Geometria não euclidiana

O que é a geometria euclidiana? Nasce com Euclides, matemático da biblioteca de Alexandria, cerca de 300 a.c, que pretendeu reunir na obra “Elementos” todos os conhecimentos de geometria que até então se conheciam. A geometria euclidiana pretende descrever numa formulação racional a geometria intuitiva do espaço. Parte de definições ou locuções básicas: ponto “o que não tem partes”, linha “comprimento sem espessura”, recta “linha que descansa por igual em todos os seus pontos”, plano, ângulo, etc e com estas constrói definições mais avançadas (por isso mais fáceis de entender, diremos nós). Por exemplo, a de rectas paralelas (complanas e que não se intersectam) --- ainda é a definição usual. Desenvolve-se depois com noções gerais como: “iguais a uma terceira são iguais entre si”, “coisas que podem fazer-se coincidir são iguais”, “o todo é maior do que a parte”, etc, que seriam, ao tempo de Euclides, dadas pela lógica ou por uma teoria dos conjuntos inconsciente, a qual seria inata, aparente de não contradição e logo de inverosímil discussão. Muita genialidade para a altura, muita incoerência para o que se conhece hoje em dia. Foi um paraíso idílico para a ciência em geral até ao século XVIII.

Euclides fundamentou as relações entre os objectos por recurso a axiomas ou postulados:
I-É possível traçar um segmento de um para qualquer outro ponto. II-É possível prolongar qualquer segmento de recta tanto quanto desejarmos. III-É possível traçar uma circunferência de centro em qualquer ponto e raio qualquer. IV-Todos os ângulos rectos são iguais entre si. V-Se em um plano uma recta intersecta duas outras rectas fazendo ângulos internos de um mesmo lado com soma menor que dois rectos, então estas duas rectas intersectam-se em um ponto situado daquele mesmo lado. Em tudo isto há problemas lógicos, de continuidade e até de movimento. Por exemplo, um teorema dos “Elementos” de Euclides afirma, sobre a intersecção de certas círcunferências, que esta existe. O que é um resultado que inclui a compreensão dos irracionais. É no axioma ou postulado V que surge a dúvida e nasce a geometria *não-euclidiana*. Mesmo a Euclides pareceu que aquele era um axioma de natureza diferente e mais complexo do que os outros. Tentou provar o maior número de teoremas sem recorrer àquele 5º axioma. E desde os gregos, até ao século XIX, sempre se tentou provar o 5º axioma por recurso aos quatro primeiros.

O 5º axioma ficou conhecido como “Axioma das Paralelas” porque se prova que é equivalente ao seguinte: “Por um ponto exterior a uma recta passa sempre uma paralela à recta dada”. Claro que o problema do infinito está aqui em evidência, como um simples modelo pode demonstrar.

“Euclides liberto de todas as deficiências” (em latim), obra publicada pelo padre jesuíta Gerolamo Sacheri em 1733, supôs ter demonstrado o 5º axioma, pois recorreu ao método da demonstração por absurdo, enunciando um conjunto de resultados em que ele é falso. Tratou-se de um equívoco: os resultados não se contradiziam entre si. Sacheri estava afinal a enunciar resultados da geometria não-euclidiana.

O iminente matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) “entreviu” a nova geometria desde 1792, com apenas 15 anos. A negação do 5º axioma também não o levava a resultados contraditórios com os axiomas mais básicos e sintéticos da geometria, hoje dita “geometria absoluta”.

Mas o primeiro matemático que afirmou a geometria não-euclidiana de forma consciente foi o russo Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky, licenciado pela Universidade de Kazan em 1807, três anos depois desta abrir. Em 1826 fez uma comunicação ao departamento de Matemática e Física em que se nega o 5º axioma: na sua geometria, por um ponto exterior a uma recta passa mais do que uma paralela. E submeteu um artigo pela Academia de Ciências de S. Petersburgo, que primeiramente foi rejeitado. Desenvolveu um modelo da sua geometria, que hoje tem o nome de “semi-plano hiperbólico”. Uma importante consequência é a de que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é menor do que um ângulo recto.

