se moverá o sistema? Qual será o valor da tensão no fio?

Tema 6

Trabalho e Energia

6.1 Energia cinética e trabalho realizado por uma força

6.1.1 Definição de energia cinética

Consideremos uma partícula de massa m que se desloca com velocidade $\vec{v}$. A *energia cinética*, E_c , é definida como

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad (6.1)$$

e a unidade no Sistema Internacional é o *joule* (J). Portanto o joule é equivalente ao $\text{Kg.m}^2.\text{s}^{-2}$. A energia cinética está associada ao movimento da partícula.

6.1.2 Definição de trabalho

Consideremos uma partícula, sujeita a uma força constante $\vec{F}$, que num dado intervalo de tempo efectua um deslocamento $\vec{\Delta r}$. O trabalho realizado pela força nesse deslocamento, W , é definido como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}. \quad (6.2)$$

A unidade em que se exprime o trabalho no Sistema Internacional é o *joule* (J). Se o vector força e o vector deslocamento fizerem entre si um ângulo α então

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta r}| \cos(\alpha).$$

O ângulo α varia entre 0 e 180 graus. Se $\alpha < 90^\circ$ então a força está **a favor** do deslocamento (porque a sua componente segundo $\vec{\Delta r}$ tem o mesmo sentido que $\vec{\Delta r}$) e realiza um trabalho **positivo**. Se $\alpha > 90^\circ$ então a força está a **contrariar** o deslocamento (porque a sua componente segundo $\vec{\Delta r}$ é oposta a $\vec{\Delta r}$) e realiza um trabalho **negativo**. Estas duas situações estão representadas na figura 6.1.

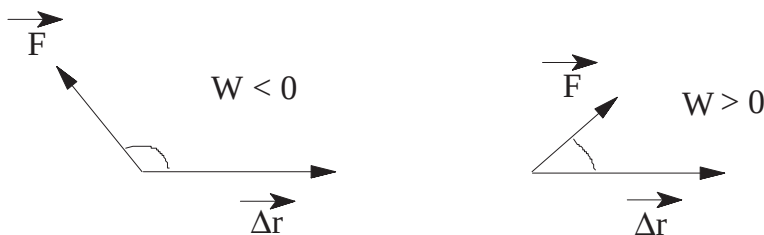


Figura 6.1: O ângulo entre a força e o deslocamento determina o sinal do trabalho.

Se existirem várias forças a actuar sobre a partícula então o trabalho total (da resultante) é a soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças:

$$\begin{aligned} W &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \cdot \vec{\Delta r} \\ &= \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_3 \cdot \vec{\Delta r} + \dots \\ &= W_1 + W_2 + W_3 + \dots \end{aligned}$$

Se a força (resultante) que actua na partícula for variável então, para calcular o trabalho num certo deslocamento $\vec{\Delta r}$, devemos dividir esse deslocamento numa soma de muitos deslocamentos pequenos, $\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_1 + \vec{\Delta r}_2 + \vec{\Delta r}_3 + \dots$. Cada um dos deslocamentos parciais $\vec{\Delta r}_i$ é suficientemente pequeno para que a força se possa considerar aproximadamente constante durante esse deslocamento $\vec{\Delta r}_i$. O trabalho será então igual à soma dos trabalhos realizados em cada deslocamento parcial:

$$W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta r}_i.$$

Fazendo $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ a soma anterior converte-se num integral e o trabalho escreve-se como

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

6.1.3 Relação entre trabalho e variação da energia cinética

Existe uma relação importante entre o trabalho da resultante das forças que actua numa partícula e a sua energia cinética. A força produz uma aceleração que pode alterar o valor da velocidade da partícula. Daí decorre também uma variação da energia cinética. **O trabalho realizado pela resultante das forças sobre uma partícula é igual à variação da sua energia cinética:**

$$W = \Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{inicial}). \quad (6.3)$$

Verifiquemos o resultado anterior para um caso particular. Consideremos uma partícula que parte do repouso e percorre a distância d sujeita a uma força $\vec{F}$ constante. Admitindo que a força actua na direcção do versor $\vec{u}_x$, a equação das posições é dada por

$$x = \frac{F}{2m}t^2,$$

e ao fim da distância d a velocidade é $v_x = \sqrt{2dF/m}$ (obtenha este resultado), pelo que a variação da energia cinética é dada por

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{inicial}) = \frac{1}{2}m\frac{2dF}{m} - 0 = F \cdot d = W. \quad (6.4)$$

Exemplo: Sobre uma partícula de massa 6 Kg actua a força $\vec{F} = 12\vec{u}_x$ N. Sabendo que a partícula tinha inicialmente a velocidade $\vec{v} = 2\vec{u}_x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

1. calcule a velocidade ao fim de 2 segundos;

Resolução: O movimento processa-se ao longo do eixo dos xx' . A aceleração é de $F/m = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Então a velocidade final é de

$$v_f = v_i + at = 2 + 2 \times 2 = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. verifique que o trabalho foi igual à variação da energia cinética.

Resolução: A variação de energia cinética foi de $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 108 - 12 = 96 \text{ J}$.

Como o deslocamento foi de $v_it + \frac{1}{2}at^2 = 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 8 \text{ m}$, então o trabalho foi $W = F\Delta x = 12 \times 8 = 96 \text{ J}$. Logo $W = \Delta E_c$.

