ESTATÍSTICA com ACASO e NECESSIDADE

Actas do XI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística

Editores

Paulo M. M. Rodrigues

Efigénio da Luz Rebelo

Fernando Rosado

Estatística com Acaso e Necessidade

Actas do XI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística

Faro, 24 a 27 de Setembro de 2003

Editores

Paulo M. M. Rodrigues
Efigénio L. Rebelo
Fernando Rosado

Setembro 2004
Edições SPE

© 2004, Sociedade Portuguesa de Estatística

Editores: Paulo M. M. Rodrigues, Efigénio L. Rebelo e Fernando Rosado

Título: *Estatística com Acaso e Necessidade*

Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística

ISBN: 972-8890-01-X

Concepção gráfica da capa: Susy A. Rodrigues/Faculdade de Economia
Universidade do Algarve

Produção gráfica e Impressão: Serviços Gráficos da Universidade do Algarve

Tiragem: 500 exemplares

Depósito legal: nº213268/04

Modelo de Black-Scholes com taxas de rendimento variáveis com o dia da semana

Claudia Patrício
Universidade de Évora

Carlos A. Braumann
CIMA-UE (Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora)

Resumo: O modelo de Black-Scholes para a cotação de uma acção utiliza o movimento browniano geométrico com taxa de rendimento e volatilidades fixas. Vários autores têm apontado para o efeito do dia da semana na cotação das acções. Nós modelámos esse efeito considerando que cada dia da semana tem uma taxa de rendimento própria. Obtivemos os estimadores dos parâmetros e as suas propriedades assintóticas e aplicámos a dados da cotação de acções do BCP (valores de fecho diários) no período de 1992.01.02 a 1999.12.30. Utilizámos ainda um teste assintótico e um teste exacto tipo ANOVA para testar a hipótese nula de que as taxas de rendimento dos diferentes dias da semana não diferem entre si. Apresentamos também métodos de previsão.

Palavras–chave: Cotação de acções, Movimento browniano geométrico, Taxas de rendimento variáveis, Estimação, Testes, Previsão

Abstract: The Black-Scholes model for stock prices uses geometric brownian motion with fixed return rate and fixed volatility. Several authors have pointed out the effect of the week day on stock prices. We have modelled such effect by assuming that each week day has its own return rate. We have obtained the parameter estimators and their asymptotic properties and have applied the results to daily closure stock prices of the BCP bank for the period January 2, 1992 to December 30, 1999. We have also used an asymptotic test and an ANOVA-like exact test to test the null hypothesis that the return rates of different week days do not differ. Prediction methods are considered too.

Keywords: Stock prices, Geometric brownian motion, Variable return rates, Estimation, Testing, Prediction

MSC2000: 91B70, 60H10, 62M05, 62M02, 62M20.

1 Introdução e modelos

O modelo de Black-Scholes (ver [1]) para descrever o comportamento da cotação $X = X(t)$ de uma acção na bolsa é caracterizado pela equação diferencial estocástica

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \tag{1}$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener padrão e os parâmetros r e $\sigma > 0$ representam, respectivamente, a taxa ("média" instantânea) de rendimento e a volatilidade (medida da intensidade das flutuações aleatórias do mercado).

A solução de (1) recorrendo ao cálculo de Ito (ver [4] e [8]) é o que designamos por movimento browniano geométrico e o seu logaritmo é dado por:

$$\ln X(t) = \ln X_0 + Rt + \sigma W(t) \qquad \text{com} \qquad R = r - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{2}$$

Adoptando para unidade de tempo o intervalo entre observações do processo, sejam $t_k = k$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ os instantes de observação. Podemos trabalhar com o modelo em tempo discreto, a que chamaremos **modelo 1**:

$$\ln X(k) = \ln X(0) + Rk + \sigma W(k) = \ln X(0) + \sum_{i=1}^{k} R + \sigma W(k). \tag{3}$$

Vamos aplicar este modelo, em que a taxa de rendimento e a volatilidade são fixas, a dados da cotação diária de fecho de acções do BCP (Banco Comercial Português) no período de 1992.01.02 (dia correspondente a $k = 0$) a 1999.09.30 (dia correspondente a $k = n = 1899$). A unidade de tempo é o dia e só contamos os dias em que se realizam transacções, sendo assim sempre de um dia o intervalo de tempo entre observações consecutivas.

