

AFFIRMAR A ESTATÍSTICA:

Um desafio para o século XXI

Actas do VI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística
Tomar, 9 a 12 de Junho de 1998

Editores:
Carlos Daniel Paulino
António Pacheco
Ana Pires
Ferreira da Cunha

Edições SPE

Prefácio

Proseguindo a prática salutar de publicação das actas dos congressos da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), a Comissão Organizadora do VI Congresso Anual da SPE decidiu contribuir para a organização sistemática dessa actividade através da proposta de uma política editorial mais precisa quanto ao conteúdo e à forma dos textos a submeter.

Uma reflexão sobre a dimensão quantitativa e qualitativa da comunidade estatística portuguesa e o papel das actas dos congressos da SPE como expressão pública de parte da produção relevante dessa comunidade permitiu-nos reunir ideias que enformassem uma política editorial orientadora dos autores de potenciais textos e dos avaliadores do material submetido (vide Boletim Informativo 2/98 da SPE).

Indícios de uma triagem na origem do material a submeter e de uma certa uniformidade, impossível de conseguir em pleno, na atitude final dos avaliadores fazem-nos crer que caminhámos na direcção certa quando propusemos uma delimitação com base científica do material publicável. A experiência acumulada sugere-nos que este caminho deve ser prosseguido e aperfeiçoado para que não restem dúvidas sobre a seriedade profissional e científica desta publicação de produção estatística portuguesa na sua própria língua.

Nessa direcção, há que estabelecer normas precisas de processamento dos artigos a submeter para publicação nas actas, cujo desrespeito pelos autores não deve ser permitido, de modo a assegurar a qualidade técnica dos textos a par da libertação dos editores das actas para as actividades de carácter científico ligadas ao processo de edição. É nossa convicção que a adopção reiterada desta prática acabará por vencer as resistências que venham a ser oferecidas sob quaisquer pretextos.

Ao pautarem a sua intervenção segundo as linhas orientadoras supracitadas, os editores creem firmemente que estão a contribuir seriamente para que este tipo de publicações possa também ser um meio eficaz de afirmar a área profissional e científica em que todos nós actuamos.

Nun momento em que se desenrola o findar de um milénio sem que na sociedade portuguesa a Estatística tenha ocupado a posição no plano profissional e científico que lhe compete, cremos dever ser a afirmação da Estatística o grande desafio da comunidade estatística portuguesa para o próximo século. É a expressão deste desejo de mudança estatisticamente significativa no olhar da Estatística,

AFIRMAR A ESTATÍSTICA: Um desafio para o século XXI

que escolhemos para intitular as Actas do VI Congresso Anual da SPE, publicadas no limiar do século XXI.

© 1999, Sociedade Portuguesa de Estatística

Editores: C.D. Paulino, A. Pacheco, A. Pires e Ferreira da Cunha

Afirmar a Estatística: Um desafio para o século XXI

Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística

ISBN: 972-673-362-6

Concepção gráfica da capa: Jacinto Gonçalves

Fotolitos da capa: Mirasete- Artes Gráficas, Lda

Produção gráfica da capa: Fomento Gráfico-Artes Gráficas, Lda

Impressão: INE

Tiragem: 250 exemplares

Depósito legal n.º 140540/99

Estimação dos parâmetros para uma ou várias trajetórias do movimento browniano geométrico

Carlos A. Braumann

CIMA-UE (Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora)

Sumário: A solução da equação diferencial estocástica $dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dw(t)$, onde $w(t)$ é um processo de Wiener padião, é o chamado movimento browniano geométrico. Este modelo é utilizado, por exemplo, para descrever a evolução de uma população malthusiana em ambiente aleatório ou da cotação de uma acção (ou outro investimento financeiro com risco).

Apresentamos aqui um método de estimação de α e de σ baseado em uma ou em várias trajetórias do processo, obtendo-se intervalos de confiança exactos (não apenas assintóticos). Dele decorre directamente uma técnica, inspirada na análise de variância, para comparação de valores de α útil para detectar alterações de regime numa acção ou para comparar acções diferentes ou diferentes condições ambientais em organismos vivos.

