Sobre o volume de campos vetoriais unitários em dimensões 2 e 3

Universidade de Évora
7 de julho de 2022

Rui Albuquerque
Departamento de Matemática da Universidade de Évora

Gluck, H., Ziller, W.: On the volume of a unit field on the three-sphere. Comment. Math. Helv. 61, 177–192 (1986):
Questão: quais os campos vetoriais unitários

$$M \xrightarrow{X} T^1M \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$$

$$X_x \in T_xM, \qquad \|X\| = 1$$

de volume mínimo sobre uma variedade riemanniana (M, g)?

Trata-se de volume como subvariedade imersa $X(M) \subset T^1M$:

$$\mathrm{vol}(X) = \mathrm{vol}(M, X^*g^S) = \int_M \mathrm{vol}_X$$

$$\mathrm{vol}_X = \sqrt{\det\left(1 + (\nabla X)^t \nabla X\right)}\,\mathrm{vol}_M$$

Em dim 2:

$$\mathrm{vol}(X) = \int_M \sqrt{1 + \|\nabla_{e_0} X\|^2 + \|\nabla_{e_1} X\|^2}\,\mathrm{vol}$$

Em dim 3:

$$\mathrm{vol}(X) = \int_M \left(1 + \sum_{j=0}^{2} \|\nabla_{e_j} X\|^2 + \sum_{j_1 < j_2} \|\nabla_{e_{j_1}} X \wedge \nabla_{e_{j_2}} X\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{vol}$$

$\{e_0, \ldots, e_n\}$ é base ortonormada local.

O. Gil-Medrano and E. Llinares-Fuster, Minimal unit vector fields, Tohoku Math. J. 54 (2002), 71–84

O funcional volume restringido a $\mathfrak{X}^1_M$ tem pontos críticos precisamente as imersões minimais.

$\rightsquigarrow$ equação de Euler-Lagrange.

Teorema: (M, g) de curvatura seccional constant c.
Todo o campo vetorial unitário e de Killing é minimal;

$$\mathrm{vol}(X) = (1 + c)^{n/2}\mathrm{vol}(M)$$

onde $n + 1 = \dim M$.
(Killing significa $\mathcal{L}_X g = 0$.)

Gluck-Ziller, '86. teoria das calibrações $\rightsquigarrow$

Teorema: Campos vetoriais de volume mínimo sobre a esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ são precisamente os c.v. de Hopf.

Uma **calibração** é uma k-form φ sobre a variedade em causa, fechada ie. $\mathrm{d}\varphi = 0$, e de **comassa** 1, ou seja, $\varphi \leq \mathrm{vol}$ com supremo 1, avaliado em k-vetores unitários simples $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k$ de $\bigwedge^k$.

X de Hopf é tangente às fibras $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$.

R. Harvey and H.B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. 148 (1982), 47–157.

$X \in \mathfrak{X}^1_M$. Na classe de homologia de $X(M)$, X tem volume minimal se $\varphi = \mathrm{vol}_X$ quando restringido à subvariedade. Será então exemplo de **subvariedade calibrada** de (T^1M, g^S, φ).

$$X^*\varphi = \sqrt{1 + (\nabla X)^t \nabla X}\,\mathrm{vol}_M := \mathrm{vol}_X.$$

Temos monomorphismo na homologia $H_{n+1}(M) \hookrightarrow H_{n+1}(T^1M)$. E assim relação fundamental: $\forall X' \in \mathfrak{X}^1_M$ na mesma classe de X

$$\int_M \mathrm{vol}_X = \int_{X(M)} \varphi = \int_{X'(M)} \varphi \leq \int_M \mathrm{vol}_{X'}.$$

A teoria das calibrações vale para subvariedades com bordo.

Calibração de Gluck-Ziller:
Será uma 3-forma φ sobre $T^1\mathbb{S}^3$.
Secções do fibrado $T^1\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ definem uma única classe de homologia.

Construção de φ:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_2(\mathbb{R}^4) = T^1\mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4) \\ (x,y) &\longmapsto x \wedge y \end{aligned}$$

$\mathrm{V}_2(\mathbb{R}^4)$: pares de vetores ortogonais unitários (x,y)
$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4)$: grassmanniana de planos orientados;
quádrica $z_1^2 + \cdots + z_4^2 = 0$ em $\mathbb{CP}^3$, mergulho $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$.