Com o objectivo de estudar o efeito (apontado por vários autores) do dia da semana nas cotações, consideramos um modelo análogo ao modelo 1, mas em que cada dia de transacção passa a ter uma taxa de rendimento que depende do dia da semana. Neste **modelo 2**, trabalhamos também com o tempo discretizado $t_k = k$ mas vamos supor que a taxa de rendimento R, em lugar de ser fixa, depende do dia da semana. Seja $K(i)$ o dia da semana correspondente ao dia i; por exemplo, se o dia i corresponde a uma 2.ª feira, vem $K(i) = 2$. Teremos então taxas de rendimento R_d $(d = 2, 3, 4, 5, 6)$, sendo $R_{K(i)}$ a taxa de rendimento do dia i. O modelo 2, que vamos aplicar aos mesmos dados, toma assim a forma

$$\ln X(k) = \ln X(0) + \sum_{i=1}^{k} R_{K(i)} + \sigma W(k) = \ln X(0) + \sum_{d=2}^{6} \sum_{\substack{i=1 \\ K(i)=d}}^{k} R_d + \sigma W(k). \tag{4}$$

Na Secção 2 referiremos a estimação de parâmetros do modelo 1 (segundo métodos que se podem ver em [1] e [2]) e obteremos os estimadores de máxima verosimilhança e suas propriedades assintóticas para o modelo 2. Na Secção 3 iremos testar a hipótese nula de que as taxas de rendimento dos diferentes dias da semana não diferem entre si. Para tal, usaremos um teste assintótico de razão de verosimilhanças e um teste exacto tipo ANOVA desenvolvido em [3]. Na Secção 4 desenvolveremos métodos de previsão a médio prazo e passo a passo para os modelos 1 e 2 e aplicá-los-emos à previsão da cotação diária de fecho das acções do BCP para o período de 1999.10.01 a 1999.12.30. A Secção 5 conterá as conclusões.

2 Estimação de parâmetros

Suporemos $X(0)$ conhecido e poremos $V = \sigma^2$. Por comodidade, iremos trabalhar com os logaritmos das observações $Y_k = \ln X(k)$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$.

2.1 Modelo 1

Os parâmetros deste modelo são V e R. De (3) vem

$$Y_k = Y_{k-1} + R + \sqrt{V}(W(k) - W(k-1)). \tag{5}$$

Logo, Y_k condicionada a Y_{k-1} é normal de média $Y_{k-1} + R$ e variância V pois Y_{k-1} é independente de $W(k) - W(k-1)$.

Usando o facto de $X(t)$ e, portanto, Y_k serem de Markov, obtém-se facilmente a função de log-verosimilhança:

$$L(R, V|Y_1, ..., Y_n) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln V - \frac{1}{2V}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Y_{k-1} - R)^2. \tag{6}$$

Obtemos os estimadores de máxima verosimilhança (MV), $\hat{R}$ e $\hat{V}$, que são os valores que maximizam a função $L(R, V|Y_1, ...Y_n)$:

$$\begin{cases} \hat{R} = \frac{Y_n - Y_0}{n} \\ \hat{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Y_{k-1} - \hat{R})^2 \end{cases} \tag{7}$$

A matriz de informação de Fisher é

$$Inf = \begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 L(R,V)}{\partial R^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 L(R,V)}{\partial R \partial V}\right] \\ -E\left[\frac{\partial^2 L(R,V)}{\partial V \partial R}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 L(R,V)}{\partial V^2}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{V} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2V^2} \end{bmatrix}.$$

Invertendo esta matriz obtemos a matriz de variância-covariância assintótica (ver [5] e [7]) dos estimadores de máxima verosimilhança

$$Inf^{-1} = \begin{bmatrix} V/n & 0 \\ 0 & 2V^2/n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Var[\hat{R}] & Cov[\hat{R}, \hat{V}] \\ Cov[\hat{R}, \hat{V}] & Var[\hat{V}] \end{bmatrix}.$$

Desta forma, podemos obter intervalos de confiança aproximados para $\hat{R}$ e $\hat{V}$ com o nível de confiança $1 - \alpha$:

$$\hat{R} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}/n} \tag{8}$$

$$\hat{V} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{2\hat{V}^2/n}, \tag{9}$$

onde z_q representa o quantil de ordem q da distribuição normal reduzida.