Palavras-chave: Estimação de parâmetros, movimento browniano geométrico, modelo de Black-Scholes, crescimento malthusiano em ambiente aleatório.

Abstract: The solution of the stochastic differential equation $dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dw(t)$, where $w(t)$ is a standard Wiener process, is the so called geometric brownian motion. This model is used, for instance, to describe the evolution of a malthusian population in a random environment or the value of a stock (or other risky financial investment).

We present a method to estimate α and σ based on one or several trajectories of the process and obtain exact (instead of just asymptotic) confidence intervals. A direct consequence of the method is a technique, inspired on the analysis of variance, for the comparison of α values, which is useful to detect trend shifts in stocks or to compare different stocks or different environmental conditions in living populations.

Keywords: Parameter estimation, geometric Brownian motion, Black-Scholes model, Malthusian growth in random environments.

AMS Classification: 60H10, 62M05, 92D25, 90A09, 62M02, 62M20.

1 Introdução

O modelo de Black-Scholes para a cotação $X=X(t)$ de uma acção (ou de outro investimento com risco) na bolsa é

$$\frac{dX}{dt} = (\alpha + \sigma \varepsilon(t)) X(t)$$

ou, equivalentemente,

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dw(t), \tag{1}$$

onde α é a taxa ("média" instantânea) de rendimento, $\sigma^2 > 0$ a volatilidade (medida da intensidade das flutuações do mercado), $w(t)$ é um processo de Wiener padrão e $\sigma(t) = dw(t)/dt$ (derivada generalizada do processo de Wiener) é um ruído branco padrão. O processo estocástico $w(t) = w(t, \omega)$ [com $\omega \in \Omega$, onde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade completo] é um processo de Markov gaussiano, quase certamente contínuo e não-diferenciável e com incrementos independentes estacionários; $w(t)$ tem média 0 e variância t e a covariância entre $w(s)$ e $w(t)$ é $\min(s, t)$.

Pomos como condição inicial $X(0) = X_0 > 0$, valor que supomos dado.

O mesmo modelo pode ser utilizado para descrever a evolução do tamanho $X = X(t)$ de uma população malthusiana em ambiente aleatório. Agora, α é a taxa ("média" instantânea) de crescimento *per capita* e $\sigma^2 > 0$ mede a intensidade das flutuações aleatórias do ambiente. Naturalmente, existem outras utilizações do mesmo modelo.

A solução da equação diferencial estocástica (1) com a condição inicial referida é, usando o cálculo de Itô, dada por

$$\ln X(t) = \ln X_0 + rt + \sigma w(t), \quad (2)$$

com

$$r = \alpha - \sigma^2/2. \quad (3)$$

Este processo é usualmente designado por *movimento browniano geométrico*. Vê-se que $\ln X(t)$ tem distribuição normal com média $\ln X_0 + rt$ e com variância $\sigma^2 t$. A covariância entre $\ln X(s)$ e $\ln X(t)$ é $\sigma^2 \min(s, t)$.

Para mais pormenores sobre equações diferenciais estocásticas, pode o leitor consultar, por exemplo, Arnold [1], Øksendal [8] ou Braumann [6].

Notando que $E[\ln X(t)] = X_0 \exp(\alpha t)$ e que $\exp(E[\ln X(t)]) = X_0 \exp(rt)$, vemos que α representa uma taxa "média aritmética", enquanto r representa uma taxa "média" geométrica.

Suponhamos que, numa trajetória (isto é, para um ω fixo), observamos o valor do processo (cotação da acção ou tamanho da população no caso dos exemplos apresentados) em instantes

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n. \quad (4)$$

A observação contínua do processo não é, pelo menos em termos exactos, possível na prática. Para simplificar, vamos usar a notação

$$X_0 = X(t_0, \omega), X_1 = X(t_1, \omega), \dots, X_n = X(t_n, \omega). \quad (5)$$

