Augusto J. Santos Fitas, 1996, *Os Principia de Newton, alguns comentários (Segunda parte, a Gravitação),* Vértice, 73, 97-102.

Os Principia de Newton, alguns comentários (Segunda parte, a Gravitação)

Augusto J. Santos Fitas

1. Depois da Axiomática

Na parte dos *Principia* que precede o Livro I, Axiomas e Leis de Movimento, sucedem-se às três leis, seis corolários que descrevem as propriedades dos movimentos dos corpos, dos quais se destacam dois: a regra do paralelogramo para a composição de forças (Corolário I); o centro de massa de um sistema de corpos sujeitos exclusivamente às suas interacções mútuas permanece em movimento uniforme e rectilíneo ou em repouso (Corolário IV).

Este capítulo inicial termina com um Escólio onde, entre os diversos comentários desenvolvidos, Newton referencia os seus predecessores: «(...)*com as duas primeiras Leis e os primeiros dois Corolários, Galileu descobriu que a descida dos corpos variava com o quadrado do tempo (in duplicata ratione temporis) e que o movimento dos projécteis era ao longo de uma curva que era uma parábola; a experiência concorda com ambos a não ser que estes movimentos sejam um pouco retardados pela resistência do ar*(...)»[1]; «(...)[Com as mesmas Leis e Corolários] *Sir Christopher Wren, Dr.Wallis, e Mr.Huygens, os maiores geómetras dos nossos tempos, determinaram as regras de*

[1] NEWTON, Isaac, *Principia mathematica philosophiae naturalis*, ed. Cajori, T.I, p.21 (1962, University of California Press), p.21.

impacto e reflexão dos corpos rígidos e, mais ou menos na mesma altura, comunicaram as suas descobertas à Royal Society, exactamente concordando entre si nessas regras(...)»[2]. Newton referencia parte daqueles que ao longo dos séculos XVI e XVII haviam contribudo decisivamente para o avanço da mecânica, em particular no que diz respeito ao estudo dos choques de corpos rígidos. A reflexão sobre este último problema tinha levado Wren, Wallis, e Huygens a descobrirem independentemente a lei da conservação do momento linear. Deve-se, no entanto, destacar a ausência de menção a Descartes.

2. Os Principia e a Geometria

O Livro I intitula-se o Movimento dos Corpos, sendo a sua primeira secção constituida por dez Lemas que constituem as proposições demonstráveis necessárias para fundamentar dedutivamente os teoremas sobre o movimento, apresentados posteriormente. As proposições aqui apresentadas correspondem a noções elementares de cálculo diferencial, embora jamais se faça qualquer referência a este domínio matemático. Estes lemas versam sobre os limites de áreas, linhas e arcos de curva, as suas provas são feitas à custa de um raciocínio exclusivamente geométrico, ignorando toda a linguagem analítica já introduzida na Geometria (Descartes). No Escólio apresentado no fim desta secção Newton explica o porquê desta opção metodológica no cariz das demonstrações: «(...) *Estes Lemas foram permitidos para evitar as aborrecidas deduções envolvidas nas demonstrações ad absurdum, de*

[2] Ibid., p.22.

acordo com o método dos antigos geómetras. Pelo método dos indivisíveis as demonstrações são mais curtas, mas, porque a hipótese dos indivisiveis parece ser, até certo ponto, desarmoniosa e, portanto esse método é considerado para o cálculo menos geométrico(...)»[3].