Aplicando aos dados das acções do BCP (cotações diárias de fecho) no período de 1992.01.02 a 1999.09.30, obtemos, utilizando (7), $\hat{R} = 0,0003821$/dia (ou equivalentemente $0,09359$/ano) e $\hat{V} = 0,0002528$/dia (ou $0,06194$/ano). O ano a que nos referimos é o ano transacionável. Assim, as taxas anuais foram obtidas das diárias multiplicando-as pelo número de dias do ano em que se realizaram transacções. A partir destes estimadores e de (8) e (??) facilmente determinamos intervalos de confiança aproximados a 95% para R e V. O intervalo de confiança aproximado obtido para V foi [0,0002367/dia; 0,0002689/dia], enquanto que o exacto (baseado no facto provado em [2] de $n\hat{V}/V$ ter exactamente distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade) foi [0,0002376/dia; 0,0002699/dia]. O intervalo de confiança a 95% aproximado para R obtido foi [−0,0003330/dia; 0,0010972/dia], enquanto que o exacto (baseado no facto provado em [2] de $(\hat{R}-R)\sqrt{(n-1)/\hat{V}}$ ter exactamente distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade) foi [−0,0003336/dia; 0,0010978/dia].

Verificamos que os intervalos de confiança baseados na aproximação assintótica são quase exactos, o que era de esperar atendendo ao tamanho da amostra. Isso dá-nos confiança para utilizar a aproximação assintótica que iremos desenvolver para o modelo 2. Note-se que a precisão (medida pela semiamplitude do intervalo de confiança) da estimativa de R é muito fraca (só melhoraria se a volatilidade fosse menor e/ou o período de observação fosse maior), mas já V é estimado com boa precisão (pois temos um elevado número de observações).

Uma vez que zero está no intervalo de confiança, concluímos, pela dualidade dos testes de hipóteses, que R não é significativamente diferente de 0 (ao nível de significância de 5%).

2.2 Modelo 2

Os parâmetros deste modelo são V e R_d $(d = 2,3,4,5,6)$. De (4) vem

$$Y_k = Y_{k-1} + R_{K(k)} + \sqrt{V}(W(k) - W(k-1)). \tag{10}$$

Logo, Y_k condicionada a Y_{k-1} é normal de média $Y_{k-1} + R_{K(k)}$ e variância V. A função de log-verosimilhança é dada por

$$\begin{aligned} &L(R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, V | Y_1, ...Y_n) \\ &\quad = -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{n}{2}\ln V - \tfrac{1}{2V}\sum_{d=2}^{6}\sum_{\substack{k=1 \\ K(k)=d}}^{n}(Y_k - Y_{k-1} - R_d)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Os estimadores MV são agora:

$$\begin{cases} \hat{R}_d = \frac{1}{n_d}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ K(k)=d}}^{n}(Y_k - Y_{k-1}) \qquad (d = 2,3,4,5,6) \\ \bar{V} = \frac{1}{n}\sum\limits_{d=2}^{6}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ K(k)=d}}^{n}(Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_d)^2, \end{cases} \tag{12}$$

onde n_d é o número de dias observados cujo dia da semana é d (número de elementos do conjunto $\{k \in \{1, 2, ..., n\} : K(k) = d\}$).

A matriz de informação de Fisher pode ser obtida, verificando-se que é diagonal, logo facilmente invertível. A matriz de variância-covariância assintótica dos estimadores MV é a inversa da matriz de informação:

$$Inf^{-1} = \begin{bmatrix} V/n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V/n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V/n_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V/n_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V/n_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2V^2/n \end{bmatrix}.$$

A partir dela podem então obter-se intervalos de confiança aproximados para R_d $(d = 2, 3, 4, 5, 6)$ e V:

$$\hat{R}_d \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{V/n_d} \tag{13}$$

$$\bar{V} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{2V^2/n}. \tag{14}$$

Aplicando o modelo 2 aos dados atrás referidos do BCP, obtivemos, através de (12), (13) e (14):

Estimadores	Intervalos de confiança a 95%
$\hat{R}_2 = 0,0009548/\text{dia} = 0,23393/\text{ano}$	$[-0,0006450; 0,0025546]/\text{dia}$
$\hat{R}_3 = 0,0004573/\text{dia} = 0,11204/\text{ano}$	$[-0,0011425; 0,0020571]/\text{dia}$
$\hat{R}_4 = 0,0008460/\text{dia} = 0,20727/\text{ano}$	$[-0,0007351; 0,0024271]/\text{dia}$
$\hat{R}_5 = 0,0001709/\text{dia} = 0,04187/\text{ano}$	$[-0,0014352; 0,0017770]/\text{dia}$
$\hat{R}_6 = -0,0005361/\text{dia} = -0,13134/\text{ano}$	$[-0,0021400; 0,0010679]/\text{dia}$
$\bar{V} = 0,0002525/\text{dia} = 0,06186/\text{ano}$	$[0,0002364; 0,0002685]/\text{dia}$