6.1.4 Trabalho realizado pela força gravítica. Energia potencial gravítica.

À superfície da Terra a força da gravidade é constante e actua segundo a vertical do lugar. Suponhamos que uma partícula se desloca da altura h_i para a altura h_f como mostra a figura 6.2. O trabalho realizado pela gravidade é então

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_g} &= \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r} = mg \mid \Delta \vec{r} \mid \cos(\alpha) \\ &= mg(h_i - h_f). \end{aligned}$$

Pela relação existente entre trabalho e energia cinética exposta na secção anterior, podemos escrever:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_g} &= mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ \Leftrightarrow mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 &= mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2. \end{aligned}$$

À quantidade mgh passaremos a chamar energia potencial gravítica. A soma da energia potencial gravítica com a energia cinética é a energia mecânica. A equação anterior diz

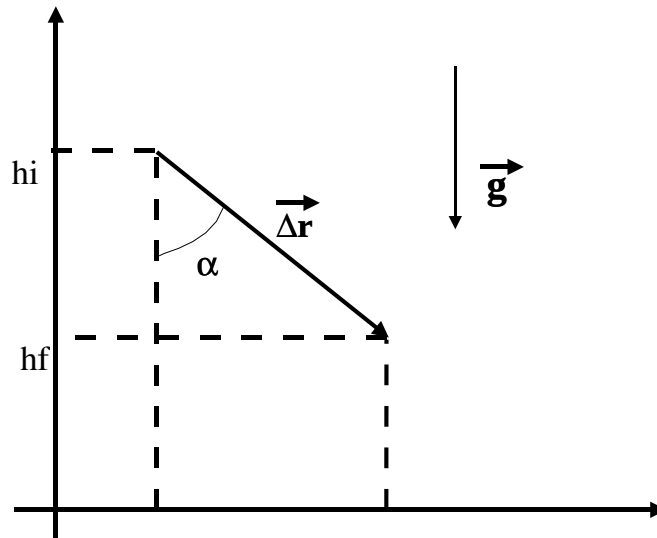


Figura 6.2: Deslocamento de uma partícula entre dois pontos a diferentes alturas, no campo gravítico.

que a energia mecânica inicial é igual à energia mecânica final. Isto é, **quando uma partícula se desloca por acção da gravidade a sua energia mecânica não varia**. Assim, se um corpo cai ele vai perdendo altura (e energia potencial) mas simultaneamente ganha velocidade (e energia cinética). A soma da energia potencial com a energia cinética mantém-se constante durante a queda. Porque a energia mecânica se conserva diz-se que a força da gravidade é conservativa.

Quando um corpo se move sobre um plano inclinado ou está suspenso por um fio (no caso do pêndulo) existe uma força adicional para além da gravidade. Trata-se da reacção normal do plano sobre o corpo ou da tensão no fio, conforme o caso. Mas estas forças **não realizam trabalho porque são sempre perpendiculares ao vector velocidade do corpo**. No caso do plano inclinado é óbvio que a reacção normal não realiza trabalho. Mas se se tratar de um pêndulo ou de uma superfície curva então podemos considerar o deslocamento do corpo como a soma de muitos deslocamentos parciais pequenos. Em cada um desses deslocamentos infinitesimais o trabalho realizado pela reacção normal da superfície é nulo por ser sempre perpendicular a esses deslocamentos (os quais são paralelos à velocidade). Assim, mesmo que o corpo desça por uma superfície encurvada a sua energia mecânica conserva-se permitindo-nos determinar o valor da velocidade em qualquer ponto da trajectória. Por exemplo, no caso da figura 6.3, se o corpo partiu de uma altura inicial h_i com velocidade $\vec{v}_i$ então a sua velocidade $\vec{v}_f$ num ponto à altura h_f

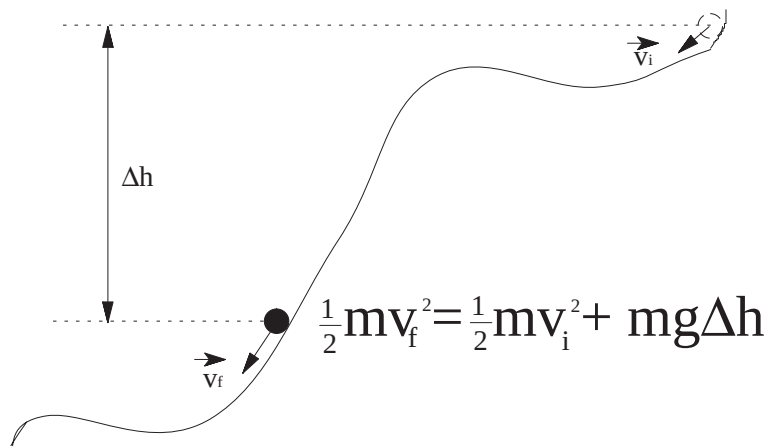


Figura 6.3: Conservação da energia mecânica na descida

é tal que

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_i - h_f)}.$$

Problema: Um pêndulo de comprimento $l = 50 \text{ cm}$ é largado de um ângulo de 30° . Calcule a velocidade v com que passa no ponto mais baixo da trajetória.

Resolução: Como apenas a força gravítica realiza trabalho, a energia mecânica é conservada. O seu valor é portanto igual à energia potencial à altura de que foi largado (já que a velocidade ali era nula):

$$E_{mec} = E_p(\text{inicial}) = mgl (1 - \cos(30^\circ)) = m \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esta energia será convertida em energia cinética no ponto mais baixo da trajetória (estamos a considerar que este se encontra à altura zero). Logo

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 = m \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{2 \times 10 \times 0,5 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tema 7

Fluidos

7.1 Conceito de pressão e de massa volúmica

Consideremos uma força $\vec{F}$ a actuar sobre uma superfície perpendicularmente a esta. A pressão p é definida como a força exercida por unidade de área da superfície, perpendicularmente a esta:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (7.1)$$

onde A denota a área. A unidade no Sistema Internacional é o N.m^{-2} (Newton por metro quadrado).

Exemplo: Um cubo de massa 6 Kg está pousado numa mesa. A aresta do cubo mede 50 cm. Calcule a pressão que ele exerce sobre a mesa.

Resolução: O cubo exerce na mesa uma força igual ao seu peso, ou seja, $F = 60 \text{ N}$. A área de contacto com a mesa é $A = 0,5^2 = 0,25 \text{ m}^2$. Portanto a pressão vale

$$p = \frac{F}{A} = \frac{60}{0,25} = 240 \text{ N.m}^{-2}.$$

A massa volúmica de um corpo homogéneo de um dado material define-se como

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (7.2)$$

onde M e V são a massa e o volume do corpo, respectivamente. Na tabela 7.1 estão listadas algumas massas volúmicas do ar e de alguns líquidos e sólidos correntes. De acordo com esta definição, a massa volúmica é uma característica do material que constitui o corpo.

