Trabalho para casa nº 1
Data entrega: dia 14 de Maio de 2010 na aula (se não puder vir à aula, ponha no cacifo do docente ou envie ficheiro por e-mail)

Cálculo Financeiro Avançado

Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações

Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações Biológicas

Nota: Alguns exercícios exigem conhecimentos a serem ministrados na aula de 30 de Abril.

1. Mostre que $\mathrm{COV}[W(s),W(t)]=\min(s,t)$.
2. Determine:
   a) $P[W(2{,}7)>1{,}5]$
   b) $P[-1{,}5\leq W(2{,}7)<1{,}5]$.
3. Determine:
   a) $P[W(2{,}7)<1{,}5 \mid W(1{,}8)=1]$
   b) $P[-1{,}5\leq W(2{,}7)<1{,}5 \mid W(1{,}8)=1]$.
4. Determine, para $0<u<s<t$:
   a) $E[W(t) \mid W(s), W(u)]$
   b) $\mathrm{VAR}[W(t) \mid W(s), W(u)]$ com $0<u<s<t$.
5. Determine:
   a) $P[W(2{,}7)>1{,}5 \mid W(1{,}8)=1, W(0{,}5)= -2]$
   b) $E[W(2{,}7) \mid W(1{,}8)=1, W(0{,}5)= -2]$.
6. Determine:
   a) $P[W(1{,}8)=1 \mid W(2{,}7)<1{,}5]$
   b) $P[W(2{,}7)=1{,}5 , W(1{,}8)>1]$
   c) $P[W(2{,}7)<1{,}5 , W(1{,}8)=1]$.
7. Determine:
   a) $P[-1<W(2{,}7)-W(1{,}8)<1{,}4$ e $0{,}5<W(1{,}6)-W(0{,}9)<1{,}5]$
   b) $P[-1<W(2{,}7)-W(1{,}8)<1{,}4 \mid W(1{,}6)-W(0{,}9)=1{,}5]$
8. Determine $E[W(2{,}7) \mid \mathcal{M}_{1,8}]$, onde $\mathcal{M}_t$ é a filtração natural do processo de Wiener $W(t)$.
9. Mostre que $Y(t)=W(t+s)-W(s)$ é, para s fixo, um processo de Wiener padrão.
10. Seja $\mathcal{M}_t$ a filtração natural do processo de Wiener $W(t)$. Mostre que $H(t)=W^2(t)-t$ é uma martingala- $\mathcal{M}_t$.
11. Simule duas trajectórias de $W(t)$ para t no intervalo $[0,10]$. Apresente o gráfico com as duas trajectórias e indique o algoritmo usado.
12. Mostre que $X(t)=x_0+\sigma W(t)$, com x_0 e $\sigma>0$ constantes (processo de Wiener não-padrão) é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência 0 e coeficiente de difusão σ^2.

NOTA: Na página seguinte tem alguns exercícios suplementares que **não** fazem parte do Trabalho para casa, pelo que não devem ser incluídos nesse trabalho (nada impede, claro, que os resolva fora do âmbito do Trabalho para casa).

Exercícios suplementares sobre o processo de Wiener

Nota: Os exercícios assinalados com * são de grau de dificuldade mais elevada (só recomendados a estudantes com boa formação matemática)

13. Mostre que $Z(t)=x_0+\mu t+\sigma W(t)$, com x_0, μ e $\sigma>0$ constantes (movimento browniano com tendência) é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência μ e coeficiente de difusão σ^2.
14. *Determine $P[W(2,7)<1,5\ ,\ W(1,8)>1]$.
15. *Considere um passeio aleatório $X(t)$ ($t\geq 0$) cuja posição inicial é $X(0)=0$ e que, em cada intervalo de tempo $\Delta t>0$, se pode mover com igual probabilidade (1/2) para a direita ou para a esquerda, sendo a amplitude do movimento $\Delta x=c(\Delta t)^{1/2}$. Seja
$$Y_i=\begin{cases} 1 & \text{se o movimento for para a direita no passo nº } i \\ -1 & \text{se o movimento for para a esquerda no passo nº } i \end{cases}$$
Vem $X(t)=(\Delta x)(Y_1+...+Y_{\mathrm{INT}(t/\Delta t)})$. Suponhamos que os Y_i são independentes.
Mostre que $E[X(t)]=0$ e $VAR[X(t)]= (\Delta x)^2(\mathrm{INT}(t/\Delta t))^2$. Faça $\Delta t\to 0$ e mostre que $VAR[X(t)]\to c^2 t$.
O processo $X^*(t)$ que se obtém quando $\Delta t\to 0$ (e de que $X(t)$ será uma boa aproximação quando Δt é pequeno) tem distribuição normal e incrementos independentes estacionários. De facto, $X^*(t)=cW(t)$.
16. * Como $W(t)$ tem trajectórias q.c. contínuas, existe q.c. o máximo $X(t)=\max\limits_{0\leq u\leq t} W(u)$.
Determine a f.d. de $X(t)$. *Sugestão*: Há uma relação entre o acontecimento $[X(t)\geq a]$ e um acontecimento relativo a T_a.