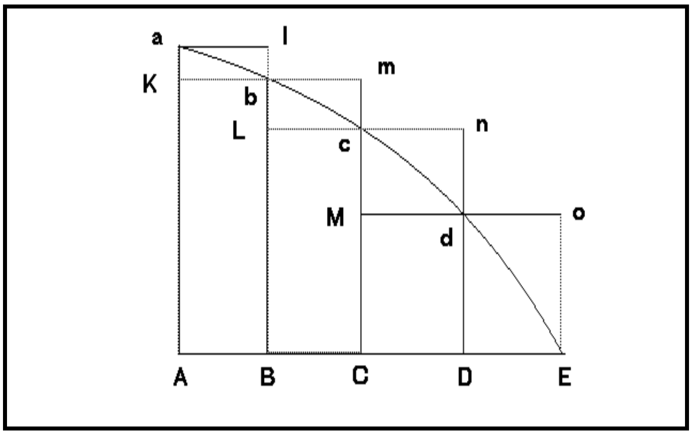

fig.-1

Embora este cálculo, através dos indivisíveis, fosse considerado menos geométrico no seu método, Newton desenvolverá as noções de limite e convergência com base numa exposição exclusivamente geométrica, prescindindo de qualquer linguagem analítica. Como exemplo repare-se no Lema II: *«Se em qualquer figura AacE limitada pelas linhas rectas Aa, AE e a curva acE se inscrever um qualquer de paralelograrmas Ab, Bc, Cd, etc., e os lados Bb, Cc, Dd, etc., forem paralelos ao lado da figura Aa; e os parlelogramas aKbl, bLcm, cMdn, etc., estiverem completados: então se a largura desses paralelogramas*

[3] Ibid., p.38.

diminuir e o seu número aumentar in infinitum, digo, que as razões últimas entre a figura inscrita AKbLcMdD, a figura circunscrita AalbmcndoE e a figura curvilínea AabcdE, serão entre si, razões de igualdade»[4]. Este enunciado é acompanhado pela ilustração apresentada na *fig.-1*.

O enunciado deste Lema corresponde a uma forma de apresentar o cálculo do integral, ou da área, como o resultado da igualdade dos limites do somatório, respectivamente, das áreas inscritas e das áreas circunscritas, o que surge claramente ilustrado na expressão «(...) *se a largura desses paralelogramos diminuir e o seu número aumentar in infinitum* (...)»

Ainda no sentido de ilustrar a presenca da noção de limite e de convergência atente-se nesta passagem do Escólio, no final desta secção, «(...) *As razões últimas com as quais se anulam as quantidades não são verdadeiramente as razões dessas quantidades últimas, mas limites em relação aos quais as razões das quantidades, decrescendo sem limite, convergem sempre, e para a qual elas se aproximam tão perto quanto uma dada diferenca, mas nunca vão para lá, nem de facto a atingem, até que as quantidades diminuam in infinitum*»[5].

No que diz respeito à diferença entre o método que lhe permitiu descobrir certos resultados, em particular as demonstrações das Leis de Kepler, e a forma como nos *Principia* apresenta essas demonstrações, o próprio Newton comenta: «*Através do Método inverso das fluxões, no ano de 1677 eu encontrei as demonstrações das Leis de Kepler para a*

---

[4] Ibid., p.39.

Astronomia, por exemplo que os Planetas se movem em elipses, que é a 11ª Proposição do primeiro livro dos Princípios; e no ano de 1683, perante o Dr.Halley, resumi essas considerações, e acrescentei outras proposiçõse sobre os corpos pesados que foram por ele comunicadas à R.Society (...) Escrevi o Livro dos princípios nos anos de 1684, 1685 e 1686 e ao escrevê-lo usei bastante o método das fluxões directo e inverso, mas não apontei os seus cálculos no Livro porque o livro foi escrito pelo método da composição, como toda a Geometria deve ser (...)»[6].

A Proposição I da secção II do Livro I, onde Newton estabelece que a existência de um força central implica a segunda Lei de Kepler e que a trajectória deverá ser plana, tem o seguinte enunciado: «*As áreas que os corpos em movimento de translacção descrevem por raios que passam por um centro imóvel de uma força* [central] *jazem no mesmo plano imóvel e são proporcionais aos tempos em que são descritas*»[7].