3 Testes de comparação das taxas de rendimento

Para o modelo 2 é possível realizar **testes de comparação dos** $R's$. Assim, podemos testar a hipótese nula de $R_d = R_{d^*}$ para quaisquer d e d^* com $d \neq d^*$ por um clássico teste de comparação de médias. Com efeito, dada a independência entre $\hat{R}_2, ..., \hat{R}_6$ e a normalidade assintótica destes estimadores, podemos usar a estatística de teste

$$Z_{(d,d^*)} = \frac{R_d - R_{d^*}}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{n_d} + \frac{\bar{V}}{n_{d^*}}}}, \tag{15}$$

cuja distribuição é assintoticamente normal reduzida.

Fizemos esses testes para os dados do BCP já mencionados e os valores obtidos para $Z_{(d,d^*)}$ com $d \neq d^*$ e $d, d^* = 2, ..., 6$ ficaram todos no intervalo entre valores críticos $(-1,96;\ 1,96)$. Assim, para cada par de índices d e d^* com $d \neq d^*$, aceita-se a hipótese nula de ser $R_d = R_{d^*}$ ao nível de significância de 5%. Note-se, porém, que estes testes não são independentes entre si. Imaginemos que comparamos R_2 com R_3 e R_3 com R_4; ao compararmos R_2 com R_4, o resultado deste teste já não será independente dos resultados anteriores. De facto, só 4 dos 10 testes possíveis é que são independentes. Assim, não faz muito sentido utilizar simultaneamente estes 10 testes partindo do princípio que o nível de significância se mantém. Nesse caso, é preferível fazer um teste de comparação múltipla baseado no teorema de Scheffée (ver, por exemplo, [6], pg. 53-54), o que é (assintoticamente) possível pois a matriz de variância-covariância assintótica de $(\tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{R}_4, \tilde{R}_5, \tilde{R}_6)$ é da forma $V\mathbf{C}$ com a matriz $\mathbf{C}$ conhecida ($C_{ii} = 1/n_i$ e $C_{ij} = 0$ para $i \neq j$). Como este teste é mais conservativo, as hipóteses nulas de não haver diferenças significativas entre cada um dos 10 pares sob comparação seriam igualmente aceitas.

Podemos também obter intervalos de confiança aproximados com nível de confiança $1 - \alpha$ para as diferenças $R_d - R_{d^*}$ com $d \neq d^*$, que serão da forma $\hat{R}_d - \hat{R}_{d^*} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{V}}{n_d} + \frac{\bar{V}}{n_{d^*}}}$. Como os n_d $(d = 2, 3, 4, 5, 6)$ pouco diferem entre si, o mesmo sucede à semiamplitude destes intervalos, que anda à volta de $0,00226$. Também estes intervalos de confiança não são independentes e, por isso, não faz muito sentido considerá-los simultaneamente pensando que se mantém o nível de confiança. Para os considerar simultaneamente será então preferível utilizar o teorema de Scheffée (ver, por exemplo, [6], pg. 53-54); os intervalos de confiança simultâneos para todas as 10 diferenças $R_d - R_{d^*}$ obtidos desta forma têm semiamplitude naturalmente superior, aproximadamente igual a $0,00385$.

Em vez de compararmos os $R's$ dois a dois, podemos compará-los globalmente testando a hipótese nula $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6$. Para isso, notemos que o modelo 1 é um caso particular do modelo 2 que se obtém precisamente quando esta hipótese nula é verdadeira. Então, testar a referida hipótese nula pode fazer-se através de um **teste de razão de verosimilhanças** (ver [5]) para a comparação dos modelos 1 e 2. A estatística de teste será $T = 2L(\hat{R}_2, ..., \hat{R}_6, \bar{V}|Y_1, ...Y_n) - 2L(\hat{R}, \hat{V}|Y_1, ...Y_n)]$ e seguirá assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com 4 graus de liberdade (diferença entre o número de parâmetros do segundo e do primeiro modelo).