7.1.1 Medição da pressão

A pressão atmosférica é facilmente medida com um dispositivo muito simples ilustrado na figura 7.1. Se o líquido possuir uma massa volúmica ρ e uma secção A o peso da coluna de líquido é $P = hA\rho g$. Essa coluna de líquido é equilibrada pelas forças de pressão atmosférica que actuam no líquido da tina. Assim as forças de pressão atmosférica que actuam, por intermédio do líquido na tina, na extremidade inferior do tubo é $F = hA\rho g$ pelo que a pressão atmosférica é dada por

substância	ρ (g.cm ⁻³)
ar (8°C, 1 atm.)	1,359 kg.m ⁻³
ar (260°C, 1 atm.)	1,308 kg.m ⁻³
água (8°C)	0,9999
água (26°C)	0,9968
álcool etílico	0,787
glicerina (20°C)	1,23
acetona (20°C)	0,787
alumínio (26°C)	2,70
ferro (26°C)	7,87
cobre (26°C)	8,96
chumbo(26°C)	7,87
ouro (26°C)	19,32

Tabela 7.1: Massas volúmicas do ar, de alguns líquidos e sólidos.

$$P_{atmosf.} = \rho gh. \quad (7.3)$$

Tipicamente o líquido usado é o mercúrio (Hg) e uma unidade de pressão muito usada é o mmHg, a qual corresponde directamente à altura h , expressa em milímetros, da coluna de mercúrio.

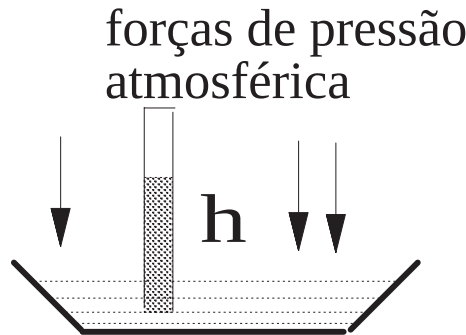


Figura 7.1: Representação de um barómetro. A altura h da coluna de líquido é medida entre a parte superior do líquido na coluna e a superfície livre do líquido.

Os manómetros de tubo aberto são outro dispositivo utilizado para medir pressões, como se ilustra na figura 7.2. Estes dispositivos permitem medir a pressão de um fluido (um gás no caso representado). As forças de pressão exercidas pelo gás na coluna de líquido (coluna manométrica), F_{gas} , são compensadas pelo peso da própria coluna e pelas forças de pressão atmosférica, pelo que $F_{gas} = F_{atmosf.} + hA\rho g$ e, portanto, a pressão do gás dentro do balão é

$$P_{gas} = P_{atmosf.} + \rho gh. \quad (7.4)$$

Na obtenção dos resultados (7.3) e (7.4) foi usado o facto do tubo possuir secção constante A , contudo

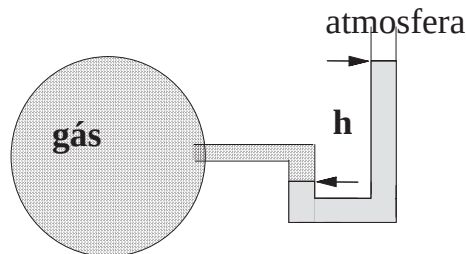


Figura 7.2: Representação de um manómetro de tubo aberto. A altura h da coluna de líquido é medida entre a parte superior do líquido na coluna à esquerda e a parte superior do líquido na coluna à direita.

os resultados obtidos não dependem desta limitação.

7.1.2 Pressão num fluido

Uma qualquer superfície que se encontre num meio fluido (gás ou líquido) ficará sujeita a uma pressão independentemente da sua orientação. Ambas as faces de uma folha de papel, por exemplo, estão sujeitas à pressão atmosférica. O valor da pressão atmosférica que iremos utilizar nos problemas é $p_o \approx 10^5 \text{ Nm}^{-2}$.

Exemplo: Calcule a força exercida pela atmosfera numa face de uma folha de papel de dimensões $30\text{cm} \times 20\text{cm}$.

Resolução: A força exercida pela atmosfera em cada uma das suas faces é de $F = p_o A = 10^5 \times 6 \times 10^{-2} = 6000\text{N}$ (aproximadamente o peso de uma massa de 600 Kg!).

Consideremos agora um ponto qualquer num fluido. A pressão naquele ponto (isto é, a força por unidade de área em qualquer superfície que fosse lá colocada) é dada pela fórmula:

$$p = p_o + \rho gh, \quad (7.5)$$

onde ρ denota massa volúmica do líquido e h a profundidade do ponto a que se encontra o referido ponto. A equação (7.5) mostra que uma superfície colocada no ponto P estaria sujeita ao peso da coluna de líquido que se encontra por cima de P, somada da força que a atmosfera exerce na superfície do líquido. A pressão aumenta com a profundidade porque também aumenta a coluna de líquido (e o seu peso).

7.1.3 Equilíbrio de um fluido. Vasos comunicantes

Quando um fluido está em equilíbrio, não havendo correntes no seu interior, a pressão deverá ser a mesma em todos pontos que se encontrem à mesma altura.

Em vasos comunicantes **todos os pontos que se encontrem à mesma altura têm de ter a mesma pressão**.

Em particular, o nível do líquido (isto é, a altura a que se encontra a sua superfície de contacto com o ar) é a altura para a qual a pressão é $p = p_o$ (atmosférica). Assim, **o nível do líquido tem de ser o mesmo em todos os vasos comunicantes**.

7.2 Impulsão e Princípio de Arquimedes

7.2.1 Força de impulsão

Consideremos um corpo completamente mergulhado num líquido. A pressão que o líquido lhe exerce por baixo é superior à pressão que lhe exerce por cima porque a pressão aumenta com a profundidade. Daqui se conclui que o líquido exerce no corpo uma força de direcção vertical e dirigida de baixo para cima. Essa força chama-se *impulsão*. A impulsão actua em sentido contrário à força gravítica no corpo. Por essa razão os corpos parecem mais leves quando mergulhados num líquido. Se a impulsão for superior ao peso do corpo então este virá à superfície e flutuará.

