UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação

Processos Estocásticos I — Exame de Recurso

30 de Janeiro de 2006

Docente: Dulce Gomes

1. Diga o que entende:

   (i) por um Processo de Markov homegéneo.

   (ii) no âmbito das cadeias de Markov, por probabilidade de absorção.

2. O Sr. X possui uma empresa cujas finanças anuais podem encontrar-se num dos seguintes estados: 1-falência; 2 - quase-falência; 3 - solvência. A matriz de probabilidades de transição associada à cadeia que modela o estado financeiro anual da referida empresa é

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

   (a) Classifique os estados da cadeia;

   (b) Obtenha uma expressão geral para $f_{00}(n)$;

   (b) Determine as probabilidades a longo prazo, $\pi_{ij} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$, $\forall i, j \in S$.

3. Considere que se distribuem N bolas pretas e N bolas brancas por duas urnas, U_1 e U_2, ficando cada uma das urnas com N bolas cada. Diz-se que o sistema está no estado i se a urna U_1 contiver i bolas brancas. Em cada instante de tempo tiramos uma bola da urna U_1 e outra da urna U_2 e troca-mo-las. Seja X_n o estado do sistema depois da n-ésima troca.

   (a) Determine a matriz de probabilidades de transição elementares;

   (b) Classifique os estados da cadeia.

4. Seja X_n, $n \geq 0$, um processo de Galton-Watson que nos dá o número de indivíduos do sexo feminino de uma população, na geração n. Cada indivíduo do sexo feminino deixa, na geração seguinte, 0, 1 ou 2 descendentes, em que $p_0 = P[\xi_{nr} = 0] = 1 - 2\alpha$ e $p_1 = P[\xi_{nr} = 0] = \alpha$, onde ξ_{nr} representa o número de descendentes do r-ésimo indivíduo na n-ésima geração $(0 \leq \alpha \leq 1/2)$.

   Seja $T_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ o número total de indivíduos do sexo feminino nascidos até à geração n (inclusive), em que $X_0 = 1$. Determine:

   (a) Os valores de α para os quais a extinção da população é *certa*;

   (b) A probabilidade da população feminina se reduzir a um indivíduo na 1ª geração;

   (c) O valor esperado da v.a. T_n.

5. Uma fábrica de automóveis produz, em média, 1000 carros por mês (26 dias úteis e 8 horas de trabalho diário), sendo o número de carros produzidos bem modelado por um processo de Poisson.

   (a) Sabendo que na primeira quinzena do mês de Setembro foram produzidos 400 carros, quantos carros, em média, serão produzidos na segunda quinzena?
   (b) Qual o número médio de dias necessários para a produção de 50 veículos?
   (c) Se em média fossem necessários 2 dias para construir 60 veículos, qual a probabilidade de nas últimas duas horas de trabalho laboral serem produzidos, no máximo, 4 carros?

6. Suponha que se está a considerar apenas as fêmeas de uma certa espécie animal muito rara e designe por $\{X(t), t \geq 0\}$ o número de fêmeas da população no instante t. Suponha ainda que os nascimentos de fêmeas ocorrem com intervalos de tempo independentes e de duração exponencial. O número de nascimentos é proporcional ao tamanho da população, com uma constante de proporcionalidade de 2/ano. Sabe-se ainda que no início do programa de observação a população tinha apenas uma fêmea e até ao final do programa, que durou 20 anos, nenhuma fêmea morreu.

   (a) Mostre que $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de nascimento puro. Escreva o diagrama de velocidade de transição entre estados explicitando as taxas de nascimento e escreva o sistema de equações diferenço-diferenciais para este processo.
   (b) será que se está perante um processo explosivo?
   (c) Qual é o número médio de fêmeas que nasceram nos primeiros 5 anos?

7. Um supermercado de bairro possui 3 caixas registadoras. Contudo, o gerente definiu que o número de caixas abertas depende do número de clientes no supermercado, adoptando a seguinte regra:

   - Entre 1 a 3 clientes (inclusive) no supermercado — 1 caixa aberta;
   - De 4 a 6 clientes (inclusive) no supermercado — 2 caixas abertas;
   - 7 ou mais clientes no supermercado — 3 caixas abertas.

   Estudos efectuados levaram a concluir que a Taxa de Chegada, com distribuição de Poisson, é de 10 clientes/hora e que o Tempo de Atendimento, com distribuição exponencial, é de 12 minutos/cliente.

   (a) Identifique as taxas de natalidade λ_n, $n \geq 0$ e de mortalidade μ_n, $n \geq 1$.
   (b) Determine a distribuição de probabilidade do Número de Clientes no supermercado, em situação de equilíbrio.
   (c) Calcule a probabilidade de apenas se encontrar uma caixa aberta.
   (d) Calcule o número esperado de caixas fechadas.

   Nota: Mesmo que não tenha resolvido a alínea (b), enuncie como calcularia as alíneas (c) e (d).