

Mestrado em Matemática e Aplicações
Mestrado em Modelação Estatística e Análise de Dados
Programa de Doutoramento em Matemática

Modelos Matemáticos em Biologia
Semestre ímpar 2009/2010
TRABALHO PARA CASA nº 2

- 1) Considere um modelo de pescas com crescimento natural de Gompertz e com uma política de pesca de esforço constante

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K} \right) - eN,$$

onde $N=N(t)$ representa o tamanho da população no instante $t \geq 0$, $r > 0$ é um parâmetro de crescimento, K é a capacidade de sustento do meio e o parâmetro e representa o esforço de pesca.

- a) Determine os pontos de equilíbrio e estude a sua estabilidade, bem como a taxa de captura correspondente.
 - b) Obtenha a solução explícita da equação diferencial para a condição inicial $N(0)=N_0$ com $0 < N_0 < K$. Sugestão: Use $X = \ln N$.
 - c) Determine qual o “maximum sustainable yield” (taxa máxima de capturas), o esforço de pesca associado em situação sustentada e a população de equilíbrio correspondente.
 - d) Determine (serve implicitamente) o “maximum economic yield” (taxa de capturas de lucro máximo no modelo com preço unitário constante do peixe e com custo unitário constante do esforço de pesca) e o esforço associado em situação sustentada.
 - e) Determine a taxa de capturas e o esforço associados ao equilíbrio bioeconómico (correspondente a um lucro nulo no modelo com preço unitário constante do peixe e com custo unitário constante do esforço de pesca), bem como a população de equilíbrio correspondente.
 - f) Compare as populações de equilíbrio obtidas nas alíneas c) e d) com as populações de equilíbrio correspondentes ao “maximum economic yield” e ao equilíbrio bioeconómico do modelo de Gordon-Schaeffer.
- 2) Considere a população feminina da Inglaterra e País de Gales em 1961 dividida em grupos etários de 15 anos (grupo 1: idades 0 a 14, grupo 2: idades 15-29, grupo 3: idades 30-44). Não consideramos os grupos etários seguintes por terem fertilidades praticamente nulas. O bloco da matriz de Leslie correspondente a estes três grupos etários é:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,3391 & 0,8425 & 0,1308 \\ 0,9942 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9875 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Determine os valores e vectores próprios (normalizados) associados a $\mathbf{M}$. Embora uma solução directa seja possível no cálculo dos valores próprios (há uma fórmula resolvente para as equações cúbicas) poderá, se o desejar, usar métodos de análise numérica (bissecção, métodos de tangente ou de secante, por exemplo) nesse cálculo. Obtidos os valores próprios (basta com quatro casas decimais), os vectores próprios obtêm-se por cálculo directo.
- b) Determine o valor reprodutivo dos diferentes grupos etários.
- c) Determine a estrutura etária da população estável.
- d) A estrutura etária da população feminina em 1961 era:

grupo 1 (0-14 anos):	21,7%
grupo 2 (15-29 anos):	18,5%
grupo 3 (30-44 anos):	19,5%
outros grupos (45 anos ou mais):	40,3%.

Compare-a com a estrutura etária da população estável.

Usando $\mathbf{M}$, determine a estrutura etária em 1976 (uma unidade de tempo de 15 anos depois). Será que está mais próxima da estrutura etária da população estável?

- 3) Numa amostra de indivíduos da população portuguesa [A. Lessa e C. Braumann, Tempo Médico: V. III, Nº 18: 1014-1021 (1978)] para determinação do grupo sanguíneo *ABO* (um locus com 3 alelos *A*, *B* e *O*, sendo *A* e *B* ambos dominantes sobre *O*), observou-se a seguinte distribuição:

	GRUPO SANGUÍNEO (GENÓTIPO)			
	<i>A</i> (<i>AA</i> e <i>AO</i>)	<i>B</i> (<i>BB</i> e <i>BO</i>)	<i>AB</i> (<i>AB</i>)	<i>O</i> (<i>OO</i>)
Número de indivíduos	2536	442	172	2280

Admita que o equilíbrio de Hardy-Weinberg se verifica nesta amostra (o que provavelmente não estará longe da verdade). Determine as frequências dos três alelos e os valores esperados do nº de indivíduos dos diversos grupos sanguíneos. Compare estes valores observados com os esperados e teste (teste qui-quadrado) para diferenças ao nível de significância de 5%.

- 4) a) Designando por *a* o alelo da anemia falciforme e por *A* a variante normal, considere uma região livre de malária e admita que as viabilidades dos genótipos *AA* e *Aa* são idênticas e que a viabilidade do genótipo *aa* é nula. Admitindo que, devido a forte emigração de regiões sujeitas a malária, emigração que entretanto cessou (não há, portanto, que considerá-la no modelo), a frequência de indivíduos nascidos com genótipo *aa* é de 0,005. Determine o número aproximado de gerações para que a frequência de nascidos com o genótipo *aa* passe para 0,001.
- b) Num outro país sujeito a malária, a frequência estabilizada do alelo *a* é de 15%. Admitindo que a viabilidade do genótipo *aa* é nula, determine a viabilidade relativa dos outros genótipos.
- 5) Considere um locus com dois alelos *A* e *a* sujeito a selecção com viabilidades relativas $W_{AA} = W_{Aa} > W_{aa}$ e sujeito também a mutação, apenas no sentido de *A* para *a* e com taxa μ . Obtenha um modelo aproximado para descrever esta situação e estude os seus equilíbrios e estabilidade, indicando o resultado final deste processo de evolução.