É conhecida a isometria $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

$\rightsquigarrow$ duas 2-formas simpléticas ω_1 e ω_2, ortogonais, sobre $T^1\mathbb{S}^3$

A direção e_0 que falta, tangente às fibras, é horizontal para a projeção $T^1\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ e induz uma 1-forma θ, **fluxo geodésico**.

$$g_t(x,y) = (x\cos t + yr\sin t, -x\frac{\sin t}{r} + y\cos t)$$

Nota: também em espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, e_0 é tangente a $T^1\mathbb{H}^3(r)$

$$g_t(x,y) = (x\cosh t + yr\sinh t, x\frac{\sinh t}{r} + y\cosh t).$$

Finalmente, c.v. de Hopf calibra φ como "curva holomorfa"

$$\varphi = \theta \wedge (\omega_1 + \omega_2)$$

Outro sistema diferencial

—, A fundamental differential system of Riemannian geometry, Rev. Mat. Iberoam. 35 (7) (2019), 2221–2250
R. A., A fundamental differential system of 3-dimensional Riemannian geometry, Bull. Sci. Math. 143 (2018), 82–107
—, Natural $\mathrm{SU}(2)$*-structures on tangent sphere bundles, Asian J. Math. 24, No. 3, 457-482 (2020)*
—, outras aplicações.

Dada uma variedade riemanniana orientável M de dim $n+1$.
SDE sobre $T^1M = \{u \in TM : \ \|u\| = 1\}$ variedade de contacto, riemanniana de dim $2n+1$.
Forma de contacto, θ, dual de e_0 — fluxo ou spray geodésico.

Definem-se formas diferenciais globais sobre $T^1 M$:

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots, \alpha_n$$

$$\mathrm{d}\alpha_i = (i+1)\theta \wedge \alpha_{i+1} + \mathcal{R}^{\xi}\alpha_i$$

Em M de curvatura seccional constante c

$$\mathrm{d}\alpha_i = (i+1)\theta \wedge \alpha_{i+1} - c(n-i+1)\theta \wedge \alpha_{i-1}.$$

Em dim 2, sistema diferencial de Cartan já conhecido.

Em dim 3,
$e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3 = Be_1,\ e_4 = Be_2$ um referencial adaptado de TT^1M.
e_0, e_1, e_2 horizontais, e_3, e_4 espelho (canónico) de e_1, e_2.

$$\mathrm{d}\theta = e^{31} + e^{42}, \qquad \alpha_0 = e^{12}, \qquad \alpha_1 = e^{14} - e^{23}, \qquad \alpha_2 = e^{34}.$$

$$\forall i = 0,1,2, \qquad \alpha_i \wedge \mathrm{d}\theta = \alpha_0 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_1 \wedge \alpha_1 = -2\alpha_0 \wedge \alpha_2 = (\mathrm{d}\theta)^2.$$

M curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{d}\alpha_0 = \theta \wedge \alpha_1, \qquad \mathrm{d}\alpha_1 = 2\theta \wedge \alpha_2 - 2c\,\theta \wedge \alpha_0, \qquad \mathrm{d}\alpha_2 = -c\,\theta \wedge \alpha_1.$$

Consideramos agora

$$\varphi = \theta \wedge (b_0\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2)$$

com $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; assumimos a priori coeficientes constantes.
Basicamente, há só dois tipos de calibração:

$$\varphi_t = \theta \wedge (\cos t\,\alpha_0 + \sin t\,\alpha_1 - \cos t\,\alpha_2) \qquad \text{e} \qquad \varphi_+ = \theta \wedge (\alpha_0 + \alpha_2).$$

Já agora

$$\varphi_t \sim \varphi \iff b_{0t} - b_0 = -c(b_{2t} - b_2).$$

Queremos finalmente $X^*\varphi = \mathrm{vol}_X$. Uma vez que $\mathrm{d}X(Y) = \pi^* Y + \pi^\star(\nabla_Y X)$,

$$\mathrm{d}X(e_i) = e_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} e_{j+n},$$

$i = 0, 1 \ldots, n$, onde $A_{ij} = \langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle$.

