1 Teoria de conjuntos e lógica

Estes breves apontamentos dizem respeito à parte do programa dedicada à teoria de conjuntos e à lógica matemática. Embora concebidos sem grandes formalismos e com poucas demonstrações, são introduzidos determinados conceitos e apresentados resultados que serão essenciais para a abordagem das matérias seguintes, e têm por objectivo contribuir para um melhor entendimento, por parte dos alunos, da linguagem matemática e de alguns dos seus conceitos fundamentais.

1.1 Conjunto e relação pertence

Um conjunto considera-se com uma colecção de objectos, por exemplo

$$A = \{0, 2, \pi\}$$

representa o conjunto formado pelos números 0, 2 e π. Quando se considera um conjunto consideram-se também os elementos que o formam, isto é, os elementos que pertencem ao conjunto. Habitualmente designa-se um conjunto por uma letra maiúscula, A, B, C, X, Y, etc., e para indicar que um elemento a pertence ao conjunto A usa-se o símbolo $\in$ e escreve-se $a \in A$ (leia-se "a pertence a A"). Assim, deve escrever-se para o conjunto $A = \{0, 2, \pi\}$ que considerámos

$$0 \in \{0, 2, \pi\},\ 2 \in \{0, 2, \pi\},\ \pi \in \{0, 2, \pi\}.$$

Para indicar a negação de $a \in A$ escreve-se $a \notin A$, por exemplo, é correcto pôr $1/2 \notin \{0, 2, \pi\}$.

1.2 Conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Representação de um conjunto. Conjuntos habituais em matemática

Dado o conjunto A acima ou, por exemplo, o conjunto

$$B = \{-1, 4/5\}$$

podemos contar o número dos seus elementos. A tem três elementos e B é constituído por dois elementos, ou seja, $\#\ A = 3$ e $\#\ B = 2$, onde o símbolo $\#$ representa o número de elementos de um conjunto. Dizemos assim que estes conjuntos são <u>finitos</u>. Mas já o conjunto de todos os números que são resultado da operação de contagem quer dizer, $1, 2, 3, 4, ...$ não é finito, nunca acabaríamos de contar os seus elementos. O conjunto dos números que se obtêm pela operação de contagem designa-se por $\mathbb{N}$, é o conjunto dos números naturais. Sendo $\mathbb{N}$ um <u>conjunto infinito</u> (não podem contar-se todos os seus elementos), só podemos representá-lo pela compreensão de quais são os seus elementos, e escreve-se

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

subentendendo a operação de contagem. Outros conjuntos habitualmente considerado são o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

e o conjunto

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$$

dos números inteiros não negativos.

Assim, enquanto um conjunto finito pode ser <u>representado por exaustão</u>, quer dizer, pela indicação de todos os seus elementos, já um conjunto infinito só pode ser <u>representado por compreensão.</u>

Outro conjunto importante é o conjunto das fracções (ou números fraccionários) que se chama o conjunto dos números racionais e se designa pela letra $\mathbb{Q}$. Para representar por compreensão o conjunto $\mathbb{Q}$ podemos portanto escrever

$$\mathbb{Q} = \{n/m : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

o que se exprime por palavras "$\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números tais que n/m, onde n, m são inteiros e m é diferente de zero 0" (" : " leia-se "tais que", a vírgula interpretando-se como "e"). Escolhido um ponto 0 para o zero, e uma unidade 1, é conhecida a representação dos números reais como pontos na recta. Podemos interpretar cada número real como um ponto da recta. Não tem dificuldade a marcação de um número inteiro, positivo ou negativo. Também pode marcar-se um número racional (fracção de números inteiros). Notar que todo o número inteiro n é também um número racional, podemos escrever $n = \frac{n}{1}$. Os números racionais não são todos os pontos da recta (por exemplo, não existem números inteiros n, m verificando $\pi = n/m$).

São os números reais que no seu conjunto, representado por $\mathbb{R}$, preenchem toda a recta, a que por isso se chama também recta real.

