# Da geometria dos fibrados vectoriais com métricas esfericamente simétricas

*Rui Albuquerque*
Universidade de Évora e Università di Torino
e-mail: rpa@uevora.pt

**Resumo:**
Apontamento sobre a construção de métricas com simetria esférica em fibrados vectoriais riemannianos sobre variedades riemannianas.

**Abstract:**
A note on the construction of metrics with spherical symmetry on Riemannian vector bundles over Riemannian manifolds.

**palavras-chave:** fibrado vectorial; conexão métrica.

**keywords:** fibre bundle; metric connection.

## 1 Geometria dos fibrados vectoriais

É bem conhecido que os fibrados vectoriais $\pi : E \longrightarrow M$ são também variedades diferenciáveis. Com efeito, as aplicações de trivialização induzem as necessárias cartas, do mesmo grau de diferenciabilidade sobre as intersecções. Em cada fibra $\pi^{-1}(x) = E_x$, $x \in M$, tais cartas são ainda aplicações lineares, pelo que se pode identificar naturalmente $T_eE_x$ com $E_x$. Ou seja, $T(E_x) = E_x \times E_x$ e, mais ainda, pode-se verificar que $\mathcal{V} := \ker \mathrm{d}\pi \subset TE$ coincide com o subfibrado tangente às fibras, pelo que em suma $\mathcal{V} \simeq \pi^*E$. Por outro lado, tem-se a sucessão exacta de fibrados vectoriais sobre $E$

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow TE \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \pi^*TM \longrightarrow 0\ . \tag{1}$$

Dada uma conexão $D^E : \Gamma(M;E) \longrightarrow \Gamma(M;T^*M \otimes E)$, esta permite-nos construir um subespaço dito horizontal $\mathcal{H}^{D^E} \subset TE$ complementar do vertical $\mathcal{V}$, que se identifica por sua vez com $\pi^*TM$ por via de $\mathrm{d}\pi$. Assim obtemos

$$TE = \mathcal{H}^{D^E} \oplus \mathcal{V} \simeq \pi^*TM \oplus \pi^\star E\ . \tag{2}$$

Desde logo $E$ admite um campo vectorial tautológico $\xi$, vertical por natureza e definido como $\xi_e = e \in \mathcal{V}$, $\forall e \in E$. Tal campo *parece* variar apenas ao longo das fibras de $E$; com efeito, em $m := \dim M$ direcções horizontais não varia de todo. Não desvirtuando quaisquer definições canónicas, temos o subespaço horizontal e projecção

$$\mathcal{H}^{D^E} = \ker \pi^\star D^E_{\cdot}\xi \qquad \pi^\star D^E_Y\xi = Y,\ \forall Y \in \mathcal{V}\ . \tag{3}$$

Fazemos agora nova suposição, a de a variedade $M$ estar munida de uma conexão linear $\nabla^M$, ou seja, uma conexão definida no fibrado tangente de $M$. Respeitando as projecções e isomorfismos indicados em (2), obtém-se de imediato, bem definida, uma conexão linear sobre a variedade $E$. Admitimos assim que $D^\star = \pi^*\nabla^M \oplus \pi^\star D^E$ está definida em $TE$.

A seguinte proposição pode-se provar em duas linhas, apenas com o que já se introduziu. Mas por ser tão fundamental em tudo o que segue optamos por um retorno às cartas. Sendo $R^{D^E}$ o tensor de curvatura de $D^E$,

$$R^{D^E}(X,Y)e = D^E_X D^E_Y e - D^E_Y D^E_X e - D^E_{[X,Y]}e\ ,\quad \forall X, Y \in TM\,, \tag{4}$$

notamos $\mathcal{R}^\xi$ o *tensor* definido por $\mathcal{R}^\xi(X,Y) = \pi^\star R^{D^E}(X,Y)\xi$, $\forall X, Y \in TE$, o qual como se espera provém da curvatura de $\pi^\star D^E$.