Proposição

Seja $\varphi = \theta \wedge (b_0\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2)$. Então $X^*\varphi = \mathrm{vol}_X$ se e só se

$$b_0 + b_1(A_{11} + A_{22}) + b_2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = \sqrt{1 + \sum_{i,j=0}^{2} {A_{ij}}^2 + \sum_{j=0}^{2} {A_{(j0)}}^2}.$$

Seja

$$\varphi = \varphi_{\pm} = \theta \wedge (\alpha_0 \pm \alpha_2).$$

Proposição

X corresponde a uma φ-subvariedade se e só se (i) $\nabla_X X = 0$ e (ii) $\langle \nabla_Y X, Y \rangle = \pm \langle \nabla_Z X, Z \rangle$ e $\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \mp \langle \nabla_Z X, Y \rangle$, $\forall Y, Z$ tais que X, Y, Z é referencial ortonormado.

X solução de equações (i-ii) no caso φ_+, então X é de Killing.

Generaliza-se a qualquer curvatura $c = \frac{1}{r^2} > 0$ o resultado bem conhecido de Gluck-Ziller para a 3-esfera.

O. Gil-Medrano, Volume minimising unit vector fields on three dimensional space forms of positive curvature, Calc. Var. (2022) 61:66.

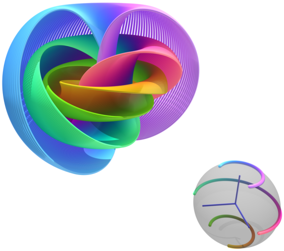
J.C. González-Dávila and L. Vanhecke, Energy and volume of unit vector fields on three-dimensional Riemannian manifolds, Diff. Geometry and its Applications 16 (2002), 225–244.

Teorema

Campo vectorial de Hopf sobre $\Omega \subset \mathbb{S}^3(r)$ tem volume mínimo $(1 + \frac{1}{r^2})\mathrm{vol}(\Omega)$ na sua classe de homologia. Solução única.

Corolário

Dado subgrupo finito $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SO}(4)$ *actuando sem pontos fixos em* $\mathbb{S}^3$*, a variedade* $\mathbb{S}^3/\Gamma$ *tem campo vectorial de volume mínimo o que descende de algum c.v. Hopf.*



Wikipedia

Em dimensão 2 via calibrações

Obtemos equação muito estranha...

Teorema

Suponhamos que existe um campo vetorial unitário X sobre superfície M tal que a função $A = A_1 + \sqrt{-1}A_0$ com valores em $\mathbb{C}$ satisfaz a equação, numa carta conforme z de M:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{A}{\sqrt{1 + |A|^2}} = 0. \qquad (*)$$

Então existe uma calibração φ no espaço total de T^1M para a qual X é uma φ-subvariedade. Em particular, X é um c.v. unitário M de volume minimal.

Se virmos A como ∇X, a equação (*) assemelha-se a

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

equação devida a Lagrange de volume minimal de uma superfície tipo gráfico em $\mathbb{R}^3$ dada por $u = u(s,t),\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Corolário

Suponhamos X solução da equação (*) e tal que a função $|A|$ é constante. Então A é constante e a superfície de Riemann tem curvatura seccional constante $c = -|A|^2 \leq 0$. Em particular,

$$\mathrm{vol}(X) = \sqrt{1-c}\,\mathrm{vol}(M).$$

Volume em dim 2 não via calibrações:

V. Borrelli, O. Gil-Medrano, *Area-minimizing vector fields on round 2-spheres*, J. Reine Angew. Math. 640 (2010), 85–99.

F. Brito, P. Chacón and D. Johnson, *Unit vector fields on antipodally punctured spheres: big index, big volume*, Bull. Soc. Math. France 136.1 (2008), 147–157.

F. Brito, J. Conrado, I. Gonçalves and A. Nicoli, *Area minimizing unit vector fields on antipodally punctured unit 2-sphere*, Comptes Rendus Math. 359, No. 10 (2021), 1225–1232.

F. Brito, A. Gomes and I. Gonçalves, *Poincaré index and the volume functional of unit vector fields on punctured spheres*, manuscripta math. 161 (2020), 487–499.

S. Pedersen, *Volumes of vector fields on spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. 336 (1993), 69–78.