A demonstração é feita através dos passos que se passam a expôr. Newton, recorrendo à *fig.-2*, aproxima a trajectória curvilínea descrita por pequenos segmentos de recta, AB, BC, CD, DE, EF,..., a força central, sempre dirigida para o ponto S, actua por impulsos nos pontos (instantes) A, B, C, D, E, F, ..., desviando o corpo da sua trajectória rectilínea. Cormo o triângulo SAB define um plano e a força ao actuar em B fá-lo segundo SB, desviando a trajectória para BC, o novo

---

[5] Ibid., p.39
[6] Retirado de um rascunho de uma carta enviada por Newton a Des Maizeaux, escrita por volta de 1720 in COHEN, I.Bernard, 1978, *Introduction to Newton's Principia,* Cambridge, Harvard University Press, p.295).

triângulo BCS situa-se no mesmo plano que o anterior. O raciocínio prossegue para todos os segmentos, concluindo-se assim que as sucessivas trajectórias se encontram todas no mesmo plano.

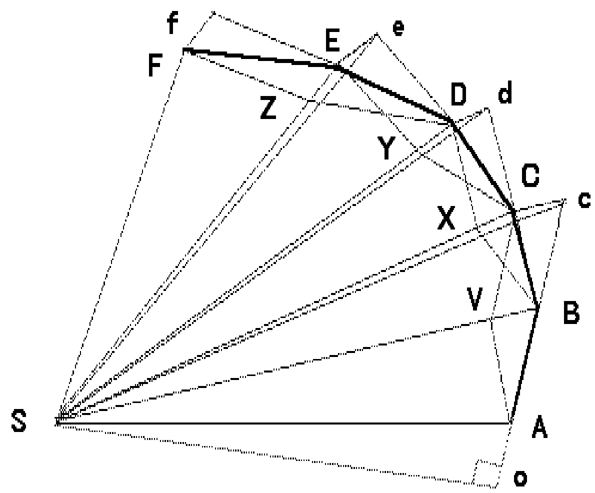

fig.-2

Considere-se um intervalo de tempo dividido em duas partes iguais. Na primeira parte o corpo percorre AB e, caso nenhuma força actuasse sobre ele, na segunda percorreria Bc, de tal modo que AB=Bc (Primeira Lei). Os triagulos ABS e BcS, porque têm bases iguais (AB=Bc) e altura comum, So, as suas áreas são iguais. Se em B intervier uma força centrípeta na forma de impulso o corpo é desviado de Bc e passa a deslocar-se segundo a direcção BC. Aplique-se a regra do paralelograma (Corolário I): pelo ponto c traça-se uma paralela à direcção

---

[7] Ibid., p.40.

SB que vai encontrar a recta BC no ponto C pertencente ao plano do triângulo ASB. Os triângulos BcS e BCS possuem a mesma base, BS, como a distância dos pontos C e c a este segmento é a mesma (Cc é paralela a BS), então a área dos triângulos é igual. As áreas de ABS e BCS são iguais.

Repetindo os argumentos utilizados conclui-se pela igualdade das áreas BCS e CDS, CDS e DES, ... e, por composição, as diversas somas destas áreas elementares estão entre si como os intervalos de tempo gastos em percorrê-las. Para terminar esta demonstração leia-se o que escreveu Newton: «(...) *aumente-se o número de triângulos,* e *a sua base diminuiu in infinitum; e o seu perímetro final ADF será uma linha curva: e portanto a força centrípeta, pela qual o corpo é continuamente afastada da tangente a esta curva actuará continuamente, e quaisquer áreas descritas SADS, SAFS que são sempre proporcionais aos tempos de descrição, serão, também neste caso, proporcionais a esses tempos. Q.E.D.*»[8].

Toda esta argumentação exclusivamente geométrica, da qual é afastado qualquer tratamento analítico, é a utilizada por Newton ao longo desta sua obra, não existindo qualquer recurso à linguagem de cálculo diferencial, entretanto por ele descoberto, e de que, tão insistentemente, se afirmou o pioneiro.