De (6), (7), (11) e (12) vem

$$L(\hat{R}, \hat{V}|Y_1, ...Y_n) = -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{n}{2}\ln\hat{V} - \tfrac{n}{2}$$
$$L(\hat{R}_2, ..., \hat{R}_6, \bar{V}|Y_1, ...Y_n) = -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{n}{2}\ln\bar{V} - \tfrac{n}{2},$$

pelo que

$$T = n\ln\left(\hat{V}/\bar{V}\right). \tag{16}$$

No caso dos dados do BCP, obtém-se $T = 2,1555$ e, como o valor crítico da distribuição qui-quadrado com 4 graus de liberdade para o nível de significância de 5% é 9,4877, a hipótese nula de igualdade conjunta de todos os $R's$ é aceita a esse nível de significância. O modelo 2 reduz-se então ao modelo 1.

Este é um teste assintótico que, dado o elevado número de observações, é quase exacto. Podíamos também realizar um teste exacto tipo ANOVA desenvolvido em [3]. A variação total de cada um dos modelos é dada por

$$VT_1 = n\hat{V}$$
$$VT_2 = n\bar{V}$$

(respectivamente, a variação total e a variação dentro dos grupos) e a variação explicada pelos dias da semana (variação entre os grupos) é

$$VEDS = VT_1 - VT_2.$$

No caso de a hipótese nula de igualdade de todos os $R's$ ser verdadeira, $VEDS$ e VT_2 são independentes e têm distribuição qui-quadrado com 4 e $n-5$ graus de liberdade, respectivamente, pelo que a estatística de teste

$$F = \frac{VEDS/4}{VT2/(n-5)}$$

tem distribuição F com $(4,\ n-5)$ graus de liberdade (ver [3]).

No caso dos dados do BCP, obtivemos $F = 0,5378$ e o valor crítico da distribuição F com $(4,\ n-5)$ graus de liberdade é 2,3766 para o nível de significância de 5%; logo, aceitamos a hipótese nula.

4 Previsão

Nesta secção iremos tratar de previsões de cotações futuras e obter intervalos de confiança para esses valores. Para isso utilizamos dois tipos de previsão:

Previsão a médio prazo - Observa-se o processo Y_t até ao instante n, e prevê-se o valor do processo Y_t para diversos $t > n$.

Previsão passo a passo - Utilizam-se as observações $Y_0, Y_1, ..., Y_n$ para prever apenas Y_{n+1}. No dia $n+1$, conhecido já o verdadeiro valor de Y_{n+1}, usam-se as observações anteriores mais Y_{n+1} para prever Y_{n+2} e assim sucessivamente.

Método de Previsão:

O critério de minimização do erro quadrático médio daria como preditor de Y_t com $t > n$, conhecidos $Y_0, Y_1, ..., Y_n$,

$$\tilde{Y}_t = E[Y_t|Y_1, ..., Y_n] = E[Y_t|Y_n] = \begin{cases} Y_n + R(t-n) & \text{modelo 1} \\ Y_n + \sum_{k=n+1}^{t} R_{K(k)} & \text{modelo 2.} \end{cases}$$

Como desconhecemos R e $R_{K(k)}$, vamos usar os preditores

$$\hat{Y}_t = \begin{cases} Y_n + \hat{R}(t-n) & \text{modelo 1} \\ Y_n + \sum_{k=n+1}^{t} \hat{R}_{K(k)} & \text{modelo 2.} \end{cases} \tag{17}$$

O erro de previsão $\hat{Y}_t - Y_t$ tem distribuição normal com média 0 e variância $V(t-n)t/n$ ou $V\sum_{d=2}^{6}(m_d(m_d+n_d)/n_d)$, conforme se trate do modelo 1 ou do modelo 2. Aqui, m_d é o número de dias observados entre n e t cujo dia da semana é d (isto é, o número de elementos do conjunto $\{k \in \{n+1,...,t\} : K(k) = d\}$). Substituindo V por $\hat{V}$, obtemos para intervalos de confiança de previsão aproximados com nível de confiança $1-\alpha$

$$\begin{cases} \hat{Y}_t \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}(t-n)t/n} & \text{modelo 1} \\ \hat{Y}_t \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\sum_{d=2}^{6}(m_d(m_d+n_d)/n_d)} & \text{modelo 2.} \end{cases} \tag{18}$$