Finalmente, outros números que se consideram em Matemática são os números complexos $a + ib$, onde a e b são números reais e se representa por $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nenhum número real x verifica $x^2 = -1$ e portanto não pode ser $x = \sqrt{-1}$ com x um número real. O conjunto dos números complexos designa-se pela letra $\mathbb{C}$. Deve escrever-se

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

para significar que $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números tais que $a + ib$, onde a, b são números reais.

1.3 Inclusão de conjuntos

Para significar que cada elemento de um conjunto A também está num certo conjunto B usa-se o símbolo $\subset$ e escreve-se $A \subset B$, lendo-se "O conjunto A está contido no conjunto é B ".

Por exemplo, considerando os conjuntos apresentados anteriormente tem-se que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.4 Termos e relações. Os valores lógicos V e F

Em Matemática usa-se uma linguagem apropriada que inclui letras, sinais e símbolos e palavras da linguagem comum. Distinguem-se os <u>termos</u> que são os elementos do conjunto Universo que se considera, das <u>relações</u> que nos permitem relacionar esses termos e obter propriedades, que são afirmações a respeito dos termos. Por exemplo, no estudo das sucessões ou das funções, os números, por exemplo, 3, 2/5 e $1 + \sqrt{5}$ são termos, e no estudo que se faz destes assuntos considera-se o conjunto Universo dos números reais $\mathbb{R}$.

Já $x^2 - 1 = 0$, por exemplo, é uma <u>relação na variável x</u> que se transforma numa Proposição (afirmação) sempre que substituimos a variável x por um termo (uma constante). Se fizermos $x = 1$ ou $x = -1$ obtemos a proposição verdadeira

$$1^2 - 1 = 0$$

no primeiro caso, e a proposição, também verdadeira,

$$(-1)^2 - 1 = 0$$

se substituirmos x pela constante -1, no segundo caso. Contudo, substituindo x pela constante 2 obtemos a proposição falsa $2^2 - 1 = 0$. Para indicar uma relação na variável x escreve-se $R(x)$. No exemplo acima considerámos a relação

$$R(x) \equiv x^2 - 1 = 0.$$

Substituindo a variável x pela constante 1 obtemos a proposição

$$R(1) \equiv 1^2 - 1 = 0,$$

se substituirmos a variável pela constante -1 obtemos a proposição

$$R(-1) \equiv (-1)^2 - 1 = 0.$$

Como sabemos, $R(1)$ e $R(-1)$ são proposições verdadeiras, mas

$$R(2) \equiv 2^2 - 1 = 0$$

é uma proposição falsa. Portanto, substituindo, na relação $R(x)$ a variável x por uma constante c obtemos a proposição $R(c)$. Se a proposição obtida é verdadeira, diz-se que tem o valor lógico V, se é falsa diz-se que tem o valor lógico F.

Em linguagem comum, dizemos por vezes "isto ou aquilo", "esta coisa e outra", "se isto é verdade, então também aquilo é". Em Matemática trata-se respectivamente de "a proposição P ou a proposição Q" e escreve-se

$$P \vee Q,$$

"a proposição P e a proposição Q" e escreve-se

$$P \wedge Q,$$

e de "se P então Q" e neste caso, escreve-se

$$P \Rightarrow Q,$$

onde o sinal $\Rightarrow$ significa "então" ou "implica". Utilizam-se assim os símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ para formar proposições a partir de outras proposições. Entende-se que se ambas as proposições P, Q são verdadeiras, a proposição $P \wedge Q$, que pode escrever-se também P e Q, é verdadeira, isto é, se o valor lógico de P é V ($P = V$) e também $Q = V$, o valor lógico de $P \wedge Q$ deverá ser V; mas se $P = F$ (P é falsa) deve ser $(P \wedge Q) = F$.

Analogamente, se $P = V, Q = V$ deve ser também $(P \vee Q) = V$ (P ou Q é verdadeira) e, ainda, se $P = V, Q = F$ deve continuar a ser $(P \vee Q) = V$. Assim, o valor lógico das proposições obtidas $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ depende dos valores lógicos de P e de Q.