Pela mesma altura, um jovem matemático húngaro, Janos Bolyai (1802-1860) desenvolve independentemente, sem qualquer relação com Lobachevsky, um tratado de geometria não-euclidiana, isto é, que nega o 5º axioma de Euclides, que só viria a ser publicado em 1832. Bolyai é por isso também considerado um percursor da geometria não-euclidiana.

Nos princípios de 1900 surgem novos modelos de geometria *hiperbólica*, como o “disco de Poincaré”, inventado pelo françês Henri Poincaré. Prova-se porém que este é isométrico ao semi-plano hiperbólico de Lobatchewsky.

Por esta altura de mudança de século os matemáticos debatem-se com problemas dos fundamentos lógicos da matemática, também ligados à ideia de unificação coerente das ciências. Lembremo-nos que mesmo antes do “annus mirabilis” de Einstein (1905) os físicos propunham-se dar como completa a compreensão dos fenómenos físicos. Em 1899 David Hilbert apresenta uma obra, *Grundlagen der Geometrie*, que resolve e esclarece muitos problemas lógicos relacionados com os fundamentos das geometrias todas até então conhecidas, as quais têm por base um conjunto de 21 axiomas de incidência, congruência, ordem, paralelas e continuidade, a tal geometria absoluta. Em particular, prova que a demonstração da consistência da geometria euclidiana é equivalente à da consistência dos números naturais. Esta é uma obra notável, que o próprio D. Hilbert foi melhorando em sucessivas edições, a qual só viu uma tradução editada em Portugal em 1951, pela Prof. Maria do Pilar Ribeiro.

Mas não abandonemos o desenvolvimento matemático concreto da geometria: em 1853, Bernhard Riemann (1826-1866, 39 anos), na sua tese de licenciatura apresenta uma ideia analítica de caracterização da geometria. Estamos na época do ascenso do cálculo diferencial. Foi então fundada a geometria Riemanniana. Com a construção da geometria diferencial Riemanniana aparece o conceito de *curvatura*, de que Gauss já fazia uso para superfícies, permitindo distinguir, por exemplo, três tipos de geometria em dimensão 2: a geometria hiperbólica, a plana (ou lisa) e a elíptica, conforme a curvatura de Gauss (em dimensão dois é o mesmo que a curvatura de Riemann) seja respectivamente negativa, nula ou positiva. Nesta última, como se pode ver tomando uma esfera com a *métrica* canónica, nem sequer existem duas rectas paralelas, pois que rectas são os círculos de raio máximo.

Afinal a geometria diferencial veio cada vez mais a impôr-se, tendo obtido práticas aplicações com a Relatividade, e a encontrar-se cada vez mais com a álgebra, a topologia e a análise. Um exemplo muito ilustrativo e particular da existência de curvatura e sua interacção com outras matérias é o do grupo de holonomia da esfera.

Sempre a geometria tem vindo a racionalizar-se mais e mais, mas o surpreendente (ou o que sempre cria a suspeição dos matemáticos) é a sua enorme independência do cérebro humano se a compararmos com outras áreas da matemática. Como disse F. W. Bessel em 1830: «enquanto o número é produto exclusivo do nosso espírito, o espaço tem uma realidade para além do espírito, cujas leis não podemos prescrever completamente».

Bibliografia: para além da prodigiosa “wikipédia”,

- “Geometria não-euclidiana”, J. J. Dionísio, 1987, AEFCUL.
- “Fundamentos da Geometria”, David Hilbert, Gradiva, 2003.
- “O Annus Mirabilis de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física”, John Stachel, Gradiva, 2005
- “Geometria”, A. J. Franco de Oliveira, 1988, Universidade de Évora.