Façamos uma mudança de variável

$$Y(t) = \ln X(t) - \ln X_0 \quad (6)$$

$$Y_0 = Y(t_0) = 0, Y_1 = Y(t_1), \dots, Y_n = Y(t_n). \quad (7)$$

Note-se que

$$Y(t) = rt + \sigma w(t). \quad (8)$$

Na secção 2 iremos apresentar um método de estimação dos parâmetros do modelo baseado nestas observações, com determinação da distribuição exacta (e não apenas assintótica) dos estimadores e consequente obtenção de intervalos de confiança exactos. Estes resultados já haviam sido obtidos (para modelos mais gerais) em Braumann [4, 5]. Apresentaremos também um exemplo numérico. Na secção 3 generalizamos o método para o caso de fazermos observações em várias trajetórias. Na secção 4 apresentaremos aplicações deste resultado a um método de comparação de valores de α inspirado na análise de variância, referindo as potencialidades da sua utilização em estudos de acções e no crescimento de culturas de seres vivos.

2 Estimação de parâmetros para uma trajetória

Suponhamos que, numa realização do processo, se fizeram, nos instantes (4), as observações (5) ou, equivalentemente, as observações (7) com que vamos trabalhar. Por comodidade, iremos estimar os parâmetros r e $V = \sigma^2$ (em vez de α e σ).

Para $k = 1, \dots, n$, vê-se que a distribuição de

$$Y_k = Y_{k-1} + r(t_k - t_{k-1}) + \sigma(w(t_k) - w(t_{k-1})) \quad (9)$$

dado Y_{k-1} é normal com média $Y_{k-1} + r(t_k - t_{k-1})$ e variância $V(t_k - t_{k-1})$ (pois Y_{k-1} é independente de $w(t_k) - w(t_{k-1})$). Como $Y(t)$ é um processo de Markov, vê-se que a função de log-verossimilhança é

$$\begin{aligned} L(r, V | Y_1, \dots, Y_n) &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi V(t_k - t_{k-1})}} \exp \left(-\frac{(Y_k - Y_{k-1} - r(t_k - t_{k-1}))^2}{2V(t_k - t_{k-1})} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi V) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(t_k - t_{k-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^n \frac{(Y_k - Y_{k-1} - r(t_k - t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Obtêm-se facilmente os estimadores de máxima verossimilhança (MV)

$$\hat{r} = Y_n / t_n \quad (11)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(Y_k - Y_{k-1} - \hat{r}(t_k - t_{k-1}))^2}{t_k - t_{k-1}}. \quad (12)$$

A matriz de informação $R = [r_{ij}]$ é dada por $r_{11} = -E[\partial^2 L / \partial r^2] = t_n / V$, $r_{12} = r_{21} = -E[\partial^2 L / \partial r \partial V] = 0$, $r_{22} = -E[\partial^2 L / \partial V^2] = n/(2V^2)$. A sua inversa $V = [v_{ij}]$ tem elementos $v_{11} = V/t_n$, $v_{12} = v_{21} = 0$, $v_{22} = 2V^2/n$. Claro que podíamos aplicar as propriedades assintóticas gerais dos estimadores MV para obter intervalos de confiança aproximados. Mas podemos fazer melhor e trabalhar com distribuições exactas.

Com efeito,

$$Z_1 = (\hat{f} - r) \sqrt{t_n} / \sigma = w(t_n) / \sqrt{t_n} \quad (13)$$

é variável aleatória (v.a.) normal reduzida e, portanto, $\hat{f}$ tem distribuição normal com média r e variância $v_{\hat{f}}$, pelo que é estimador centrado de variância mínima de r . Como $\hat{f} - r = \sigma w(t_n) / t_n \rightarrow 0$ quase certamente (q.c.) quando $t_n \rightarrow +\infty$, esta condição implica a consistência forte do estimador.

Note que as v.a.

$$H_k = (w(t_k) - w(t_{k-1})) / \sqrt{t_k - t_{k-1}} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (14)$$

são independentes identicamente distribuídas (i.i.d.) gaussianas reduzidas. Seja $\mathbf{H} = [H_1, H_2, \dots, H_n]^T$. Note que

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{t_n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{t_i - t_{i-1}} H_i. \quad (15)$$

Seja

$$Z_k = \sqrt{\frac{t_k - t_{k-1}}{t_k t_{k-1}}} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{t_i - t_{i-1}} H_i - \sqrt{\frac{t_{k-1}}{t_k}} H_k \quad (k = 2, \dots, n). \quad (16)$$