Para saber o valor da força de impulsão podemos raciocinar do seguinte modo:

A impulsão não depende do material de que é feito o corpo porque resulta das pressões exercidas pelo líquido sobre a superfície do mesmo. A pressão exercida em cada pedaço da superfície só depende da profundidade a que este se encontra (ver fórmula (7.5)).

Assim, podemos supor que o corpo é feito do próprio líquido. O corpo não será mais do que um pedaço de líquido em repouso dentro do próprio líquido e a superfície do corpo é uma superfície imaginária que delimita um certo volume de líquido igual ao do corpo. Esse volume está em repouso sujeito a duas forças: gravidade e impulsão. Logo a impulsão tem de ter a mesma intensidade que o peso do volume de líquido que o corpo ocupa (ρgV). Obtemos assim o Princípio de Arquimedes:

Um corpo mergulhado num líquido fica sujeito a uma força vertical, dirigida de baixo para cima, de valor igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo corpo.

Representando por $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, o Princípio de Arquimedes exprime-se pela fórmula:

$$\vec{I} = -\rho V \vec{g}, \quad (7.6)$$

onde $\vec{I}$ denota a impulsão, ρ a densidade do líquido e V o volume submerso do corpo.

Assim, um corpo completamente mergulhado no líquido fica sujeito simultaneamente à gravidade e à impulsão:

$$\vec{F}_g + \vec{I} = (m - \rho V) \vec{g}.$$

Se $|\vec{F}_g| > |\vec{I}|$ então o corpo vai ao fundo. Se $|\vec{F}_g| < |\vec{I}|$ então ele virá à superfície.

Exercício: Um homem de massa M está em cima de um bloco de gelo que flutua rasante à superfície da água (ver figura 7.3).

O bloco possui uma área superficial A (onde o homem se encontra) e a água e o gelo possuem massas volúmicas ρ_a e ρ_g , respectivamente. Calcule a altura l do bloco.

7.2.2 Corpo menos denso do que o líquido

Se o corpo é menos denso do que o líquido então flutua à sua superfície. Nessas condições o volume total do corpo é a soma do volume submerso, V_s , com o volume emerso V_e :

$$V = V_s + V_e,$$

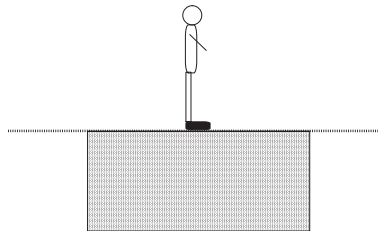


Figura 7.3:

e para que fique em equilíbrio a impulsão tem de ter a mesma intensidade que o peso, isto é,

$$\begin{aligned} |\vec{I}| = \rho V_s g &= |\vec{F}_g| = \rho_c V g \\ \frac{V_s}{V} &= \frac{\rho_c}{\rho}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Problema: A densidade do gelo é $0,917 \text{ g.cm}^{-3}$ e a da água (líquida) é 1 g.cm^{-3} . Calcule a fracção do volume de um cubo de gelo que fica submersa quando o cubo flutua na água.

Resolução: Utilizando a equação (7.7) obtemos:

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{0,917}{1} = 0,917.$$

Repare que, quando olhamos para um iceberg, só vemos 8,3 % do seu volume total!

7.2.3 Utilização do Princípio de Arquimedes para a determinação do material que constitui um corpo.

A massa volúmica (por vezes designado por densidade) de um corpo é a massa por unidade de volume desse corpo. A densidade da água líquida, por exemplo, é de 1 g.cm^{-3} , o que quer dizer que 1 cm^3 de água tem uma massa de 1 grama. Assim, um metro cúbico de água terá uma massa de uma tonelada.

Muitas vezes um corpo é feito de uma mistura de duas ou mais substâncias de densidades conhecidas. Por exemplo, se ele for constituído por duas substâncias A e B tais que ρ_A e ρ_B são conhecidos, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} V &= V_A + V_B, \\ M &= \rho_A V_A + \rho_B V_B. \end{aligned} \quad (7.8)$$

A primeira equação significa que o volume do corpo é a soma dos volumes das substâncias que o compõem e a segunda equação diz que a massa M do corpo é a soma das massas de cada substância.

Se conhecermos a intensidade da força de impulsão então saberemos o volume do corpo. Se também conhecermos a sua massa poderemos então calcular V_A e V_B .

Problema: Um corpo de massa $M=5 \text{ Kg}$ tem uma massa "aparente" de 3 Kg quando mergulhado em água ($\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$). O corpo é uma mistura de duas substâncias A e B tais que $\rho_A = 3 \text{ g.cm}^{-3}$ e $\rho_B = 0,5 \text{ g.cm}^{-3}$. Determine a sua composição.

Resolução: O valor da impulsão é $(5 - 3) \text{ g} \approx 20 \text{ N}$. A massa de água deslocada é de 2 Kg , o que corresponde a um volume do corpo $V = 2000 \text{ cm}^3$. O sistema (7.8) fica:

$$\begin{aligned} 2000 &= V_A + V_B, \\ 5000 &= 3V_A + 0,5V_B. \end{aligned}$$

E daqui se obtém $V_A = 1600 \text{ cm}^3$ e $V_B = 400 \text{ cm}^3$. Portanto 80% do volume do corpo é substância A e 20% é substância B.

