Trabalho para casa nº 2
Data entrega: dia 25 de Junho de 2010 na aula (se não puder vir à aula, ponha no cacifo do docente ou envie ficheiro por e-mail)

Cálculo Financeiro Avançado
Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações
Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações Biológicas

1. Determine a média e a variância de $X_t = \int_0^t s\exp(-W_s)dW_s$.

2. Mostre que
$\int_0^t \exp(-W_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t s\exp(-W_s)ds - t\exp(-W_t) = \int_0^t s\exp(-W_s)dW_s$.
Sugestão: Aplique o teorema de Itô a $Y_t = t\exp(-W_t)$.

3. Seja $Y_t = tW_t$. Determine dY_t e aproveite o resultado para mostrar que
$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$.

4. Mostre que a equação $dY(t) = Y(t)dW(t)$ com $Y(0) = 1$ tem solução
$Y(t) = \exp(W(t) - t/2)$ para t≥0.

5. Considere o modelo de Black-Scholes
$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$
$$X(0)=x_0=5{,}30\ €$$
com r=0,04/ano e σ^2=0,02/ano.

   a) Determine P[X(10 anos)>8,00 €].
   b) Simule 100 trajectórias de $X(t)$ para t no intervalo [0, 10] anos e veja quantas delas verificam a propriedade de X(10 anos)>8,00 €.
   c) Determine P[X(10 anos)>8,00 € | X(9 anos)=7,50 €, X(5 anos)=4,83€].

6. A equação diferencial estocástica
$$dX(t) = rX(t)(\ln K - \ln X(t))dt + \sigma X(t)dW(t)$$
$$X(0)=x_0>0,$$
com r, σ, K >0 é muito utilizada para modelar o crescimento de populações em ambiente aleatório com recursos limitados. Note-se que o modelo determinístico (que se obtém quando σ=0) é o conhecido modelo de Gompertz, convergindo o tamanho da população para um valor de equilíbrio K quando $t\to+\infty$. Este mesmo modelo, embora com uma parametrização diferente, é utilizado para taxas de juro a curto prazo (modelo de Black-Berman-Toy).

   a) Resolva explicitamente a equação.
   b) Determine a distribuição transiente de $Z(t)$=ln $X(t)$.
   c) Determine a distribuição estacionária de Z=ln X.

Exercícios suplementares

Nota: Os exercícios assinalados com * são de grau de dificuldade mais elevada (só recomendados a estudantes com boa formação matemática)

6. * Para decomposições $0=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nn}=t$ (n=1,2,…) de [0,t] com diâmetro a tender para 0, mostre que $\sum_{k=1}^{n} W(t_{nk})\left(W(t_{nk})-W(t_{n,k-1})\right) \xrightarrow[m.q.]{} \frac{1}{2}\left(W^2(t)+t\right)$.

7. * Mostre que a classe das funções em escada de $H_2[0,t]$ é um subespaço vectorial de $H_2[0,t]$.

8. * Mostre que, dadas quaisquer funções G_n (n=1,2,…) de $H_2[0,t]$ convergentes para $G\in H_2[0,t]$ na norma deste espaço, vem $\int_0^t G_n(s)dW(s) \xrightarrow[m.q.]{} \int_0^t G(s)dW(s)$.

9. * Mostre que, se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são processos de Itô e $Y(t)=X_1(t)X_2(t)$, então $dY(t)=X_1(t)dX_2(t)+X_2(t)dX_1(t)+(dX_1(t))(dX_2(t))$.

10. Considere o modelo de Black-Scholes

$$dX(t)=rX(t)dt+\sigma X(t)dW(t)$$
$$X(0)=x_0=5{,}30\text{ €}$$

com r=0,04/ano e σ^2=0,02/ano.

a) Simule 2 trajectórias.
b) Suponha que não conhecia r e σ^2 e que os seus dados reais eram uma dessas trajectórias. Determine um intervalo de confiança a 95% para $R=r-\sigma^2/2$ e $V=\sigma^2$. [Se o trabalho de aplicação for sobre dados reais e estimação destes parâmetros, não se justifica fazer este exercício, pois seria repetitivo].
c) PARA FAZER MAIS TARDE. Determine $P[T_{4\text{ €}}<T_{6\text{ €}}]$, onde T_a é o tempo de primeira passagem de $X(t)$ por a.