Note que $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]^T = \mathbf{A} \mathbf{H}$, com $\mathbf{A}$ ortogonal (isto é $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$). Logo os Z_k ($k=1, 2, \dots, n$) são v.a. i.i.d. gaussianas reduzidas. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{V}}{V} &= \sum_{k=1}^n H_k^2 - Z_1^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{H} - Z_1^2 = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z})^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}) - Z_1^2 \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z} - Z_1^2 = \sum_{k=2}^n Z_k^2 - Z_1^2 = \sum_{k=2}^n Z_k^2 \end{aligned} \quad (17)$$

tem distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade (gl) e é independente de Z_1 . Logo, $\hat{V}$ e $\hat{r}$ são independentes. A distribuição qui-quadrado obtida permite obter intervalos de confiança exatos para V . A independência referida mostra que

$$(\hat{f} - r) \sqrt{t_n} / \sqrt{\hat{V}}, \quad (18)$$

com

$$\tilde{V} = n\hat{V} / (n-1), \quad (19)$$

tem distribuição t de Student com $n-1$ gl, o que permite construir intervalos de confiança exatos para r . Claro que também podemos construir, da forma usual, testes de hipóteses exatos relativamente a V e a r . Das propriedades da distribuição qui-quadrado, vê-se que $\tilde{V}$ é estimador centrado de V com variância $2\hat{V}^2/(n-1)$. Também se vê que, quer $\tilde{V}$ quer $\hat{V}$ são fortemente consistentes quando $n \rightarrow +\infty$ pois, pela lei forte dos grandes números (ver, por exemplo, Fisz [7], p. 226).

$$\tilde{V}/V = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n Z_k^2 \rightarrow \mathbb{E}[Z_k^2] = 1 \text{ q.c.} \quad (20)$$

Como a função de log-verosimilhança se pode escrever na forma

$$L = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(t_k - t_{k-1}) - \frac{n}{2} \left\{ \ln V + \hat{V}/V + \frac{2(\hat{f} - r)^2 t_n}{V n} \right\} \quad (21)$$

concluímos que $\hat{f}$ e $\hat{V}$ são estatísticas suficientes.

Vamos aplicar os métodos anteriores às cotações na bolsa às quartas-feiras (para evitar efeitos sazonais dos dias da semana) de acções de um banco nacional no período 1984.01.01-1992.03.31 durante cerca de 9 anos (ver Fig. 1).

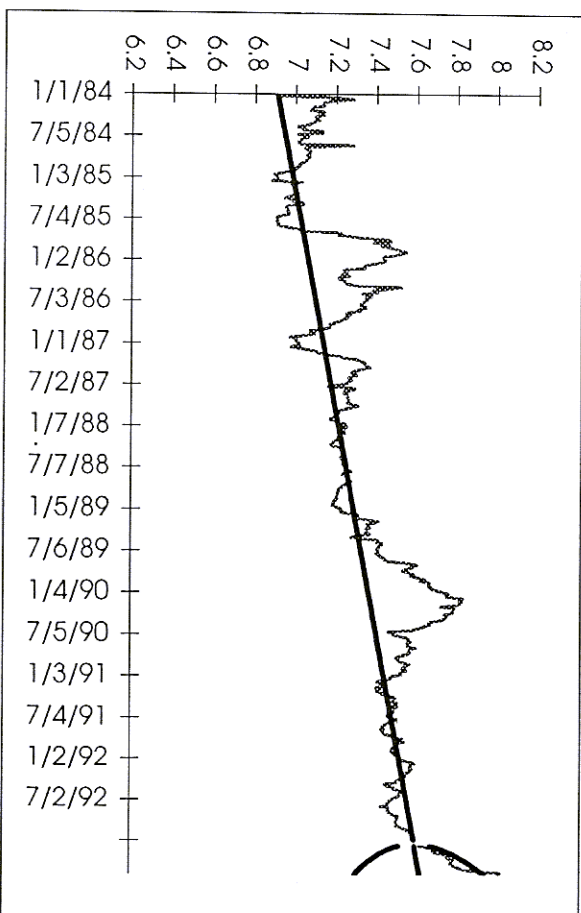


Figura 1: $\ln(\text{cotação})$ de uma acção dum banco nacional. $\hat{r}$ e $\hat{V}$ foram estimados com os dados de 1984.01.01 (correspondente a $t=0$) a 1992.03.31. A recta $\ln X_0 + \hat{r}t$ está traçada.