7.3 Exercícios

1. Calcule a pressão a 100 metros de profundidade no mar. ($\rho = 1 \text{ gcm}^{-3}$, $p_o = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$)
2. Um corpo de densidade $1,3 \text{ gcm}^{-3}$ encontra-se mergulhado em água. Vai ao fundo? Supondo que o volume é de 6 cm^3 , calcule a impulsão.
3. Um corpo esférico de raio $R=1 \text{ cm}$ tem massa de 20 g . Se for mergulhado num líquido de densidade $\rho = 0,8 \text{ gcm}^{-3}$ vem à superfície ou vai para o fundo?
4. O gelo tem densidade $0,917 \text{ gcm}^{-3}$. Calcule a fracção de volume de um iceberg que fica submersa.
5. Um líquido exerce sobre um corpo nele mergulhado uma força de impulsão. Pela terceira lei de Newton, o corpo tem de exercer no líquido uma força simétrica de reacção. Como se manifesta essa força?
6. Um corpo é feito de uma mistura de 2 substâncias, A e B. $\rho_A = 1,5 \text{ gcm}^{-3}$ e $\rho_B = 2 \text{ gcm}^{-3}$. O volume é de 5 cm^3 e a massa é de 8 g . Determine a sua composição.
7. Um corpo é feito de uma mistura de 2 substâncias, A e B. $\rho_A = 0,5 \text{ gcm}^{-3}$ e $\rho_B = 2 \text{ gcm}^{-3}$. Se ele for feito de 30% (em massa) de A e 70% de B, conseguirá flutuar na água?
- 8.
9. Um corpo mergulhado em água tem uma massa aparente de 3 Kg . A sua massa verdadeira é de 6 Kg . Ele é feito de 2 substâncias, A e B, com $\rho_A = 2 \text{ gcm}^{-3}$ e $\rho_B = 1 \text{ gcm}^{-3}$.
 - (a) Calcule o volume do corpo.
 - (b) Determine a sua composição, isto é, as percentagens de A e B (em massa ou em volume).

Tema 8

Noções de Termodinâmica

8.1 Temperatura e calor

A **temperatura** é um parâmetro que ajuda a caracterizar o estado em que se encontra um corpo e determina se ele estará em equilíbrio térmico com outros. A unidade no Sistema Internacional é o *kelvin* K. É frequente usar-se outra unidade, o grau Celsius $^{\circ}C$. Para converter graus Celsius em Kelvin basta somar 273,15:

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273,15.$$

A temperatura $T=0$ K chama-se zero absoluto e é impossível atingir na prática.

Calor é a quantidade de energia que passa de um corpo para outro, quando colocados em contacto, por se encontrarem a temperaturas diferentes. O calor é transferido até que se atinja o equilíbrio térmico, isto é, até que a temperatura dos dois corpos seja idêntica. A partir de então diz-se que os corpos se encontram à mesma temperatura.

Como o calor é energia então a unidade é o *Joule*. É também frequente usar-se outra unidade, a *caloria*. Uma caloria é a quantidade de calor que é necessário fornecer a 1 grama de água para que a temperatura desta suba 1 grau. A conversão entre as duas unidades de energia é dada por:

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}.$$

Quanto mais energia tiver um corpo (energia essa que lhe foi fornecida como calor) mais elevada é a sua temperatura. Num corpo mais quente as moléculas ou átomos que o constituem, e que estão sempre em movimento uns em relação aos outros, têm um movimento mais rápido e portanto com maior energia cinética. Quando fornecemos calor a um corpo estamos a aumentar a energia cinética da vibração das moléculas do corpo.

Portanto existem duas maneiras de fornecer energia a um corpo: uma é exercendo-lhe forças que realizam trabalho aumentando a sua energia cinética; outra é colocá-lo em contacto com outro corpo mais quente que lhe fornece calor.

Material	c (cal · K ⁻¹ · g ⁻¹)
chumbo	0,032
cobre	0,092
alumínio	0,215

Tabela 8.1: Capacidades térmicas mássica de alguns sólidos.

8.2 Capacidade calorífica, capacidade térmica mássica e calor de fusão

A capacidade calorífica de um corpo é a quantidade de energia (calor) que lhe é necessário fornecer para que a temperatura se eleve 1 grau. Assim, se a quantidade de calor fornecida a um corpo for Q e a temperatura subir ΔT então a capacidade calorífica C é dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \quad (8.1)$$

A unidade S.I. em que se exprime a capacidade calorífica é o J·K⁻¹ que é o mesmo que J°C⁻¹.

A capacidade calorífica por unidade de massa de um corpo é a capacidade térmica mássica (c_a) ou calor específico. Sendo a massa igual a m então a capacidade térmica mássica vem dada por:

$$c_a = \frac{Q}{m\Delta T}. \quad (8.2)$$

De acordo com a definição de caloria dada acima ficamos a saber que a capacidade térmica mássica da água é de 1cal · K⁻¹ · g⁻¹ = 4,18 J · K⁻¹ · g⁻¹. Na tabela 8.1 estão listadas as capacidades térmicas mássicas de alguns sólidos.

O calor de fusão (L_f) é a energia que é necessário dispendir para fundir uma unidade de massa de um corpo ou substância. A fusão processa-se a temperatura constante (temperatura de fusão da substância que constitui o corpo). Por exemplo, o calor de fusão do gelo é $L_f = 80\text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

Problema: Se se fornecer 400 cal a 4 g de gelo que se encontra inicialmente a T=0° C, a que temperatura e em que estado físico ficará o sistema?

Resolução: Sendo $L_f = 80\text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$, a energia necessária para fundir 4 g de gelo é $4 \times L_f = 320\text{cal}$. Depois da fusão a água está no estado líquido a T=0°C e ainda "sobram" 80 calorias. Essa energia vai servir para aquecer a água. A capacidade calorífica de 4 g de água é de 4cal · K⁻¹ · g⁻¹. Assim, a água irá ficar a T=20°C.

8.3 Expansão térmica

Consideremos uma barra que, a uma certa temperatura, tem um comprimento L_o . Se for aquecida de modo a que a temperatura se eleve de ΔT , então o comprimento aumenta de ΔL . O *coeficiente de expansão linear* α é definido pela equação:

$$\frac{\Delta L}{L_o} = \alpha \Delta T. \quad (8.3)$$

Material	α ($10^{-6}/^{\circ}C$)
gelo (a $0^{\circ}C$)	51
chumbo	29
alumínio	23
cobre	17
aço	11

Tabela 8.2: Coeficiente de expansão linear de alguns sólidos.

Alguns valores de α estão listado na tabela 8.2.

Simultaneamente, com o aquecimento o volume corpo aumentou de V_o para $V_o + \Delta V$. O *coeficiente de expansão volumétrica* β é definido pela relação:

$$\frac{\Delta V}{V_o} = \beta \Delta T. \quad (8.4)$$

Para a maioria dos sólidos é válida a relação

$$\beta \simeq 3\alpha.$$

A igualdade exacta $\beta = 3\alpha$ só se verifica quando o material que constitui o sólido tende a expandir-se igualmente em todas as direcções. Isto pode verificar-se facilmente resolvendo o seguinte exercício:

Exercício: Um cubo de aresta 1cm foi aquecido e a sua temperatura subiu 1K. O comprimento final das arestas passou a ser 1,0000001cm. Utilize (8.3) e (8.4) para calcular α e β e verifique que $\beta = 3\alpha$.