Newton, no período de 1664-65, ainda estudante do Trinity College em Cambridge, desenvolveu um método de análise, o Método das Fluxões, onde introduzira a noção de derivada, de diferencial e de

---

[8] Ibid., p.41.

infinitésimo, passando qualquer linha curva a não ser entendida como uma soma de vários segmentos, mas como uma linha continua. Em 1669, os resultados respeitantes à pesquisa sobre séries que, entretanto, desenvolvera, são compilados na obra Sobre a Análise de Equações não Limitadas no Número dos seus Termos. Um ano depois tenta publicar estes seus dois trabalhos de matemática num único livro, Método de Fluxões e Séries Infinitas, «*contudo, na forte depressão que se seguiu ao Grande Incêndio de Londres de 1666, não havia mercado para tais livros*»[9]; esta obra só será publicada em 1736.

Num relatório datado de 1715, Newton descreve o seu encontro com a geometria antiga como sendo posterior à elaboração da teoria da gravitação universal: «*É com o auxí1io da nova análise* [a que desenvolveu na sua juventude] *que o Sr.Newton descobriu a maior parte das proposições dos seus Principia Philosophiae; mas como, para atingir a certeza, os Antigos só admitiam em geometria o que fosse demonstrado de uma forma sintética, ele demonstra as proposições sinteticamente de modo que o sistema dos céus fosse fundado sobre a boa geometria*»[10]. Newton dá a entender que a sua primeira abordagem aos temas tratados nos Principia foi através da análise, optando por, na sua obra máxima, preferir o tratamento geométrico. Porquê esta opção?

Esta relação com a geometria poderá entender-se com base no Prefácio que escreveu para a primeira edição dos Principia. É explícito ao

---

[9] COHEN, I.Bernard, 1983, *La revolucion newtoniana y la transform.acion de las ideas cientificas,* Madrid, Alianza Editorial, p.298.

[10] Newton, I., An account of the book entitled *Commercium epistolicum,* in VERLET, Loup, 1993, *La malle de Newton,* Paris, Editions Gallimard, p.331

considerar a mecânica, na acepção de disciplina racional cujo procedimento é rigoroso e demonstrável, como geometria, enquanto que reserva a designação de mecânica propriamente dita para a «*mecanica prática*»[11] aplicada pelos artífices que «*não trabalham com precisão e rigor*». Conclusão: a Mecânica Racional tem que ser fundada num *constructio* geométrico. Contudo, Loup Verlet, na obra que se tem vindo a citar, avança com um outro argumento: o método geométrico empregue por Newton nos Principia deixa advinhar a sua adesão à doutrina da sabedoria primitiva *(prisca sapientia)*--«*(...)com os hermetistas da Renascença, Newton pensava que, mais próximos do que nós da origem, os sábios da antiguidade, mesmo sendo pagãos, possuiam um saber que remontava provavelmente a Moisés e que em seguida se perdera; parecia-lhes, portanto, evidente que as leis que tinham descoberto --ou, antes, redescoberto-- deviam ser escritas numa linguagem geométrica baseada na dos Antigos, em vez da linguagem algébrica que tinha inaugurado o seu falacioso adversário* (...)»[12]. Eis, um argumento bem adequado à iconoclastia de Newton...

4. Uma força que se exerce à distância

Nos Principia, logo a partir do primeiro teorema enunciado começa a perceber-se que a explicação dinâmica dos movimentos planetários, descritos pelas três leis cinemáticas de Kepler, é o grande objectivo da obra. A resolução deste problema, a determinação do tipo de

---

[11] NEWTON, Isaac, *Principia*, p.XVII
[12] VERLET, Loup, 1993, *La malle de Newton*, Paris, Editions Gallimard, p.331.

acção responsável por esta cónica harmonia celestial ocupava outros grandes espíritos da época como é o caso de Borelli, Hooke, Halley e Leibnitz e já merecera de Descartes, bem como do próprio Kepler, um esboço de uma teoria global do movimento dos corpos celestes.