Notar que dadas as proposições P e Q, $P \Rightarrow Q$ é também uma nova proposição que portanto, como qualquer outra, tem o valor lógico V ou tem o valor lógico F. Reparar que se uma pessoa, numa argumentação, diz "se uma coisa (digamos, a proposição P), então também aquela (digamos, uma outra proposição Q)" tanto pode estar certa como errada, pois pode acontecer que a primeira (P) não tenha nada que ver com a segunda (Q). Quer dizer, $P \Rightarrow Q$ é uma nova proposição obtida a partir de P e Q, a qual também tem o seu valor lógico; nesta argumentação como exemplificamos, se de facto P nada tem a ver com Q, a implicação $P \Rightarrow Q$ que a pessoa está a usar deve, em si mesma, ter o valor lógico F. Aliás, se soubermos que $P = V$ mas por outro lado $Q = F$, então certamente$(P \Rightarrow Q) = F$.

Para descrever a variação dos valores valores lógicos das proposições $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$ consoante os valores lógicos de P e Q utilizam-se as Tabelas de verdade.

Para além dos símbolos já apresentados, também se usa o símbolo lógico $\Leftrightarrow$ (se e só se) para formar a proposição

$$P \Leftrightarrow Q,$$

com o significado de P ser equivalente a Q, isto é, $P \Leftrightarrow Q$ é verdade unicamente quando $P = V$ se e somente se $Q = V$ e, também $P = F$ se e somente se $Q = F$.

1.5 Tabelas de verdade

Assim, as tabelas de verdade para as proposições que acabados de introdução são:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Observação: Note-se que, na prática, só usamos $P \Rightarrow Q$ no caso da primeira linha da tabela.

Em seguida introduzimos o conceito de negação. Note-se que se tivermos uma proposição P, podemos considerar a sua negação, que se escreve $\sim P$, onde o símbolo $\sim$ tem, em linguagem comum, o significado de "não". Naturalmente para a tabela de verdade da negação $\sim$ teremos

P	$\sim P$
V	F
F	V

Como vimos, se $R(x)$ é uma relação na variável x, a relação transforma-se na proposição $R(c)$ sempre que substituimos a variável x por uma constante c. Neste sentido, também podemos considerar as relações $R(x), S(x)$ e formar as novas relações

$$R(x) \wedge S(x), \quad R(x) \vee S(x), \quad R(x) \Rightarrow S(x) \;\text{ e }\; R(x) \Leftrightarrow S(x);$$

e também $\sim R(x)$.

Se tivermos um conjunto A, podemos considerar, usando o símbolo $\in$, a relação $x \in A$. Com $A = \{0, 2, \pi\}$ o conjunto que considerámos inicialmente, a relação

$$A(x) \equiv x \in \{0, 2, \pi\}$$

transforma-se na proposição verdadeira $A(0) \equiv 0 \in \{0, 2, \pi\}$ ao subsituir x pela constante 0. Também as proposições $A(2)$, $A(\pi)$ são verdadeiras. $A(5)$, por exemplo, é falsa pois $5 \notin \{0, 2, \pi\}$.

Vimos também que o sinal $\subset$ de inclusão se usa para significar que todo o elemento do conjunto A está no conjunto B e escrevemos, neste caso, $A \subset B$. Portanto, usando relações, escrever-se $A \subset B$ significa "se x pertence a A então x pertence a B" quer dizer, temos $A \subset B$ no caso em que a implicação $x \in A \Rightarrow x \in B$ é verdadeira.

Se a relação $R(x)$ tem sempre o mesmo valor lógico que a relação

$$A(x) \equiv x \in A$$

e a relação $S(x)$ tem também sempre o mesmo valor lógico que a relação

$$B(x) \equiv x \in B,$$

teremos:

Como na notação considerada $A = \{x : A(x)\}$ (quer dizer exactamente que o conjunto A é o conjunto dos elementos x "tais que" $x \in A$, isto é, é o conjunto dos elementos que constituem A) e $B = \{x : B(x)\}$ para o conjunto B, portanto, se $R(x)$ tem o mesmo significado que $A(x)$ e $S(x)$ tem o mesmo significado que $B(x)$, pode-se concluir que $A \subset B$ se soubermos que $R(x) \Rightarrow S(x)$ é verdadeira. Podemos precisar: se $R(x)$ define o conjunto A, isto é, $A = \{x : R(x)\}$ e se $S(x)$ define o conjunto B por $B = \{x : S(x)\}$, se soubermos que $R(x) \Rightarrow S(x)$ é verdadeira, podemos concluir que $A \subset B$.