No caso da previsão passo a passo, o mesmo método dá, para a predição de Y_{m+1} conhecidos $Y_0, Y_1, ..., Y_m$, os preditores

$$\breve{Y}_{m+1} = \begin{cases} Y_m + \hat{R} & \text{modelo 1} \\ Y_m + \hat{R}_{K(m+1)} & \text{modelo 2.} \end{cases} \tag{19}$$

e os intervalos de confiança de previsão aproximados para Y_{m+1}

$$\begin{cases} \breve{Y}_m \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{V}_m(1+1/m)} & \text{modelo 1} \\ \breve{Y}_m \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{V}_m(1+1/\bar{n}_{K(m+1)})} & \text{modelo 2,} \end{cases} \tag{20}$$

onde $\hat{V}_m$ e $\bar{V}_m$ são os estimadores MV de V, respectivamente para os modelos 1 e 2, mas usando na estimação todas as observações $Y_0, Y_1, ..., Y_m$, e onde $\bar{n}_d$ é o número de elementos do conjunto $\{k \in \{1,...,m\} : K(k) = d\}$).

Baseados nos estimadores obtidos dos parâmetros das acções do BCP (que utilizaram as observações de 1992.01.02 a 1999.09.30), fizemos previsões para o período de 1999.10.01 a 1999.12.30. A Figura 1 apresenta (na variável logaritmo da cotação) as previsões a médio prazo para o modelo 1. Nas previsões passo a passo (isto é, dia a dia) para o modelo 1, apresentadas na Figura 2, utilizamos os estimadores dos parâmetros baseados nas observações até ao dia m para prever o dia $m+1$. Não apresentamos as figuras correspondentes às previsões para o modelo 2 porque são praticamente indistinguíveis das correspondentes figuras para o modelo 1. As Figuras 3 e 4 apresentam, respectivamente para a previsão a médio prazo e passo a passo, os resíduos (diferenças entre o valor observado e o valor previsto dos logaritmos da cotação).

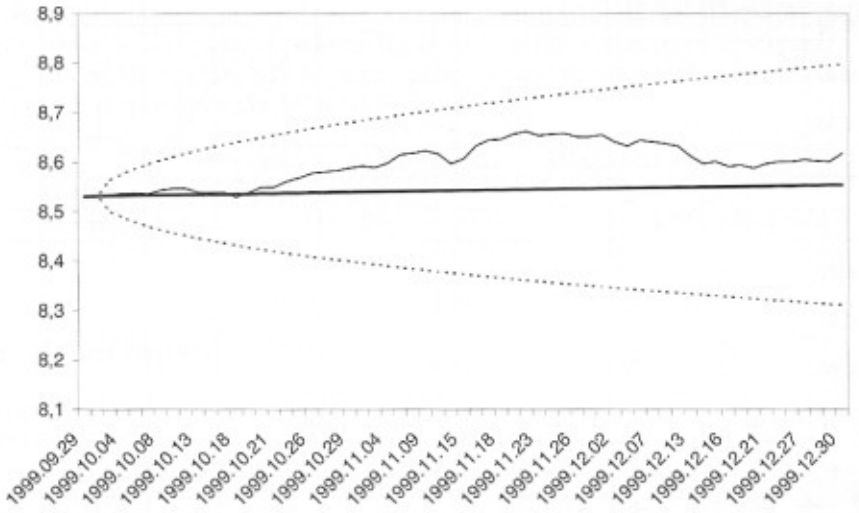

Figura 1: Previsão a médio prazo para o período 1999.10.01 a 1999.12.30, usando o modelo 1, de $\ln X_t$, onde X_t é a cotação das acções do BCP. O valor previsto está a traço grosso, o valor observado está a traço fino e os limites de confiança a 95% da previsão estão a tracejado.