Em 1600, Gilbert na sua obra De Magnete, primeira exposição sistemática do magnetismo terrestre, perante a natureza da força magnética que se manifestava na sua capacidade de actuar à distância originando movimento, extrapola «(...) *este movimento, que é a inclinação em direcção à fonte, não pertence só às partes da Terra, mas também às partes do Sol, da Lua e aos outros corpos celestes* (...)»[13]. E Newton associará os dois fenómenos, aceitando a sua mesma natureza, confundindo-os nos seus efeitos, escrevendo na nota à Definição V: «(...) *Deste tipo é a gravidade, pela qual os corpos tendem para o centro do magnetismo terrestre* (...)». Esta parecia ser a única forma capaz de materializar a acção à distancia...

Para Kepler, a aceitação do movimento dos planetas em torno do Sol obrigava a que este astro fosse o centro de forças magnéticas. Kepler concebia o Sol como animado de movimento de rotação, «*movimento que transmitia aos planetas por intermédio de uma species imaterial, análoga, por sua vez, à luz e à força magnética*»[14]. Esta *species* atravessa o espaço e, à medida que se afasta do Sol, o seu efeito vai enfraquecendo, o que explicava o movimento mais lento dos planetas mais afastados do Sol. Há uma certa analogia entre esta fonte de movimento e a propagação

---

[13] Gilbert, William, *De Magnete*, New York, Dover Pub, p.2.
[14] KOYRE, Alexandre, 1968, *Etudes Newtoniennes,* Paris, Editions Gallimard, p.14.

dos raios luminosos[15], pois, relembre-se Euclides, a intensidade da luz emitida por uma fonte varia na razão inversa do quadrado da distância a esta. Daí que Kepler, arrastado por esta semelhança, suspeite que a acção proveniente do Sol, *virtus movens*, e sentida pelos diversos planetas, deve respeitar a lei do inverso do quadrado das distâncias. Kepler fica-se pela suspeita porque, devido a erros de cálculo e à sua concepção aristotélica do movimento, é impelido para uma força proporcional ao inverso da distância. De qualquer modo, embora muito perto da solução que Newton virá a encontrar, seria impossível ao astrónomo polaco vislumbrá-la, pois a sua força magnética não é de forma alguma uma alternativa para a gravitação: «(...) *ela não é responsável pela manutenção dos planetas nas suas órbitas (...) para Kepler, tal como para Aristóteles,* o movimento circular é um *movimento simples e natural* (...)»[16].

Descartes substituia *o virtus movens* de Kepler pelo seu éter pleno de vórtices. O filósofo francês renegava a interacção à distância no vazio, substituindo todo o espaço por qualquer coisa como um líquido cheio de turbilhões que seriam os responsáveis pelo transporte dos planetas no seu movimento em torno do Sol. Embora senhor de ferramentas analíticas para tratar os problemas geométricos, Descartes não fez qualquer tentativa para explicar as célebres Leis de Kepler, no sentido de as adaptar ao seu sistema.

Hooke num artigo publicado em 1674 e intitulado *Uma tentativa para provar o Movimento anual da Terra* aderia, sem qualquer prova, à

---

[15] DUGAS, René, 1988, A *History of Mechanics*, New York, Dover Pub., p.215.
[16] KOYRE, Alexandre, op. cit., p.16.

hipótese de acção à distancia entre os planetas[17]: «*Todos os corpos celestes sem excepção exercem o poder de atracção ou peso dirigido para o seu centro; em virtude do qual não só retêm as suas próprias partes evitando que escapem, como é o caso da Terra, mas também atraem todos os corpos celestes que se encontram dentro da sua esfera de actividade. Assim, por exemplo, não só o Sol e a Lua actuam no sentido de fazer progredir o movimento da Terra, tal como a Terra actua sobre eles, mas também Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter e Saturno têm, devido ao seu poder atractivo, uma influência considerável no movimento destes corpos*». Hooke acabou por defender, influenciado pela analogia óptica, que o valor da atracção variava na razão inversa do quadrado da distância.