Nota: como todas as arestas tiveram igual variação de comprimento, a expansão do sólido foi igual em todas as direcções.

8.4 Condutividade térmica

Todos nós temos a noção de que existem certos materiais que conduzem bem o calor e outros que não. Estes últimos são utilizados para isolamento térmico. Iremos de seguida definir um parâmetro relacionado com a condução de calor: a condutividade térmica k .

Consideremos uma placa de espessura ΔR cujas faces, de área A , se encontram a temperaturas diferentes. Essa diferença de temperatura é ΔT . Compreendemos facilmente que vai ocorrer uma transferência de energia, sob a forma de calor, através da placa, da face mais quente para a mais fria como se mostra na figura 8.1. A quantidade de calor que é transferida por unidade de tempo, $\dot{Q}$, é proporcional à diferença de temperatura ΔT e à área da placa:

$$\dot{Q} = kA \frac{\Delta T}{\Delta R}, \quad (8.5)$$

onde k é uma constante que se designa por **condutividade térmica** e é uma característica do material que constitui a placa. A unidade S.I. de $\dot{Q}$ é $J \cdot s^{-1} = W$ e a de k é $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

A condutividade térmica k depende do tipo de material, como se mostra na tabela 8.3. Note-se, por exemplo, que a condutividade térmica do vidro é dez vezes mais elevada que a da madeira de pinho, razão pela qual os abrigos de montanha possuem portadas de pinho nas janelas.

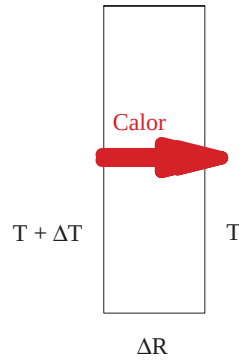


Figura 8.1: Placa de espessura ΔR com as faces a temperaturas diferentes. A seta indica o sentido da transferência de calor se $\Delta T > 0$.

Material	k ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
Aço	14
Chumbo	35
Alumínio	235
Prata	428
Ar	0,026
Água	0,61
Espuma de poliuretano	0,024
Fibra de vidro	0,048
Madeira de pinho	0,11
Vidro	1,0

Tabela 8.3: Condutividades térmicas de alguns materiais.

8.5 Emissão e absorção de radiação

Suponha que sobre uma superfície incide radiação. Uma parte dessa radiação é absorvida e outra parte é reflectida. A superfície, simultaneamente, também emite radiação.

Suponhamos que a energia incidente por unidade de tempo é W_i . Então a energia absorvida por unidade de tempo é $W_{abs} = a \cdot W_i$, onde a é um coeficiente de absorção e toma um valor entre 0 e 1. Estando o objecto a uma temperatura constante (basta esperar o tempo suficiente), a energia emitida por unidade de tempo, W_e , tem de ser igual à energia absorvida por unidade de tempo. Logo,

$$W_e = W_{abs} \Leftrightarrow W_e = aW_i \Leftrightarrow \frac{W_e}{a} = W_i \quad (8.6)$$

Mas W_i não depende das propriedades da superfície. Depende apenas da temperatura do meio ambiente. Chegamos então à conclusão de que o quociente

$$\frac{W_e}{a}$$

não depende da natureza da superfície. Então, o coeficiente de absorção e a potência emitida devem ser directamente proporcionais: uma superfície que absorva muito também emite muito.

Discuta as seguintes situações:

1. Uma parede a alta temperatura tem uma face branca e a outra face preta. Está uma pessoa de cada lado da parede: quem sente mais calor?
2. Duas casas, uma de paredes brancas e outra de paredes pretas, aqueceram sujeitas a vários dias seguidos de Sol. Depois vêm dias frios e encobertos. Em qual das casas a temperatura se mantém alta durante mais tempo?
3. Em qual das casas existem maiores amplitudes térmicas entre a noite e o dia?
4. Com o avançar da noite, a chapa dos automóveis arrefece e fica húmida (orvalho). A camada de humidade instala-se mais depressa num automóvel branco ou num preto?

8.6 Entropia

8.6.1 Definição

Consideremos um corpo à temperatura T . Se lhe for fornecida uma pequena quantidade de calor (suficientemente pequena para que não tenha causado uma variação sensível da temperatura), então a *entropia* S do corpo sofreu uma variação dada por:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}, \quad T \text{ expresso em Kelvin.} \quad (8.7)$$

Se $Q > 0$ (o calor foi fornecido ao corpo) então a sua entropia aumenta ($\Delta S > 0$). Se $Q < 0$ (o calor foi retirado do corpo) então a sua entropia diminui ($\Delta S < 0$).

Quando o calor é suficiente para causar uma variação de temperatura de T_i para T_f a variação de entropia do corpo é dada por:

$$\Delta S = C \log\left(\frac{T_f}{T_i}\right), \quad (8.8)$$

onde C é a capacidade calorífica do corpo e as temperaturas T_i e T_f **devem ser expressas em Kelvin**. O logaritmo é de base $e = 2,71828\dots$ (logaritmo neperiano). A fórmula (8.8) só é válida se a capacidade calorífica C não variar com a temperatura entre T_i e T_f .

8.6.2 Significado do conceito de entropia

A entropia de um sistema mede o grau de desordem desse sistema. O calor (energia) fornecido ao sistema aumenta o seu grau de desordem. Podemos perceber o que significa desordem através do seguinte exemplo:

Consideremos um gás ideal clássico. Se a sua energia for zero então as moléculas estão paradas, caso contrário teriam energia cinética. O sistema como um todo pode tomar diversas configurações possíveis que correspondem a escolher em que ponto do espaço se encontra cada molécula. Se fornecermos energia ao gás (calor) então essa energia será energia cinética a ser distribuída pelas moléculas (que entram em movimento). Assim, além de escolher a posição no espaço de cada molécula, a energia pode ser repartida de muitas maneiras diferentes pelas moléculas. Por exemplo, pode a energia estar toda numa só molécula

enquanto as outras todas ficam paradas. Ou pode a energia ser dada apenas a 2 moléculas ficando todas as outras paradas. Ou pode ser dado um bocadinho de energia a cada molécula...mais energia a umas e menos a outras... Há muitas maneiras de o calor fornecido ao gás ser repartido pelas moléculas! Dizemos que com o calor o gás ficou mais desordenado porque lhe ficaram acessíveis muitos mais estados microscópicos.