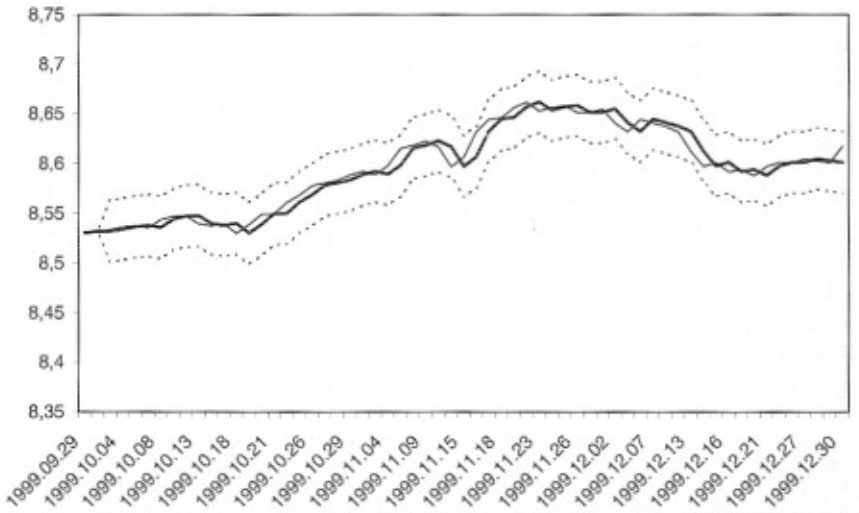

Figura 2: Previsão passo a passo para o período 1999.10.01 a 1999.12.30, usando o modelo 1, de $\ln X_t$, onde X_t é a cotação das acções do BCP. O valor previsto está a traço grosso, o valor observado está a traço fino e os limites de confiança a 95% da previsão estão a tracejado.

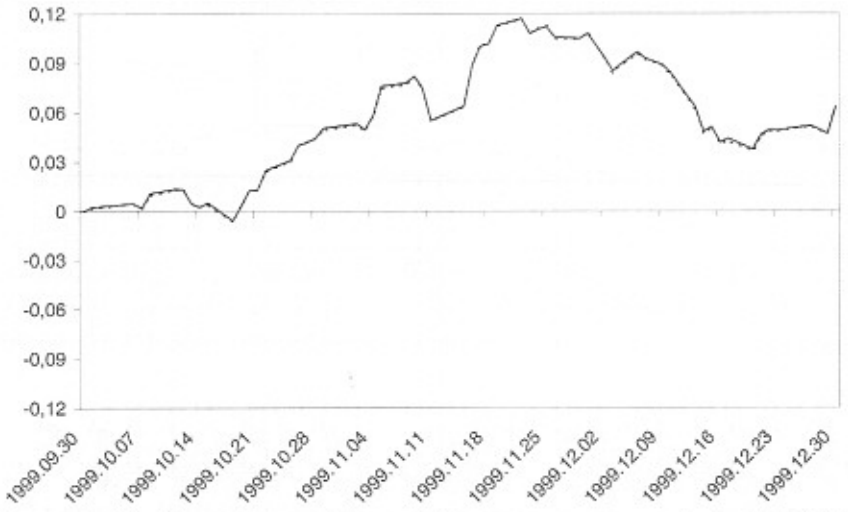

Figura 3: Resíduos da previsão a médio prazo para o período 1999.10.01 a 1999.12.30 de $\ln X_t$, onde X_t é a cotação das acções do BCP. Os resíduos do modelo 1 estão a tracejado e os do modelo 2 a cheio (são quase indistinguíveis).

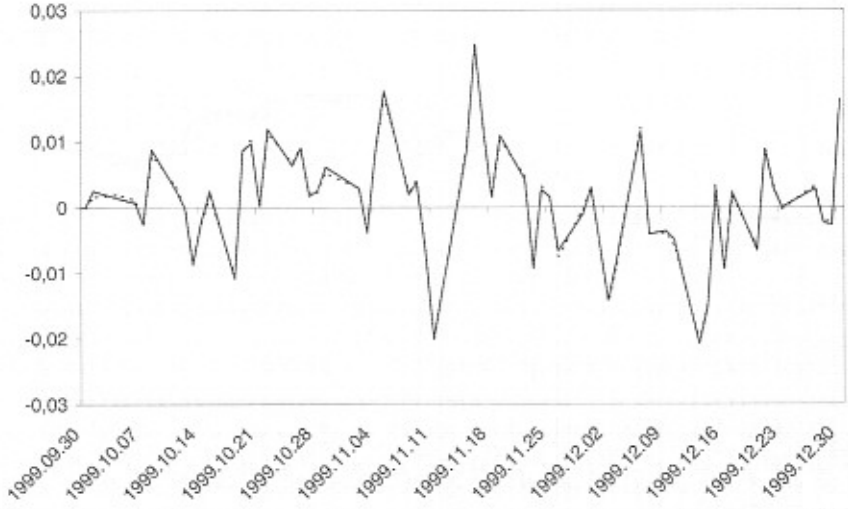

Figura 4: Resíduos da previsão passo a passo para o período 1999.10.01 a 1999.12.30 de $\ln X_t$, onde X_t é a cotação das acções do BCP. Os resíduos do modelo 1 estão a tracejado e os do modelo 2 a cheio (são quase indistinguíveis).