Halley, segundo parece o grande responsável pela publicação dos Principia, aplicou alguns teoremas enunciados por Huyghens sobre a força centrífuga, publicados sem demonstração no final da obra Horologium Oscillatorum, à hipótese de Hooke e assumindo a terceira lei de Kepler ($\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}$), concluiu sobre a lei do inverso do quadrado da distância.

Tudo indica que Newton estaria na posse de todos as hipóteses necessárias para inferir a sua célebre lei. Analise-se, nos seus primeiros passos, como Newton conduziu de uma forma matemáticamente rigorosa a relação entre as Leis de Kepler e a expressão analítica da Força da gravidade.

---

[17] in, DUGAS, René, op. cit., p.216.

5. Os Principia e as Leis de Kepler

No primeiro teorema da Secção II, Proposição I, estabelece-se que um corpo sujeito à acção de uma força central tem que obrigatoriamente obedecer à segunda lei de Kepler (a linha que une os planetas ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais) e que a sua órbita é plana. Na Proposição II prova-se a afirmação recíproca. Está encontrada (provada) a Segunda Lei de Kepler.

Na Proposição IV (Teorema IV) e nos nove corolários que lhe estão associados, são afirmados os resultados decorrentes do movimento circular descrito por acção da força centrípeta, comentando Newton no Escólio: *«O caso do sexto corolário obtido para os corpos celestes (tal como Sir Christopher Wren, Dr.Hooke e Dr.Halley observaram cuidadosamente), e portanto no que se segue tenciono tratar de uma forma mais ampla as questões que estão relacionadas com o decréscimo da força centrípeta com o quadrado da distância ao centro* (...)»[18]e, referindo-se a Huyghens, no seu «*excelente livro De Horologio Oscillatorio, comparou a força da gravidade com as forças centrífugas dos corpos em movimento de revolução*»[19].

Na secção III, composta pelas proposições XI à XXIX, é tratado o movimento dos corpos ao longo de trajectórias que constituem secções cónicas, demonstrando-se que, no caso do corpo estar sujeito à acção atractiva de uma força central, esta variará na razão inversa do quadrado da distância entre a posição do corpo e o centro da força. Na Proposição

---

[18] NEWTON, Isaac, *Principia*, p.46.
[19] Ibid., p.46.

XI, o resultado anterior é demonstrado para um movimento elíptico, enquanto que as proposições XII e XIII o fazem, respectivamente, para as trajectórias hiperbólica e parabólica.

Enquanto que nas proposições XI, XII e XIII, se estabelece aquilo que se designa por problema directo, no Corolário I da Proposição XIII, enuncia-se a inversa das proposições precedentes; escreve Newton: «*Das três últimas proposições* [XI, XII e XIII] *segue-se que qualquer corpo P ao deslocar-se de P com uma determinada velocidade e com a direcção da recta PR, sendo ao mesmo tempo submetido à acção de uma força centrípeta que varie na razão inversa do quadrado da distância do seu lugar ao centro, o corpo mover-se-á segundo uma cónica, tendo o seu foco no centro da força, e reciprocamente. <u>Dado o foco, a posição e a direcção da tangente, uma secção cónica deverá ser descrita de modo que nesse ponto deverá ter uma determinada curvatura. Mas a curvatura é dada pela força centrípeta e pela velocidade do corpo; e duas órbitas intersectando-se não podem ser descritas pela mesma força centrípeta e pela mesma velocidade</u>*»[20]. Utilizando uma linguagem analítica mais actualizada pode escrever-se que para uma força central do tipo (λ/r^2), conhecido λ, dada a posição e velocidade inicial, respectivamente, r_o e v_o, o corpo movimenta-se segundo uma trajectória que satisfaz as condições iniciais e a equação de movimento (F=ma) em qualquer instante, r = r(t); para além da existência de uma determinada solução, garante-se o seu tipo e a sua unicidade.