8.7 Leis da Termodinâmica

8.7.1 Enunciado das Leis da Termodinâmica

1. A energia total do universo mantém-se constante.
2. A entropia do universo tende a aumentar e nunca diminui. Isto é, um processo que ocorre espontaneamente provoca um aumento da entropia do universo.
3. Lei zero da Termodinâmica: A entropia de um corpo a $T=0$ K é igual a zero.

8.7.2 Demonstração de que o calor passa do corpo mais quente para o mais frio

Iremos agora aplicar as leis acima enunciadas para provar que o calor passa dos corpos mais quentes para os mais frios quando postos em contacto. Consideremos um sistema constituído por dois corpos A e B em contacto, estando o conjunto isolado do exterior. Suponhamos ainda que $T_A > T_B$. Nestas condições haverá uma certa quantidade de calor Q que começa a ser transferida de um para o outro. Suponhamos esse calor Q é tão pequeno que ainda não chega a provocar variação significativa da temperatura de nenhum dos corpos. Consideramos duas situações:

1. *O calor vai de A para B:*

Se assim for, a variação da entropia de A é $\Delta S_A = -\frac{Q}{T_A}$ e a variação da entropia de B é $\Delta S_B = \frac{Q}{T_B}$, logo a variação de entropia do sistema é

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = Q\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right) > 0.$$

2. *O calor vai de B para A:*

Se assim for, a variação da entropia de A é $\Delta S_A = \frac{Q}{T_A}$ e a variação da entropia de B é $\Delta S_B = -\frac{Q}{T_B}$, logo a variação de entropia do sistema é

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = Q\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right) < 0.$$

A segunda lei da termodinâmica diz que a entropia aumenta quando um processo ocorre espontaneamente. Logo o que se verifica é a situação (1), isto é, o calor passou do mais quente para o mais frio. A situação (2) é impossível.

Note que tanto em (1) como em (2) dissémos que se um corpo perde Q o outro ganha igual quantidade de calor Q , estando a ser aplicada a primeira lei da Termodinâmica, segundo a qual a energia total tem de ser conservada pois não pode ser criada nem destruída.

8.7.3 Cálculo da temperatura final de equilíbrio dos dois corpos

Passado algum tempo A e B ficarão à mesma temperatura T . Para calcular T utilizamos a primeira lei. A energia perdida por A é igual à energia recebida por B, estando o sistema A+B isolado do exterior.

A variação da energia de A é ΔE_A e a de B é ΔE_B com

$$\Delta E_A = C_A(T - T_A),$$

$$\Delta E_B = C_B(T - T_B).$$

Escrevendo a condição $\Delta E_A + \Delta E_B = 0$ e resolvendo em ordem a T vem

$$T = \frac{C_A}{C_A + C_B}T_A + \frac{C_B}{C_A + C_B}T_B.$$

8.8 Exercícios

1. Calcule a quantidade de calor necessária para fundir 10% de um *iceberg* de 200.000 ton.
2. Calcule o calor que se deve fornecer a 25g de gelo (a 0°C) para que no final obtenha água a uma temperatura de 40°C. ($L_f = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$). Exprima o resultado em Joules.
3. Forneceu-se 500 cal a 300 g de gelo que estavam a 0°C. O que se obteve no fim?
4. Qual dos processos será mais eficaz para areefecer 1 litro de água que se encontra a 70°C? a) juntar meio litro de água da torneira a 10°C; b) juntar 100 g de gelo a 0°C.
5. O calor de vaporização da água à pressão atmosférica normal é de $22,56 \times 10^5 \text{ J/Kg}$. A capacidade térmica mássica do gelo é de $2,1 \text{ kJ Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Calcule a energia que é necessário fornecer a 1Kg de gelo inicialmente a -5°C para o vaporizar completamente.
6. Um fio foi aquecido desde uma temperatura de 20 até 30 graus Celsius. O seu comprimento aumentou de 10cm para 10,0004cm. Calcule o coeficiente de expansão linear.
7. Um corpo A tem capacidade calorífica de 17J/K e está a uma temperatura de 30°C. Um outro corpo B tem capacidade calorífica de 4J/K e está a uma temperatura de 10°C. Se os dois corpos forem colocados em contacto, qual a temperatura final de equilíbrio do conjunto? Qual foi a variação de entropia total?
8. Um corpo tem capacidade calorífica de 15 J/K e outro tem capacidade calorífica de 10 J/K. Qual é a capacidade calorífica do conjunto formado pelos dois corpos?
9. Mostre que um corpo com temperatura absoluta $T < 0$ é mais "quente" do que qualquer outro corpo com temperatura positiva qualquer.
10. Uma chávena contém 130 cm^3 de café à temperatura de 80 °C. De quantos graus baixa a temperatura do café após a adição de 12 de gelo a 0°C?
11. Um copo com 200 g de leite aqueceu demais, ficando a 70°C. Qual a quantidade de leite a 10°C que se deve fornecer para que se obtenha, no fim, leite à temperatura de 50°C ?