**Proposição 1.1.** *A torsão de $D^\star$ verifica*

$$T^{D^\star} = \pi^* T^{\nabla^M} \oplus \mathcal{R}^\xi\ . \tag{5}$$

*Demonstração.* Tomemos um carta $x = (x^1, \ldots, x^m)$ num aberto $U$ de $M$ e um referencial $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,k}$ de $E$ no mesmo domínio, onde $k$ é o ranque de $E$. Escrevamos os símbolos de Christoffel $\nabla^M_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^{M,h}_{ij}\partial_h$ e $D^E_{\partial_i}e_\alpha = \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}e_\beta$, com as convenções usuais. Temos em particular uma carta $(x,y)$ em $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^k$ que permite escrever $\xi = y^\alpha \pi^\star e_\alpha \simeq y^\alpha\partial_\alpha$. Derivando $\xi$ na direcção de um qualquer vector $X = X^i\partial_i + Y^\alpha\partial_\alpha$ tangente a $E$, encontramos a decomposição (2) de $X$:

$$X \;=\; (X^i\partial_i - X^i y^\alpha \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta) \;+\; (X^i y^\alpha \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha} + Y^\beta)\partial_\beta$$

Ou seja os vectores $\pi^*\partial_i := \partial_i - y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta$ formam em cada ponto uma base de $\mathcal{H}^{D^E}$ e os vectores $\partial_\beta = \pi^\star e_\beta$ uma base de $\mathcal{V}$. Obviamente $\mathrm{d}\pi(\partial_j) = \partial_j$.

Queremos provar que $D^\star_X Y - D^\star_Y X - [X,Y] = \mathcal{R}^\xi(X,Y)$ — aceitemos desde logo que $\nabla^M$ tem torsão nula, pois o caso geral é pouco mais complicado. Primeiro,

$$\begin{aligned} D^\star_{\partial_j}\partial_i &= \pi^*\nabla^M_{\partial_j}\pi^*\partial_i + \pi^\star D^E_{\partial_j}(y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta) \\ &= \Gamma^{M,h}_{ji}\pi^*\partial_h + y^\alpha\Big(\frac{\partial\Gamma^{E,\gamma}_{i\alpha}}{\partial x^j} + \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\Gamma^{E,\gamma}_{j\beta}\Big)\partial_\gamma\ . \end{aligned}$$

Como $\nabla^M$ é simétrica, $\Gamma_{ji}^{M,h} = \Gamma_{ij}^{M,h}$, resulta em mais uma linha que $T^{D^\star}(\partial_i, \partial_j) = \mathcal{R}^\xi(\partial_i, \partial_j)$. De facto, o tensor $\mathcal{R}^\xi$ é nulo se alguma das entradas for vertical. Deixa-se ao cuidado do leitor a demonstração das igualdades

$$D^\star_{\partial_i}\partial_\alpha = D^\star_{\partial_\alpha}\partial_i = \Gamma_{i\alpha}^{E,\beta}\partial_\beta \qquad \text{e} \qquad D^\star_{\partial_\alpha}\partial_\beta = 0$$

que permitem finalmente concluir o resultado em geral. □

Vemos assim uma interpretação da torsão como expressão da curvatura, ou vice-versa, fenómeno comum da geometria diferencial como teoria simultâneamente una e plena de ubiquidades. A introdução de tensores e derivadas covariantes permite fazer o estudo da geometria de $E$ de forma avançada, independente de coordenadas, focada em novas estruturas globais.

## 2 Métricas esfericamente simétricas

Continuando a tomar $(E, D^E)$ da secção anterior, suponhamos que o fibrado vectorial $E$ vem ainda munido de uma métrica $g_E \in \Gamma(M; S^2E^*)$, definida positiva, com a qual a conexão dada é compatível, isto é, $D^E g_E = 0$, e suponhamos que a variedade base $M$ é uma variedade riemanniana com métrica $g_M$. Podemos então introduzir uma estrutura pseudo-riemanniana $\mathrm{g}_{M,E}$ sobre $E$ respeitando a decomposição (2) e escrevendo

$$\mathrm{g}_{M,E} = e^{2\varphi_1}\pi^* g_M \oplus \pm e^{2\varphi_2}\pi^\star g_E \tag{6}$$

onde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}^\infty_E(\mathbb{R})$ são duas quaisquer funções escalares em $E$. Chamamos *métrica esfericamente simétrica* aquela em que $\varphi_1, \varphi_2$ dependem apenas de um parâmetro, a saber, o raio-quadrado $r = r(e) = \|e\|^2_E$, $\forall e \in E$.