Note-se que a relação $R(x) \Leftrightarrow S(x)$ é verdadeira no caso de ambas $R(x) \Rightarrow S(x)$ e $S(x) \Rightarrow R(x)$ são verdadeiras e unicamente neste caso. Assim, uma vez que $A = B$ se e somente se se têm as duas inclusões $A \subset B$ e $B \subset A$, também ter-se $R(x) \Leftrightarrow S(x)$ significa que $A = B$.

Exemplo 1: se $S(x) \equiv x$ é um número natural e se $R(x) \equiv x$ é um número natural par, verifica-se $R(x) \Rightarrow S(x)$. Como $S(x)$ define o conjunto $\mathbb{N}$ (podemos pôr $S(x) \equiv x \in \mathbb{N}$), tem-se que o conjunto dos números pares está contido no conjunto $\mathbb{N}$. Se representarmos por $\mathbf{P}$ o conjunto dos números naturais pares, temos neste caso que $R(x) \Rightarrow S(x)$ e portanto $\mathbf{P} \subset \mathbb{N}$.

1.6 Quantificação

Além da sustituição da variável x na relação $R(x)$ por uma constante c, transformando a relação $R(x)$ na proposição $R(c)$, há outra maneira de transformar uma relação numa proposição. Por exemplo, dada a relação $x \geq 1$ com a variável x no conjunto $\mathbb{R}$, podemos considerar a afirmação (proposição) "Todo o número real x é maior ou igual a 1" ou, doutro modo, "Qualquer que seja o número real x, tem-se x maior ou igual a 1" (proposição neste caso, falsa). Passa-se então assim da relação $R(x)$ para a proposição que se representa por

$$\forall x, R(x)$$

(ou, para ser mais preciso, $\forall x \in \mathbb{R}, R(x)$) e dizemos que se quantificou a relação $R(x)$ pelo <u>quantificador universal $\forall$</u> (leia-se: "para todo" ou "qualquer que seja").

Outra forma de transformar a relação $R(x)$ numa proposição é usando o <u>quantificador existencial $\exists$</u>, que significa: "existe pelo menos um". Obtém-se assim a proposição

$$\exists x, R(x).$$

No exemplo acima, quantificando $x \geq 1$ pelo quantificador existencial $\exists$, obtemos a proposição $\exists x, x \geq 1$ (mais precisamente, $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 1$), que como sabemos é uma proposição verdadeira.

Para negar uma proposição quantificada notar que, por exemplo, negar que "Todo o número real x é maior ou igual a 1" é o mesmo que dizer que "existe pelo menos um número real x menor que 1". Quer dizer, a negação de $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ é $\exists x \in \mathbb{R}, \sim (x \geq 1)$. De modo geral, a negação de $\forall x, R(x)$ é

$$\exists x, \sim R(x).$$

Analogamente, a negação de $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ será "Para todo o número real x, x não é maior ou igual que 1". Quer dizer, é a proposição (neste caso, falsa), $\forall x \in \mathbb{R}, \sim (x \geq 1)$, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1$.

As regras para a negação de proposições quantificadas são:

$$\sim (\forall x, R(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \sim R(x))$$
e
$$\sim (\exists x, R(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \sim R(x)).$$

1.7 Operações entre conjuntos

Dados os conjuntos A e B podemos considerar as relações $A(x) \equiv x \in A$, $B(x) \equiv x \in B$. Representa-se por
$$A \cap B = \{x : A(x) \wedge B(x)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
a intersecção dos conjuntos A e B. Por outro lado, a reunião de A e B é o conjunto
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$
Se A é definido pela relação $R(x)$, $A = \{x : R(x)\}$, e B é definido pela relação $S(x)$, $B = \{x : S(x)\}$, então
$$A \cap B = \{x : R(x) \wedge S(x)\}$$
e
$$A \cup B = \{x : R(x) \vee S(x)\}.$$
O conjunto intersecção $A \cap B$ é assim formado pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B, enquanto que o conjunto reunião é constituído pelos elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos A, B. Assim:

i) $A \cap B = B \cap A$ e $A \cap A = A$,

ii) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cup A = A$.