12. Num estabelecimento produz-se chá gelado misturando 500 g de chá quente com igual massa de gelo a 0°C . Calcular a temperatura final do conjunto se o chá estiver inicialmente a (a) 90°C ; (b) 70°C .
13. Uma cabana de madeira de pinho tem a forma de um cubo com arestas de 10 metros. As paredes e tecto têm espessura de 20 cm. Um aquecedor de potência 1kW mantém a temperatura constante dentro da cabana. Calcule a diferença entre a temperatura interior e a temperatura exterior à cabana.
14. Suponha que uma das paredes da cabana do problema anterior agora é de vidro e tem 2 cm de espessura. Calcule a diferença entre a temperatura interior e a temperatura exterior à cabana.
15. Calcule a condutividade térmica de uma janela de vidro duplo que seja constituída por dois vidros de espessura 0,5 cm, separados por uma camada de ar de espessura 1 cm. Pode resolver o problema por etapas. Escreva equações impondo que:
 - (a) o calor por unidade de tempo que atravessa o primeiro vidro é igual ao que atravessa a camada de ar e igual ao que atravessa o segundo vidro;
 - (b) a variação de temperatura total é a soma das variações de temperatura nos dois vidros e na camada de ar;
 - (c) a espessura total da janela é a soma das espessuras dos vidros e da camada de ar.
 - (d) Relacione o calor que atravessa a janela (alinea (a)) com a condutividade da janela k_{jan} , a sua espessura total e a diferença total de temperatura dos dois lados da janela.
 - (e) Usando a alinea (a), obtenha as quedas de temperatura nos vidros e na camada de ar e substitua-os na alinea (d). Resolva em ordem a k_{jan} e calcule o seu valor.
16. Suponha que uma das paredes da cabana é feita do vidro duplo do problema anterior. Calcule novamente a diferença de temperaturas entre o interior e o exterior.
17. Durante um dia de Verão a areia da praia fica mais quente do que a água, mas à noite a situação inverte-se. Porquê?
18. O portão (metálico) de uma quinta está gelado nas manhãs frias de Inverno. Parece mais gelado do que outros objectos de madeira e pedra que se encontram por perto. No Verão é ao contrário: o portão parece mais do quente do que os outros objectos. Explique.
19. Uma sala tem dimensões $4\text{m} \times 4\text{m} \times 3\text{m}$ e está inicialmente á temperatura de 17°C . As paredes absorvem pouca radiação e estão bem isoladas. Duas alunas vão trabalhar para a sala e cada uma leva um computador portátil. Cada aluna mais o respectivo computador emite 100 W. A capacidade térmica do ar é de 1000J/Kg/K e a sua densidade é de $1,2\text{ Kg/m}^3$. a) Ao fim de meia hora qual foi a energia emitida pelas alunas e computadores? b) Qual a temperatura da sala ao fim de meia hora supondo que apenas 80% da energia emitida pelas alunas e computadores aquece o ar da sala?

Tema 9

Deformações elásticas

9.1 Tipos de deformações

Um corpo pode sofrer uma deformação quando forças actuam sobre ele. Se essa deformação se mantiver mesmo depois de cessar a actuação da força, diz-se que sofreu uma deformação plástica; caso contrário, a deformação foi elástica.

9.2 Coeficientes elásticos

9.2.1 Módulo de Young, Y

Consideremos uma barra com comprimento inicial L . Se ela for esticada (ou comprimida) longitudinalmente por acção de forças de módulo F , ocorre uma variação do comprimento, ΔL . O módulo de Young, Y , define-se pela relação:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}, \quad (9.1)$$

onde A denota a área de secção da barra onde actua a força.

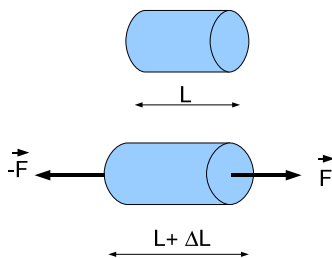


Figura 9.1: Uma deformação longitudinal está relacionada com o módulo de Young.

9.2.2 Coeficiente de Poisson, σ

Enquanto a mesma barra se deforma longitudinalmente, também ocorre uma variação da sua largura, ΔD . Por exemplo, se a barra for esticada, então a sua largura encolhe. O coeficiente de Poisson, σ , é definido por:

$$\sigma = \left| \frac{\Delta D}{\Delta L} \right|. \quad (9.2)$$

9.2.3 Módulo de rigidez, μ

Consideremos uma barra, de comprimento L , sujeita a tensões de corte, em sentidos opostos, nas suas extremidades. Então irá ocorrer uma deformação, Δx , transversal à mesma. O módulo de rigidez, μ , define-se pela relação:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta x}{L}, \quad (9.3)$$

onde A denota a área de secção da barra onde actua a força.

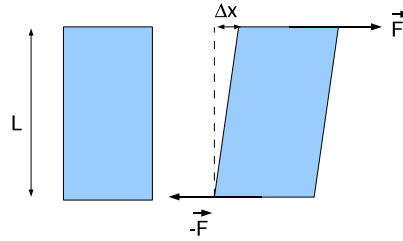


Figura 9.2: Uma deformação transversal relacionada com o módulo de rigidez.

9.2.4 Módulo de compressibilidade

Um objecto de volume inicial V_o é comprimido por uma pressão. Nas aplicações correntes, essa pressão será o excesso em relação à pressão atmosférica, Δp . O volume do objecto sofre uma variação ΔV . O módulo de compressibilidade, κ , define-se pela relação:

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_o}, \quad (9.4)$$

9.2.5 Relação entre coeficientes elásticos

Existe a seguinte relação entre os coeficientes elásticos, válida para a maioria dos sólidos:

$$Y = 3\kappa(1 - 2\sigma) \quad (9.5)$$

A seguinte tabela fornece constantes elásticas (a multiplicar por 10^{11}Nm^{-2}) para alguns materiais:

Material	Y	κ	μ
Alumínio	0,70	0,61	0,24
Cobre	1,25	1,31	0,46
Aço	2,0	1,13	0,80
Ferro	2,06	1,13	0,82

Tabela 9.1: Constantes elásticas (a multiplicar por 10^{11}Nm^{-2})

9.3 Exercícios

1. Uma barra de aço de comprimento 10cm tem área de secção quadrada de área 2cm^2 . Ela vai ser esticada por acção de uma força de 100 N.
 - (a) Determine o comprimento final da barra.
 - (b) Determine a largura final da barra.
2. Suponha agora que a barra vai estar sujeita a uma tensão de corte de 100.000Nm^{-2} . Determine a deformação transversal, Δx , da barra.
3. Um cubo de 1m^3 de ferro é levado para 100 metros abaixo da superfície do mar. Determine a variação do seu volume.
4. Usando a tabela 9.1, determine o coeficiente de Poisson para o alumínio.