A partir de 1992.04.01, indicam-se os intervalos de confiança da previsão.

Obtivemos $\hat{r} = 0,0764/\text{ano}$ e $\hat{V} = 0,06874/\text{ano}$, donde facilmente se obtêm os intervalos de confiança a 95%. Note-se que o intervalo de confiança para V depende do número de observações ($n=467$), que é elevado, pelo que V é obtido com grande precisão. Já, porém, o intervalo de confiança de r depende de $\sigma = \sqrt{V}$ e de t_n (pouco mais de 8 anos), mas praticamente não depende de n . Assim, obtemos um intervalo de

confiança a 95% para r de $0,0764 \pm 0,1715$. Vê-se que, para obter r com razoável precisão, seriam precisos mais anos de observações ou uma menor volatilidade.

Também podemos fazer previsões de cotações futuras (para um futuro próximo, exemplificado na figura 1. Para ver como fazer previsões (num âmbito dum modelo mais geral) veja-se Braumann [2,3].

3 Estimación de parámetros para várias trajetórias

Suponhamos que observamos o valor do processo (cotação da acção ou tamanho da população no caso dos exemplos apresentados) para S trajetórias independentes ($s=1, \dots, S$), observamos a trajetória nos instantes

$$0 = t_0^s < t_1^s < \dots < t_{n^s}^s. \quad (22)$$

Para simplificar, vamos usar a notação

$$X_k^s = X(t_k^s, \omega^s) \text{ e } Y_k^s = \ln X(t_k^s, \omega^s) - \ln X(0, \omega^s).$$

Para cada trajetória s repetimos o processo da secção 2, obtendo estimadores $\hat{r}^s$ e $\hat{V}^s$ (ou $\tilde{V}^s$) definidos por expressões semelhantes a (11) e (12), mas com índices superiores s . As propriedades distribucionais obtidas também se mantêm da trajetória s , que terá uma expressão semelhante a (21) mas com índices superiores s . Designemos por L a função de log-verosimilhança geral (para as observações feitas em todas as trajetórias). Facilmente se reconhece que

$$L = \sum_{s=1}^S L^s. \quad (23)$$

Daquí se obtém facilmente os estimadores MV para o conjunto de todas as observações

$$\hat{r} = \frac{\sum_{s=1}^S Y^s}{\sum_{s=1}^S n^s} = \frac{\sum_{s=1}^S t^s \hat{r}^s}{\sum_{s=1}^S t^s} \quad (24)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{\sum_{s=1}^S n^s} \sum_{s=1}^S \frac{(Y_k^s - Y_{k-1}^s - \hat{r}(t_k^s - t_{k-1}^s))^2}{t_k^s - t_{k-1}^s} = \frac{\sum_{s=1}^S n^s \hat{V}^s}{\sum_{s=1}^S n^s} + \frac{\sum_{s=1}^S t^s (\hat{r}^s - \hat{r})^2}{\sum_{s=1}^S n^s}, \quad (25)$$

que se reconhece serem estatísticas suficientes.

Vê-se que $\hat{r}$ é gaussiano centrado com variância mínima $V/\sum_{s=1}^S t^s$ forte e - mente consistente quando $\sum_{s=1}^S t^s \rightarrow +\infty$ pois $\hat{r} - r = \sigma \sum_{s=1}^S w(t^s, \omega^s) / \sum_{s=1}^S t^s$.

Sejam H_k^s e Z_k^s variáveis semelhantes às consideradas na secção 2, mas referentes à trajetória s .

