

Mestrado em Matemática e Aplicações
Mestrado em Modelação Estatística e Análise de Dados
Programa de Doutoramento em Matemática

Modelos Matemáticos em Biologia
Semestre ímpar 2009/2010
TRABALHO PARA CASA nº 1

- 1) Considere o seguinte modelo de crescimento de uma população em tempo discreto

$$N_{n+1} = \frac{\alpha N_n}{1 + N_n / \beta},$$

onde N_n representa o tamanho da população na geração n ($n=0,1,2,\dots$), $\alpha > 1$, $\beta > 0$ e o tamanho de cada geração é $\delta > 0$.

- Quais as dimensões físicas de α , β e δ ?
 - Determine os pontos de equilíbrio e estude a sua estabilidade (local).
 - Obtenha uma solução explícita (expressão explícita para N_n em termos de N_0) e determine o seu limite quando $n \rightarrow +\infty$.
 - Pondo $\alpha = 1 + r\delta$, mostre que, quando $\delta \rightarrow 0$, se obtém o modelo logístico e determine a taxa intrínseca de crescimento e a capacidade do sustento do meio do modelo limite. Assim, o modelo atrás considerado pode considerar-se como uma das versões em tempo discreto do modelo logístico.
- 2) Considere os seguintes valores, obtidos por censo, da população portuguesa residente no continente e ilhas em milhões de habitantes:

i	t_i	Ano civil	População $N(t_i)$ (em milhões de habitantes)
1	0	1890	5,102891
2	10	1900	5,446760
3	21	1911	5,999146
4	40	1930	6,808719
5	50	1940	7,755423
6	60	1950	8,510240

Considere o modelo malthusiano de crescimento populacional $Y(t) = Y(0) + r t$, com $Y(t) = \ln N(t)$.

- Faça um ajustamento dos parâmetros aos dados $Y(t_i)$ ($i=1,2,3,4,5,6$) pelo método dos mínimos quadrados (regressão linear).
 - Determine o valor previsto por regressão para a população em 1991. Compare com o valor observado da população no censo de 2001, que foi de 10,356117 milhões de habitantes e comente.
- 3) Considere o seguinte modelo para o crescimento da população sujeita a emigração:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{EN}{A + N},$$

onde $N=N(t)$ é o tamanho da população no instante $t \geq 0$ e onde r , K , E e A são parâmetros positivos. O segundo termo do lado direito da equação representa a emigração.

- a) Interprete o termo de emigração, particularmente no caso de populações pequenas e de populações grandes.
 - b) Determine os pontos de equilíbrio e discuta a sua estabilidade. Infira sobre o comportamento assintótico da população.
- 4) Estude o processo de nascimento e morte simples com imigração (a taxa constante e independente do tamanho da população).
- 5) Considere o modelo de Gompertz de crescimento de uma população

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K} \right), \quad N(0) = N_0 > 0 \quad (*)$$

onde $N=N(t)$ representa o tamanho da população no instante $t \geq 0$, $r > 0$ é um parâmetro de crescimento e $K > N_0$ é a capacidade de sustento do meio. Suponha que há flutuações aleatórias do meio que perturbam o parâmetro r por um ruído colorido, que aproximaremos por um ruído branco $\sigma \varepsilon(t)$, onde $\varepsilon(t)$ é um ruído branco padrão e $\sigma > 0$ mede a intensidade das flutuações. Ficamos com um modelo descrito pela equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$(S) \quad \frac{dN}{dt} = (r + \sigma \varepsilon(t)) N \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K} \right), \quad N(0) = N_0 > 0. \quad (**)$$

- a) Obtenha uma solução explícita $N_d(t)$ da equação (*) (modelo determinístico) e estude os equilíbrios e estabilidade de (*). Sugestão: Use $X = \ln N$.
- b) Obtenha uma solução explícita $N_e(t)$ da equação (**) (modelo estocástico). Sugestão: Use $X = \ln N$.
- c) Determine a distribuição de $X_e(t) = \ln N_e(t)$ e diga qual a probabilidade de extinção da população no modelo (**). Sugestão: Use a propriedade de que $\int f(s) dw(s)$ (integral de Ito or Stratonovich), onde $w(t)$ é o processo de Wiener padrão, tem, para $f(s)$ independente do acaso, distribuição normal com média 0 e variância $\int f^2(s) ds$.
- d) Determine a distribuição assintótica de $X_e(t)$ (isto é, a distribuição limite para que tende a distribuição de $X_e(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$) e determine a sua média, desvio-padrão e coeficiente de variação.
- e) Calcule a moda, a média, o desvio-padrão e coeficiente de variação de $N_e(t)$.
- f) Compare o comportamento do modelo determinístico e do modelo estocástico.