[20] Ibid., p.61 (sublinhado nosso).

O enunciado deste corolário é, na linguagem do seu autor, apresentado como uma evidência, uma decorrência lógica e imediata das proposições precedentes, não se alongando em qualquer pormenor demonstrativo de índole geométrica, limitando-se a uma justificação que na citação anterior se ressalta através do sublinhado.

Na primeira edição dos Principia este enunciado é escrito sem qualquer pista que apontasse para a a sua demonstração, contudo ao preparar a segunda edição da sua obra, Newton reconhece a necessidade de juntar uma frase que aludisse aos passos justificativos da afirmação[21]. A forma parcimoniosa do novo texto, onde são dadas as indicações do caminho da prova, é significativo de quão trivial, sob o ponto de vista matemático, Newton pensava ser este enunciado...

Apresentado na forma de problema, Proposição XVII, surge o sguinte enunciado: «*Suponha-se que a força centrípeta é inversamente proporcional ao quadrado das distâncias das posições ao centro, e que o valor absoluto dessa força é conhecido; pede-se para determinar a linha que o corpo deve descrever quando sair de uma determinada posição com uma velocidade conhecida na direcção de uma linha recta*»[22]. Analisando a forma como este problema é resolvido por Newton conclui-se que o corpo percorrerá no seu movimento uma cónica e que esta é única.

---

[21] Bernoulli criticou Newton por este ter aceitado a verdade deste enunciado sem o demonstrar (in COHEN, I.Bernard, 1978, *Introduction to Newton's Principia*, Cambridge, Harvard University Press, p.287).

[22] Ibid., p.65.

Está encontrada (provada) a Primeira Lei de Kepler que satisfaz não só elipses como hipérboles e parábolas.

Após ter estabelecido a relação entre uma força central, variando na razão inversa do quadrado da distância, e os movimentos ao longo de secções cónicas dos corpos a ela sujeitos, Newton enuncia na Proposição XV (Teorema VII) a proporcionalidade entre os cubos dos semi-eixos maiores das órbitas elípticas e os quadrados dos tempos gastos em percorrê-las, quando o corpo está sujeito a uma força dirigida para um dos focos e é proporcional ao inverso do quadrado da distância.

Está encontrada (provada) a Terceira Lei de Kepler.

As três Leis de Kepler são uma consequência das Leis de movimento, aceitando ainda a hipótese de que a força responsável pelo movimento é central e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Apesar de se garantir a proporcionalidade, ainda não foi calculada a sua constante, logo, na integra, não foi ainda estabelecida a Lei da Gravitação Universal.

6. A Gravidade

No Livro I dos Principia, Newton apresenta os conceitos, relaciona-os e estabelece as principais conclusões do seu modelo matemático; o problema das forças centrais não passa de uma hipótese que serve para sustentar diversos teoremas, mas nada é dito sobre a relação dos resultados atingidos e o comportamento da natureza. Newton edificou todo o seu sistema físico-matemático, mas é no Livro III dos

Principia, intitulado O Sistema do Mundo, que vai aplicar as conclusões teóricas ao estudo dos fenómenos naturais.

Este livro abre com as Regras de Raciocínio em Filosofia, são quatro e o propósito da sua apresentação corresponde aos seguintes objectivos: o número de causas explicadoras de um dado fenómeno natural deve sempre ser tomado no seu valor mínimo (Regra I); deve assumir-se que efeitos similares são provocados por causas idênticas (Regra II); as qualidades comuns a todos os corpos, determinadas pela experiência, devem ser entendidas como as propriedades dos corpos estendidas a todo o universo (Regra III); na natureza devem ser entendidas como verdadeiras as conclusões que se extraem através da indução geral, até serem refutadas por um qualquer fenómeno (Regra IV).