No caso das definidas positivas, tais métricas foram introduzidas em formulação geral em [3] (não encontramos outra referência), no seguimento de outros estudos de exemplos concretos por vários geómetras ([1, 2, 4, 5]) e conhecidos físicos como [6].

Como $r = \|\xi\|^2_E$, resulta que $\mathrm{d}r(X) = 2\langle \xi, \pi^\star D^E_X \xi\rangle_E = 2\langle \xi, X\rangle_E$ (notamos e.g. $\langle X, Y\rangle_M = \pi^* g_M(X^h, Y^h)$). Usando a conexão de Levi-Civita provinda da métrica $g_M$, pode-se construir $D^\star$. Obtemos uma conexão métrica $\widetilde{D} = D^\star + C$, com a mesma torsão, somando certo tensor simétrico

$$\begin{aligned} C_X Y \;=\; & a(\xi^\flat(X)Y^h + \xi^\flat(Y)X^h) + \\ & + c_1\langle X, Y\rangle_M \xi + c_2\langle X, Y\rangle_E \xi + b\big(\xi^\flat(X)Y^v + \xi^\flat(Y)X^v\big)\ . \end{aligned} \tag{7}$$

O seguinte teorema generaliza [3, Theorem 1.1] ao caso pseudo-riemanniano.

**Teorema 2.1.** *$\widetilde{D}$ é uma conexão métrica ($\widetilde{D}\,\mathrm{g}_{M,E} = 0$) se e só se*

$$a = 2\varphi_1' \qquad c_1 = \mp 2\varphi_1' e^{2(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad b = 2\varphi_2' = -c_2\ . \tag{8}$$

Finalmente a conexão de Levi-Civita de $\mathrm{g}_{M,E}$ coincide com

$$\nabla_X^{M,E} Y = D_X^\star Y + C_X Y \pm A_X Y - \frac{1}{2}\mathcal{R}^\xi(X,Y) \tag{9}$$

onde $A$ é o tensor definido para o caso riemanniano em [3].

Como exemplo das métricas esfericamente simétricas recordamos a construção de Bryant-Salamon sobre $E = \Lambda_-^2 T^*M \longrightarrow M^4$, de holonomia não só contida mas igual ao grupo de Lie excepcional $\mathrm{G}_2$ quando $M = S^4$ ou $\mathbb{CP}^2$. A métrica é definida por

$$\mathrm{g}_{M,E} = \sqrt{2\tilde{c}_0^2 sr + \tilde{c}_1}\,\pi^* g_M \oplus \frac{\tilde{c}_0^2}{\sqrt{2\tilde{c}_0^2 sr + \tilde{c}_1}}\,\pi^\star g_E \tag{10}$$

onde $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1 > 0$ e $s = \mathrm{Scal}^{g_M}/12$. Em [2] mostram-se outras métricas $\mathrm{G}_2$ semelhantes. Aqui deixamos em perspectiva o estudo do caso de holonomia $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ dos split-octoniões, associada a métrica de assinatura $(3,4)$.

(Investigação financiada parcialmente pelos fundos FEDER, programa COMPETE, através da FCT Projecto PTDC/MAT/118682/2010.)

## Referências


[1] M. T. K. Abbassi and M. Sarih, "On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds", *Arch. Math. (Brno)*, Tom. 41 (2005), 71–92.

[2] R. Albuquerque, "Self-duality and associated parallel or cocalibrated $\mathrm{G}_2$ structures", arXiv:math.DG/1401.7314v2, 17 pp.

[3] R. Albuquerque, "On vector bundle manifolds with spherically symmetric metrics", arXiv:math.DG/1411.5952v1, 31 pp.

[4] L. Bérard Bergery, "Quelques exemples de variétés riemanniennes complètes non compactes à courbure de Ricci positive", *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. Vol. 302 (1986), 4, pp. 159–161.

[5] R. L. Bryant e S. Salamon, "On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy", *Duke Math. Journ.*, Vol. 58(3), (1989), pp. 829–850.

[6] G. W. Gibbons, D. N. Page e C. N. Pope, "Einstein metrics on $S^3$, $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ bundles", Comm. Math. Physics Vol. 127 (1990), no. 3, 529–553.