Façamos

$$C_1 = \frac{\sum_{s=1}^S \sqrt{t^s} Z_1^s}{\sqrt{\sum_{s=1}^S t^s}}, \quad C_s = \frac{\sqrt{t^s} Z_1^s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} t^i} \sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} t^i}} \sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} t^i} Z_1^s - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} t^i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^s t^i}} Z_1^s \quad (s=2, \dots, S). \quad (26)$$

Vê-se que estas v.a. são gaussianas reduzidas i.i.d. (raciocínio semelhante ao da secção 2 com os Z_1^s desempenhando o papel dos H_i e os C_s desempenhando o papel dos Z_k). Logo, $\hat{V} \sum_{s=1}^S n^s / V = \tilde{V} (\sum_{s=1}^S n^s - 1) / V$ é soma de quadrados de v.a. gaussianas reduzidas i.i.d. e, portanto, tem distribuição qui-quadrado com $\sum_{s=1}^S (n^s - 1) + (S - 1) = \sum_{s=1}^S n^s - 1$ gl. Conclui-se também que $(\hat{r} - r) \sqrt{\sum_{s=1}^S t^s} / \sqrt{\hat{V}}$ tem distribuição t de Student com $\sum_{s=1}^S n^s - 1$ gl. Também se vê que $\hat{r}$ e $\hat{V}$ são independentes. Claro que, por raciocínio semelhante ao da secção 2, $\tilde{V}$ é estimador centrado fortemente consistente quando $\sum_{s=1}^S n^s \rightarrow +\infty$.

4 Aplicações à comparação de valores de α

A decomposição (25) de $\hat{V}$ em duas componentes independentes, a primeira relacionada com a variabilidade (em torno da tendência de crescimento) dentro de cada trajetória e a segunda relacionada com a variabilidade entre trajetórias, permite testar a homogeneidade entre trajetórias por meio de uma técnica análoga à análise de variância. De facto, admitindo igual valor de σ , podemos testar se r (ou, equivalentemente, α) tem um valor comum para todas as trajetórias (hipótese nula que corresponde à situação que admitimos na secção 3). Com efeito, $\sum_{s=1}^S n^s \hat{V}^s / V$ e

$\sum_s (\hat{r}^s - \hat{r})^2 t^s / V$ são independentes com distribuição qui-quadrado com, respectivamente, $\sum_s (n^s - 1)$ e $S - 1$ gl. Logo

$$\frac{\sum_s t^s (\hat{r}^s - \hat{r})^2 / (S - 1)}{\sum_s n^s \hat{V}^s / \sum_s (n^s - 1)} \quad (27)$$

tem distribuição F com $S - 1$ e $\sum_s (n^s - 1)$ gl e pode ser usada como estatística de teste para a hipótese nula. Funciona exactamente como um teste-F clássico da análise de variância.

Este método pode aplicar-se à comparação de taxas de rendimento de acções diferentes ou da mesma acção em períodos de tempo diferentes. Igualmente permite a comparação de taxas de crescimento *per capita* em culturas de populações de variedades diferentes da mesma espécie ou criadas em condições ambientais diferentes, bem como a comparação dessas taxas para uma mesma população em períodos de tempo diferentes.

Referências

- [1] Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley.
- [2] Braumann, C.A. (1993). Estimação e previsão em modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório. Em *Estatística Robusta, Extremos e Mais Alguns Temas* (D. Pestana, ed.), p. 21-32. Edições Salamandra, Lisboa.
- [3] Braumann, C.A. (1993). Model fitting and prediction in stochastic population growth models in random environments. *Bull. Int. Statistical Institute* CPl, p. 163-164.
- [4] Braumann, C.A. (1995). Estimação de parâmetros em modelos de crescimento e pesca em ambientes aleatórios. Em *Born Senso e Sensibilidade, Traves Mestras da Estatística* (I. Branco, P. Gomes e J. Prata, eds.), p. 102-117. Edições Salamandra, Lisboa.
- [5] Braumann, C.A. (1999). Population growth in random environments and parameter estimation. Em *Mathematical Population Dynamics, vol. III* (O. Arino, D. E. Axelrod e M. Kimmel, eds.), Wuerz Publ. (em publicação).
- [6] Braumann, C.A. (1998). O acaso, a bolsa e a vida. Em *Estatística: A Diversidade na Unidade* (M. Souto de Miranda e I. Pereira, Eds.), p. 29-55. Edições Salamandra, Lisboa.
- [7] Fisz, L. (1963). *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3ª ed. Wiley.
- [8] Øksendal, B. (1998). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, 5ª ed. Springer.