Segue-se uma lista de dados sobre fenómenos astronómicos: características das órbitas dos satélites de Júpiter e o seu acordo com as Leis de Kepler; o mesmo para os satélites de Saturno; identicamente para os planetas do sistema solar.

Baseado nos resultados do Livro I (Proposições II e IV), bem como nos dados astronómicos previamente expostos, Newton, nas Proposições I, II e III, mostra que as forças que actuam sobre os planetas são centrais, orientadas para o foco da trajectória e variam na razão inversa do quadrado da distância.

Na Proposição IV (Teorema IV) onde se enuncia, «*A Lua gravita em direcção à Terra, e pela força da gravidade é continuamente afastada do seu movimento rectilíneo e mantida na sua órbita*»[23], Newton,

---

[23] NEWTON, Isaac, *Principia*, p.407.

recorrendo aos dados astronómicos apresentados por vários autores (Ptolomeu, Huygens, Copérnico, Street, Tycho), conclui que «(...) *a força pela qual a Lua é mantida na sua órbita torna-se, à superfície da Terra, igual à força da gravidade que aí observamos nos corpos pesados (...) portanto (pela Regra 1 e 2) a força pela qual a Lua é mantida na sua órbita é a mesma força que comummente designamos de gravidade* (...)»[24]. De acordo com a demonstração feita pelo seu autor, onde são exibidos argumentos numéricos, o objectivo desta proposição é sobretudo mostrar que é a mesma, a força que é responsável pela queda dos corpos para a Terra, bem como a outra que aguenta a Lua na sua órbita. No Escólio a esta proposição, Newton ilustra o uso das suas Regras de Raciocínio em Filosofia com que abre o Livro III: se ambas as forças referidas (gravidade dos corpos pesados e força central actuando sobre a Lua) possuem a direcção do centro da Terra e têm o mesmo valor então deverão possuir a mesma causa (regra 1 e 2)...

A conclusão exposta nesta última proposição é generalizada para os satélites dos vários planetas nas Proposições V e VI. Na Proposição VII escreve: «*Existe o poder de gravidade pertencendo a todos os corpos, proporcional em várias quantidades à matéria que eles contêm*»[25]. Está definida a constante de proporcionalidade como uma função da massa gravítica; é nesta proposição que Newton enuncia a Lei da Gravitação Universal e, como assinala Chandrasekhar[26], das cartorze proposições

---

[24] Ibid. p.408.
[25] Ibid. p.414.
[26] .CHANDRASEKHAR, S., 1995, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford, Clarendon Press.

(teoremas) desta secção, esta é a única em cujo final de demonstração Newton coloca a marca «Q.E.D», *Quod erat demonstrandum*.

Completou-se assim o raciocínio que possibilitou concluir que a força de atracção gravítica sobre um corpo de massa *m* é dada pela tão conhecida expressão analítica:

$$f = k\frac{m}{r^2}$$

É alicerçado nos postulados ditados pela natureza, base de toda a Mecânica Clássica, que Newton chegou finalmente à formulação de uma lei natural que unifica o mundo terrestre com o mundo dos astros, uma lei que explica o movimento da queda da maçã à superfície da Terra e a trajectória de qualquer planeta do Sistema Solar. Esta unificação permite tirar uma conclusão mais arrojada: onde quer que se encontrem no universo, quaiquer massas devem atrair-se de acordo com a mesma Lei. E toda esta audácia na compreensão da natureza foi permitida pelo rigor da linguagem matemática usada. Eis o paradigama do pensamento Newtoniano, a forma de raciocínio científico criador que viria a marcar as Ciências Físicas até aos nossos dias.