Observa-se (olhando para as Figuras 3 e 4) que, em termos de previsão, as diferenças entre os dois modelos são insignificantes. Já as diferenças entre a previsão a médio prazo e passo a passo são notórias, como era de esperar. Tais conclusões são sustentadas olhando para a soma dos quadrados dos resíduos ao longo de todo o período de previsão:

	Previsão a médio prazo	Previsão passo a passo
Modelo 1	0,2526	0,004353
Modelo 2	0,2560	0,004395

5 Conclusões

Para modelar a cotação diária de acções considerámos o modelo 1, o clássico modelo de Black-Scholes (movimento browniano geométrico) com taxas de rendimento "médias" diárias constantes, e um modelo alternativo, modelo 2, em que essas taxas dependiam do dia da semana, como é sugerido por vários autores. Obtivemos os estimadores MV e suas propriedades assintóticas para o modelo 2, o que nos permitiu obter intervalos de confiança aproximados para os respectivos parâmetros.

Aplicámos estes resultados, bem como os já conhecidos do modelo 1, às cotações de fecho diárias das acções do BCP. Usámos o período de 1992.01.02 a 1999.09.30 e vimos que a qualidade da estimação, medida pela semi-amplitude do intervalo de confiança, era boa no caso da volatilidade σ^2 (dado o elevado número de observações), mas não no caso das taxas de rendimento (dada a volatilidade elevada e o curto período total de observação). Por comodidade, trabalhámos com as taxas de rendimento "ajustadas" $R = r - \sigma^2/2$ (ou $R_d = r_d - \sigma^2/2$) em vez de r (ou r_d). Vimos que os estimadores das taxas de rendimento diárias não diferem significativamente de zero. Também não existem diferenças significativas entre os R_d $(d = 2, 3, 4, 5, 6)$ tomados dois a dois.

Para testar globalmente a igualdade entre os R_d $(d = 2, 3, 4, 5, 6)$, propusemos um teste assintótico de razão de verosimilhanças que compara os modelos 1 e 2. No caso dos dados do BCP, concluímos pela aceitação da hipótese nula, pelo que não se detectou um efeito do dia da semana na taxa de rendimento. O mesmo se concluía aplicando um teste exacto desenvolvido em [3]. Como o modelo 2 não é significativamente melhor que o modelo 1, o princípio da parcimónia levar-nos-á a optar por este último (modelo tradicional).

Obtivemos ainda, para o modelo 2, intervalos de confiança de previsão aproximados para a previsão a médio prazo e para a previsão passo a passo.

Aplicámos estes resultados, bem como os já conhecidos do modelo 1, à previsão das cotações das acções do BCP para o período de 1999.10.01 a 1999.12.30. Dado ter um horizonte temporal de apenas um dia, a previsão passo a passo está mais próxima dos valores reais do que a previsão a médio prazo. As diferenças entre as previsões dos modelos 1 e 2 são insignificantes.

Agradecimentos. Este trabalho integra-se, no que ao segundo autor se refere, no CIMA-UE, centro de investigação financiado pelo Programa de Financiamento Plurianual da FCT (no âmbito do FEDER).

Agradecemos também a um árbitro anónimo uma sugestão útil.

Bibliografia

[1] Braumann, C. A (1998). *O acaso, a bolsa e a vida.* Em *Estatística: a unidade na diversidade* (M. Souto de Miranda e I. Pereira, eds.), p. 29-55. Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, Lisboa.

[2] Braumann, C. A. (1999). *Estimação de parâmetros para uma ou várias trajectórias do movimento browniano geométrico.* Em *Afirmar a Estatística: um desafio para o século XXI* (C. D. Paulino, A. Pires e Ferreira da Cunha, eds.), p. 149-156. Ediçoes SPE, Lisboa.

[3] Braumann, C. A. (2003). *Inferência estatística para o movimento browniano geométrico com coeficiente de tendência sazonal de período múltiplo do período de observação.* Em *Actas do XI Congresso Anual da SPE.*

[4] Karlin, S., Taylor, H. M. (1981). *A first course in Stochastic Processes* (second edition). Academic Press, New York.

[5] Kendall ,M.G., Stuart, A. (1968). *The advanced theory of Statistics, Vol. II* (third edition). Charles Griffin, London.

[6] Mexia, J.T. (1995). *Introdução à inferência estatística linear.* Edições Universitárias Lusófonas, Lisboa.

[7] Mood, A. M., Graybill, F. A., Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of Statistics* (third edition). Mc Graw-Hill, Auckland.

[8] Øksendal, B. (1998). *Stochastic differential equations. An introduction with applications* (fifth edition). Springer-Verlag, Berlin.