<u>Exercícios (seria o Trabalho para casa nº 3, mas que não é exigido como TPC)</u>

Cálculo Financeiro Avançado
Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações

1. Considere o modelo de Black-Scholes
$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$
$$X(0)=x_0=5{,}10\ €$$
com r=0,05/ano e σ^2=0,025/ano. Determine P[$T_{4,00€}<T_{6,20€}$], onde T_a é o tempo de primeira passagem de $X(t)$ por a.

2. Considere o modelo de Vasicek para a taxa de juro a curto prazo
$$dX(t) = -\alpha\big(X(t) - R\big)dt + \sigma\ dW(t)$$
$X(0)=x_0=0{,}03$ (subentende-se "ao ano")
com α=0,1/ano, σ^2=0,01/ano e R=0,04 .

   a) Determine P[X(0,5 anos)>0,035].
   b) Determine P[X(0,5 anos)>0,035 | X(0,25 anos)=0,028].
   c) Determine, em regime estacionário, a probabilidade de a taxa de juro ser superior a 0,035.
   d) Aplique o teorema de Girsanov de modo a que $X(t)$ seja uma martingala com respeito à nova probabilidade P*, isto é, $dX(t) = \sigma\ dW^*(t)$, onde $W^*(t)$ é processo de Wiener relativamente a P*. Determine a expressão de $W^*(t)$ em termos de $W(t)$ e a expressão de dP*/dP.

3. Considere o modelo de Cox-Ingersoll-Ross para a taxa de juro a curto prazo
$$dX(t) = -\alpha\big(X(t) - R\big)dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t)$$
$$X(0)=x_0>0$$
com α, σ, R >0. Determine em que condições as fronteiras 0 e $+\infty$ são ambas não-atractivas. Nessas condições, determine, se existir, a densidade estacionária.

4. Considere uma opção europeia de compra sobre uma acção com data de exercício daqui a 90 dias e suponha válido o modelo de Black-Scholes e o princípio da não-arbitragem. Seja, usando as notações das aulas, S_0=5,21€ (cotação actual da acção), K=7,00€ (valor de exercício), μ=3% ao ano (taxa instantânea de rendimento do investimento sem risco) e σ^2=0,039/ano (quadrado da volatilidade).

   a) Qual o custo de opção C_0 no instante 0? Qual é a estratégia hedging nesse instante?
   b) Se, daqui a t=30 dias, a cotação da acção for de 5,70€, qual deve ser o custo C_t da opção e qual a estratégia hedging nesse instante?
   c) Se aumentar o valor de K, o custo C_0 aumenta ou diminui? Justifique.

5. Considere uma opção europeia de venda sobre uma acção com data de exercício daqui a 90 dias e suponha válido o modelo de Black-Scholes e o princípio da não-arbitragem. Seja, usando as notações das aulas, S_0=5,21€ (cotação actual da acção), K=6,00€ (valor de exercício), μ=4,79% ao ano e σ^2=0,039/ano (quadrado da volatilidade).

   a) Qual o custo de opção P_0 no instante 0? Qual é a estratégia de cobertura nesse instante?
   b) Se, daqui a t=30 dias, a cotação da acção for de 5,70€, qual deve ser o custo P_t da opção e qual a estratégia hedging nesse instante?
   c) Determine o "grego" $\Delta_P = \partial P_0 / \partial S_0$. Se aumentar o valor de S_0, o custo P_0 aumenta ou diminui?
   d) Se aumentar o valor de K, o custo P_0 aumenta ou diminui? Justifique.
   e) Se a opção fosse americana em vez de europeia, será que haveria alteração nas respostas às alíneas anteriores?