Observação: Note-se que, pelas tabelas de verdades, as relações $R(x) \wedge S(x)$, $S(x) \wedge R(x)$ têm o mesmo valor lógico, assim como $R(x) \vee S(x)$, $S(x) \vee R(x)$ também têm o mesmo valor lógico. Além disso, $R(x) \wedge R(x)$ e $R(x) \vee R(x)$ têm o mesmo valor lógico que $R(x)$.

Dados A e B, podemos ainda definir o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Este conjunto representa-se por $A \backslash B$ e chama-se a diferença do conjunto A para o conjunto B ou o conjunto A menos B. Portanto, pela definição,
$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Se todos os conjuntos que se consideram estão todos contidos num conjunto fixo X (ou, como também se diz, se são todos subconjuntos de um conjunto universo X), representa-se, considerando um conjunto $A \subset X$, o conjunto diferença $X \backslash A$ escrevendo A^c e diz-se que o conjunto A^c é o conjunto complementar de A. Assim, subentendendo que cada elemento $x \in X$ (todo o elemento está no conjunto universo, pois cada conjunto $C \subset X$, ou seja, $x \in C \Rightarrow x \in X$), o conjunto complementar de A é
$$A^c = X \backslash A = \{x : x \notin A\}$$
é o conjunto dos elementos que não pertencem a A.

Consideremos o exemplo seguinte:

Exemplo 2: Dados os conjuntos $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, ...\}$ subconjuntos do conjunto universo $\mathbb{R}$, então

a) $A \cap B = \{1\}$;

b) $A \cup B = \{x : x \in \mathbb{N} \vee x = 1/n, n \in N\}$;

c) $A \backslash B = \{2, 3, ...\}$;

d) $A^c = \{x : x \notin \mathbb{N}\} = \{x : x \neq n, n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de todos os números reais que não são números naturais.

Uma vez que a negação da relação $R(x) \wedge S(x)$ é a relação $(\sim R(x)) \vee (\sim S(x))$, negar que se verificam ambas $R(x)$ e $S(x)$ é dizer que não se verifica $R(x)$ ou não se verifica $S(x)$. Assim, tem-se

$$\sim (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (\sim (x \in A) \vee \sim (x \in B))$$

($\Leftrightarrow$ significa que ambas as relações têm o mesmo valor lógico, quer dizer são duas maneiras de dizer a mesma coisa), portanto, tem-se que o complementar $(A \cap B)^c$ do conjunto $A \cap B$ é o conjunto $A^c \cup B^c$, ou seja,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Analogamente,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

pois $\sim (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (\sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)$, a negação da relação $R(x) \vee S(x)$ é a relação $\sim R(x)$ e $\sim S(x)$. Obtêm-se assim as **Leis de De Morgan**, a saber:

i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Dados os conjuntos A e B, outro conjunto que se considera usualmente é o conjunto produto cartesiano de A por B, que se representa por $A \times B$ (e se lê A vezes B). $A \times B$ é o conjunto constituído pelos pares ordernados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$. Pode escrever-se

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 3: Consideremos os conjuntos $A = \{0, 1\}$ e $B = \{0, -1\}$.

O conjunto produto cartesiano $A \times B$ é

$$A \times B = \{0, 1\} \times \{0, -1\} = \{(0, 0), (0, -1), (1, 0), (1, -1)\},$$

enquanto que o conjunto produto cartesiano $B \times A$ é

$$B \times A = \{0, -1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (-1, 0), (-1, 1)\}.$$

O plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ designa-se por $\mathbb{R}^2$ e assim

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Note-se que no exemplo anterior, os conjuntos $\{0, 1\} \times \{0, -1\}$ e $\{0, -1\} \times \{0, 1\}$ são diferentes. Em geral,

$$A \times B \neq B \times A.$$